

Value at Risk

(mesure de capital économique)

les risques de marché

Gaël Riboulet & Thierry Roncalli

Groupe de Recherche Opérationnelle

Crédit Lyonnais

email : gael.riboulet@creditlyonnais.fr,
thierry.roncalli@creditlyonnais.fr



Gaël Riboulet
Thierry Roncalli



Les mesures des risques de marché — les aspects méthodologiques

Travail effectué au Groupe de Recherche Opérationnelle (GRO) en collaboration avec la
Direction Centrale des Risques du Groupe (DCRG) du Crédit Lyonnais

Septembre 1999

Table des matières

1	Introduction	1
2	La Valeur en Risque	3
2.1	La <i>VaR</i> analytique (ou paramétrique)	4
2.2	La <i>VaR</i> historique (ou non paramétrique)	5
2.3	La <i>VaR</i> Monte-Carlo	7
3	Les problèmes liés à la construction de la <i>VaR</i>	8
3.1	Le choix de la distribution de probabilité	8
3.2	L'estimation de la matrice de covariance	11
3.2.1	Introduction	11
3.2.2	Un exercice de backtesting	13
3.3	Une réflexion sur les <i>VaRs</i> réelle et estimée	15
3.3.1	Notations- <i>VaR</i> estimée - <i>VaR</i> réelle	17
3.3.2	Calcul du biais maximum	18
3.3.3	Application à un portefeuille optimisé	23
3.3.4	Conclusion	26
4	La <i>VaR</i> est-elle une bonne mesure des risques ?	26
4.1	Le problème de l'agrégation des risques	26
4.1.1	Prise en compte de corrélations inter-marchés	27
4.1.2	Problème de sous-additivité	30
4.2	La théorie des valeurs extrêmes	30
4.2.1	Une introduction heuristique des extrêmes	30
4.2.2	L'analyse du <i>worst case scenario</i>	32
4.2.3	La théorie classique	35
4.2.4	L'utilisation des <i>copulas</i>	43
4.3	De la <i>VaR</i> à l'exigence en Fonds Propres : changement d'horizon	47
4.3.1	Quelques éléments théoriques	48
4.3.2	Un exercice de simulation	49
4.3.3	Conclusion	52
5	Conclusion	53
	Annexes	61
A	Les aspects réglementaires des risques de marché	62
A.1	La réglementation de la Commission Bancaire	63
A.1.1	Les normes générales	64
A.1.2	Les critères qualitatifs	65
A.1.3	Les critères quantitatifs	66
A.1.4	Autres considérations	68
A.1.5	Dispositif prudentiel de contrôle ex post	71
A.2	La réglementation de l'Union Européenne ou CAD (Capital Adequacy Directive)	73
A.3	Les autres textes relatifs à la mesure des risques de marché	74
A.3.1	Les travaux du Comité de Bâle	75
A.3.2	La note d'information n° 108 de la Banque de France	75

A.3.3	Les travaux de la Federal Reserve Board	76
A.4	Conclusion	77
B	Biais de l'estimation de la matrice de covariance sur la <i>VaR</i>	78
B.1	Maximisation du Risque avec poids homogène	78
B.1.1	moyenne du biais	78
B.1.2	Ecart-type du biais	78
B.2	Maximisation du Rendement avec poids homogènes	78
B.2.1	moyenne du biais	78
B.2.2	Ecart-type du biais	79
B.3	Maximisation du Risque avec poids exponentiels	79
B.3.1	moyenne du biais	79
B.3.2	Ecart-type du biais	79
B.4	Maximisation du Rendement avec poids exponentiels	80
B.4.1	moyenne du biais	80
B.4.2	Ecart-type du biais	80
C	Exemples numériques d'agrégation de <i>VaRs</i>	81
D	Annexe de la section 4.2	84
D.1	Forme générale d'une loi d'extrêmes	84
D.2	Jacobien analytique de la fonction de log-vraisemblance	84

1 Introduction

Les institutions financières sont soumises à un certain nombre de risques qu'il convient de bien gérer, si l'on ne veut pas mettre en péril la pérennité de l'entreprise. Parmi ces risques, nous pouvons citer les risques pays, les risques de liquidité, les risques opérationnels, les risques de contrepartie ou encore les risques de marché. Depuis quelques années, l'importance grandissante des opérations de marché, et des risques inhérents à ces opérations ont suscité de nombreuses réflexions de la part des instances bancaires nationales et internationales. Les incertitudes auxquelles sont exposées les variations de valeurs des portefeuilles de négociation nécessitent de mettre en place une méthodologie rigoureuse de contrôle. Dans ce contexte, la mesure du risque de marché doit couvrir l'ensemble des aléas portant sur les produits de taux, les produits de change, les produits de base, et les produits actions.

Les autorités bancaires nationales et supranationales ont tout d'abord imposé des contraintes pour mesurer le risque de contrepartie des établissements financiers (instauration des ratios internationaux de solvabilité). En 1993, une approche dite *standard* a été établie pour appréhender les risques liés aux activités de marché : l'exigence en fonds propres est alors calculée à partir de sensibilités forfaitaires. Depuis, les réflexions méthodologiques plus élaborées de ces mesures portent désormais sur la construction de modèles internes.

Depuis l'amendement de Bâle en janvier 1996¹, les banques soumises à des risques de marché, ont la possibilité de calculer le niveau de fonds propres réglementaires par un modèle interne. Les modèles internes sur les risques de marché constituent donc un enjeu primordial pour les établissements qui possèdent des portefeuilles importants de négociation. En effet, dans l'hypothèse où le modèle interne permet d'améliorer, par rapport à la méthodologie *standard*, l'évaluation du niveau des risques encourus, on peut espérer que les fonds propres liés aux activités de marché soient mieux ajustés et les risques mieux gérés.

Les institutions bancaires françaises qui souhaitent adopter une approche interne doivent obtenir l'agrément de l'autorité réglementaire : la Commission Bancaire. Celle-ci retranscrit en droit français les directives européennes de Bruxelles (Capital Adequacy Directives) et s'inspire également des réflexions de groupes de travail et de recherche tels que le Comité de Bâle. La Commission Bancaire a ainsi rédigé un rapport sur les modalités de calcul du ratio de solvabilité, actualisé au 31 Décembre 1998 qui présente, d'une part les méthodes de calcul par l'approche *standard*, et d'autre part les critères requis pour les *modèles internes*.

Un modèle interne doit remplir un certain nombre de conditions afin d'être homologué par la Commission Bancaire. Celle-ci a défini à cet effet des **normes générales**, ainsi que des **critères qualitatifs** et **quantitatifs** à satisfaire.

Les **normes générales** concernent la *qualité du système de gestion*, la *compétence du Risk Management*, la *précision du modèle*, mais aussi l'exigence de *simulations de crise* afin de mesurer le risque de perte liée à des fluctuations anormales du marché.

Parmi les **critères qualitatifs** à remplir, les textes réglementaires soulignent la nécessité pour les établissements financiers de se doter d'une *unité de contrôle des risques indépendante des unités de négociation*. Leurs mesures des risques doivent être accompagnées de *simulations de crise régulières*. Il est conseillé, de plus, de réaliser *un audit interne annuel du système de mesure*

¹ Amendement de Bâle à l'accord sur les fonds propres pour son extension aux risques de marché (janvier 1996)

des risques. Enfin, la compétence des unités de contrôle, la transparence des modèles ainsi que la qualité de l'alimentation des données sont à prendre en compte. La *fréquence d'actualisation des données doit être au moins trimestrielle*.

En ce qui concerne les **critères quantitatifs**, l'*estimation des corrélations entre les facteurs de risque* doit être suffisamment précise. Certains produits nécessitent en outre un traitement particulier. Par exemple, le *caractère non linéaire des options* et le *risque de volatilité* doivent être pris en compte. Enfin, même si la notion de Value-at-Risk n'est pas énoncée de manière explicite, elle s'avère être une solution assez naturelle aux contraintes imposées par la réglementation.

De manière générale, la *qualité* des mesures du modèle interne est capitale pour la validation de ce modèle. L'agrément de la Commission Bancaire nécessite la mise en oeuvre de tests sur données réelles : le *Backtesting*. Cet exercice est essentiel, car il donne, a posteriori, une image de la qualité de la mesure du risque. Il repose sur la notion du nombre d'exceptions, c'est-à-dire le nombre de fois où la perte réelle observée est supérieure au montant prévu et calculé par le modèle interne. La Commission Bancaire se réserve le droit d'invalider un modèle, si après *Backtesting*, le nombre d'exceptions constatées dépasse une limite fixée.

En tout état de cause, la mesure des risques d'un établissement financier conditionne le niveau des fonds propres à allouer suivant une règle simple : la Commission Bancaire affecte à chaque établissement un coefficient multiplicateur compris entre 3 et 4, selon la qualité de la mesure du risque du modèle interne. Ce coefficient est révisé régulièrement lors d'audit ou d'annonce de résultats *ex post*. Les fonds propres exigés se déduisent des risques mesurés par application de ce coefficient. Le respect des critères réglementaires revêt donc une importance primordiale, puisqu'une méthodologie interne qui serait jugée peu rigoureuse par la Commission Bancaire obligerait la banque à allouer relativement plus de fonds propres. C'est pourquoi, la plupart des banques mène actuellement un travail important pour mettre au point leur modèle de risque interne des risques de marché. Ce modèle interne est très souvent construit autour d'une méthodologie de type *Value-at-Risk*. Comme tout concept relativement récent et comme tout instrument qui prétend appréhender des phénomènes aussi complexes que les risques de marché, la *Value-at-Risk* soulève encore des questions méthodologiques qui, pour certaines, n'ont pas encore reçu aujourd'hui de réponses totalement convaincantes de la part de la communauté scientifique et professionnelle.

*
* * *

L'objet de ce rapport est de passer en revue l'essentiel de ces questions encore en suspens et de faire le point sur les réponses souvent partielles et même parfois peu satisfaisantes que les recherches et travaux récents ont pu apporter. Ce rapport tentera donc de développer l'ensemble des questions soulevées dans cette introduction et d'y apporter quelques éléments de réponse. Dans un premier temps, les grandes familles de mesures de type *Value-at-Risk* seront présentées de manière détaillée. La deuxième section s'attachera à traiter les principaux problèmes liés à la construction de la *Value-at-Risk*. Enfin, dans la troisième section, l'adéquation entre la *Value-at-Risk* et ce qu'elle doit mesurer - les risques de marché - est discutée et comparée à d'autres méthodes.

2 La Valeur en Risque

La Valeur en Risque, plus connue sous le nom anglais *Value-at-Risk* ou *VaR*, est une mesure de la perte **potentielle** qui peut survenir à la suite de mouvements adverses des prix de marché. Elle permet de répondre à la question suivante :

Combien l'établissement financier peut-il perdre
avec une probabilité α pour un horizon de temps T
fixé ?

Deux éléments sont donc indispensables pour interpréter le chiffre *VaR* (qui permet de donner une vision globale du risque de marché d'un portefeuille) :

1. la période de détention T ou *holding period* qui correspond à la période sur laquelle la variation de valeur du portefeuille est mesurée ;
2. le seuil de confiance α du chiffre *VaR* qui correspond à la probabilité de ne pas dépasser cette mesure du risque.

Si ces deux paramètres ne sont pas spécifiés, nous ne pouvons pas interpréter le chiffre *VaR*, car un risque à 10 jours avec une probabilité de 99% est beaucoup plus important qu'un risque à 1 jour avec une probabilité de 90%. Avec la mesure *VaR*, on passe donc d'une mesure de risque comme volatilité à une mesure de risque comme quantile.

Il faut bien avoir à l'esprit que la mesure *VaR* ne donne une image du risque que dans le cadre de conditions normales de marché et pour un niveau de confiance inférieur ou égal à 99% (dans le cas de la réglementation). Pour avoir une mesure du risque extrême, d'autres techniques sont plus adaptées : la *théorie des valeurs extrêmes* — présentée à la section 4.2 de la page 30 — apparaît alors comme une alternative.

Pour calculer la *VaR*, nous devons identifier les facteurs de marché qui affectent la valeur du portefeuille. Le nombre de ces facteurs peut être plus ou moins grand, mais dépend généralement du type de marché considéré. En pratique, nous pouvons obtenir les facteurs de marché en décomposant les instruments du portefeuille en instruments de base (par exemple, nous pouvons décomposer un portefeuille de contrats forward en un portefeuille équivalent d'obligations à coupon zéro). Le calcul de la *VaR* dépend alors de la méthodologie utilisée. D'une manière générale, nous avons le choix entre trois grandes familles de méthodes :

1. la *VaR* analytique (ou paramétrique) ;
2. la *VaR* historique (ou non paramétrique) ;
3. la *VaR* Monte-Carlo.

Ces trois méthodes utilisent les données du passé pour estimer les variations potentielles de la valeur du portefeuille dans le futur proche. Cela suppose implicitement que ce futur se comporte comme le passé : nous supposons donc que la variation de la valeur du portefeuille est stationnaire. Nous comprenons donc pourquoi l'approche *Value-at-Risk* n'est pertinente que dans des conditions normales de marché.

2.1 La VaR analytique (ou paramétrique)

Dans le modèle de VaR paramétrique, nous **supposons que la valeur algébrique d'un portefeuille est représentée par une combinaison linéaire de K facteurs gaussiens**. Notons $\mathbf{P}(t)$ la valeur du portefeuille à l'instant t et $\mathbf{F}(t)$ le vecteur gaussien des facteurs de loi $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. La valeur du portefeuille en t vaut alors $\mathbf{P}(t) = \mathbf{a}^\top \mathbf{F}(t)$ avec \mathbf{a} le vecteur de sensibilités. A la période t , la valeur de $\mathbf{P}(t+1)$ n'est pas connue puisque nous ne disposons que de l'information jusqu'en t . En t , $\mathbf{P}(t+1)$ est donc une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(\mathbf{a}^\top \mu, \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a})$. La valeur de la VaR pour un seuil de confiance α correspond alors à

$$\Pr(\mathbf{P}(t+1) - \mathbf{P}(t) \geq -VaR_\alpha) = \alpha \quad (1)$$

Dans cette équation, $\mathbf{P}(t+1) - \mathbf{P}(t)$ représente la variation du portefeuille entre l'instant $t+1$ et l'instant t . C'est donc une perte si la valeur réalisée du portefeuille dans un jour est inférieure à la valeur actuelle du portefeuille. Comme la VaR représente la perte potentielle que l'on s'autorise et que celle-ci est exprimée en valeur absolue, $\Pr(\mathbf{P}(t+1) - \mathbf{P}(t) \geq -VaR_\alpha)$ est la probabilité que la perte ne dépasse pas la VaR (ou perte potentielle). Par définition, cette probabilité est notre seuil de confiance α . Lorsque la période de détention n'est pas 1 jour mais T jours, la mesure de VaR se définit à partir de la relation suivante :

$$\Pr(\mathbf{P}(t+T) - \mathbf{P}(t) \geq -VaR_\alpha) = \alpha \quad (2)$$

Comme nous savons que $\mathbf{P}(t+1)$ est gaussien, nous en déduisons que

$$\Pr\left(\frac{\mathbf{P}(t+1) - \mathbf{a}^\top \mu}{\sqrt{\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a}}} \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha)\right) = \alpha \quad (3)$$

avec Φ^{-1} la fonction gaussienne inverse. Or nous avons $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha)$ avec $\Phi^{-1}(\alpha)$ le quantile à $\alpha\%$ de la loi gaussienne. Un rapide calcul montre que

$$VaR_\alpha = \mathbf{P}(t) - \mathbf{a}^\top \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a}} \quad (4)$$

Lorsque les facteurs \mathbf{F} modélisent directement la variation du portefeuille, la mesure VaR devient

$$VaR_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a}} - \mathbf{a}^\top \mu \quad (5)$$

En général, nous supposons que $\mu = \mathbf{0}$, et nous avons finalement

$$VaR_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a}} \quad (6)$$

Cette méthode de calcul de la VaR est appelée la méthode de variance-covariance, puisqu'elle dérive directement de la matrice de covariance Σ des facteurs.

La relation (6) s'interprète très facilement ; $\sqrt{\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a}}$ est en fait l'écart-type de la variation du portefeuille : nous pouvons l'assimiler à un *risque-volatilité* (par référence à la théorie du portefeuille de Markowitz) ; $\Phi^{-1}(\alpha)$ est un coefficient que nous notons c ; nous avons donc une relation linéaire entre le *risque-volatilité* et la perte potentielle :

$$VaR = c \times \text{risque-volatilité}$$

A titre d'illustration, c prend la valeur 2.33 pour un seuil de confiance $\alpha = 99\%$. Dans ce cas, la VaR correspond au *risque-volatilité* multiplié par ce facteur 2.33. A noter que lorsque les facteurs de marché correspondent directement aux variations de prix des actifs du portefeuille, le vecteur α est le vecteur des composantes du portefeuille.

Cette méthode repose sur trois hypothèses :

1. l'indépendance temporelle des variations de la valeur du portefeuille ;
2. la normalité des facteurs $\mathbf{F}(t)$;
3. et la relation linéaire entre les facteurs et la valeur du portefeuille.

Ces trois hypothèses simplifient le calcul de la VaR , puisque les quantiles de $\mathbf{a}^\top \mathbf{F}(t)$ sont liés de façon linéaire au quantile de la loi normale à une dimension correspondant. La principale difficulté de cette méthode est d'estimer la matrice de covariance et de déterminer les sensibilités.

Nous pouvons montrer que l'expression (6) de la VaR obtenue pour une période de détention d'un jour peut se généraliser à une période de détention de T jours. Dans ce cas, Σ représente la matrice de covariance des facteurs pour T jours. Nous rappelons que la période de détention réglementaire est fixée à 10 jours. Les autorités réglementaires autorisent de calculer une VaR pour une période de détention de 1 jour et de la convertir en une VaR à 10 jours en multipliant par $\sqrt{10}$. Ce coefficient \sqrt{T} n'est autre que ce qu'on dénomme *le scaling factor*².

Enfin, nous rappelons que **cette méthode n'est utilisable que pour les produits linéaires** car elle ne prend pas en compte le caractère non-linéaire des positions (risque Gamma par exemple). Aussi, le calcul d'une VaR paramétrique pour un portefeuille d'options n'est pas adapté (voir le paragraphe ?? consacré au produit optionnels).

2.2 La VaR historique (ou non paramétrique)

Contrairement à la VaR paramétrique, la VaR historique est entièrement basée sur les variations historiques des facteurs de risque $\mathbf{F}(t)$. Supposons que nous disposions d'un historique de longueur N . En t_0 , nous pouvons valoriser le portefeuille avec les facteurs de risque de l'historique. Cela veut dire que nous calculons pour chaque date $t = \{t_0 - 1, \dots, t - N\}$ une valeur (potentielle) du portefeuille. Nous pouvons alors déterminer N variations potentielles. Ainsi, à partir de l'historique, nous construisons implicitement une distribution empirique. De celle-ci, nous pouvons extraire le quantile à $\alpha\%$. Il suffit pour cela de ranger les N pertes potentielles et de prendre la valeur absolue de la $N \times (1 - \alpha)$ i -ième plus petite valeur.

Ainsi, nous supposons que les pertes potentielles P sont ordonnées. Nous obtenons alors un ensemble $\{P_1, \dots, P_n, \dots, P_N\}$ avec $P_n \leq P_m$ quelque soit $n < m$. Pour un seuil de confiance de 99%, la VaR correspond à la première perte potentielle $|P_1|$ si $N = 100$, à la dixième perte potentielle $|P_{10}|$ si $N = 1000$, etc. Lorsque $N \times (1 - \alpha)$ n'est pas un entier, dans ce cas, la VaR est calculée par interpolation :

$$VaR = |P_{n^*} + (N \times (1 - \alpha) - n^*) (P_{n^*+1} - P_{n^*})| \quad (7)$$

²Voir le paragraphe 4.3 consacré au problème du *scaling factor*.

avec $n^* = \lfloor N \times (1 - \alpha) \rfloor$ l'entier inférieur le plus proche de $N \times (1 - \alpha)$ (arrondi de type *floor*). Par exemple, si nous considérons un historique de 250 jours et un intervalle de confiance de 99%, nous avons

$$VaR = \left| P_2 + \frac{1}{2} (P_3 - P_2) \right| \quad (8)$$

Il est généralement admis que la *VaR* historique n'impose pas d'hypothèses a priori sur la loi de distribution des facteurs $\mathbf{F}(t)$ à la différence de la méthode paramétrique. Mais il est quand même nécessaire d'avoir un modèle sous-jacent pour estimer les facteurs pour l'historique de longueur N . Cela explique que les *VaRs* historiques sont principalement appliqués avec des facteurs de marché qui sont exactement les variations des actifs (dans ce cas, nous avons autant d'actifs que de facteurs).

Cette méthode est vraiment très simple conceptuellement et facile à implémenter. Elle est donc très utilisée. Cependant, elle présente quelques difficultés. En effet, l'estimation d'un quantile a une vitesse de convergence beaucoup plus faible que les estimateurs de la moyenne, de la variance, de la médiane, etc. Cela tient au fait que l'estimation d'un quantile est une estimation locale qui demande donc beaucoup d'observations afin d'en avoir suffisamment autour du quantile. Le graphique (1) est une illustration de ce problème. Considérons un portefeuille composé d'une position longue sur un seul actif. Nous supposons que les variations du prix de cet actif sont gaussiennes, centrées autour de la valeur zéro et de variance égale à 1. Nous cherchons à calculer la perte potentielle du portefeuille en employant la *VaR* historique. Cela revient à calculer le quantile $q_N(\alpha)$ des N variations de prix historiques. Sur le graphique, nous avons considéré plusieurs valeurs de α et N . Nous mettons en évidence que l'estimateur $q_N(\alpha)$ converge plus rapidement lorsque le nombre d'observations croît. De plus, la puissance de cet estimateur dépend de α . Cela peut se comprendre aisément. Nous avons vu que l'estimation du quantile revient à trouver la valeur optimale $n^* = \lfloor N \times (1 - \alpha) \rfloor$. Cela revient aussi à chercher n^* tel que pour $n^* - 1$ la fréquence soit supérieure à α et pour $n^* + 1$ la fréquence soit inférieure à α . Si ces deux probabilités sont proches de α , l'erreur d'estimation sur le quantile est faible. Sinon, l'erreur peut être très importante. Pour illustrer ceci, nous considérons les tableaux suivants :

N	n^*	Quantile associé à		
		n^*	$n^* - 1$	$n^* + 1$
100	1	99	100	98
1000	10	99	99.1	98.9
10000	100	99	99.01	98.99
1000000	10000	99	99.0001	98.9999

Nous voyons donc à quel quantile serait associé la n^* -ième position si nous éliminions la donnée $n^* - 1$ ou $n^* + 1$ de la base de données. Dans le même genre d'idée, la quatrième figure du graphique (1) montre comment évolue la probabilité d'estimer un quantile avec une erreur de plus ou moins 10%.

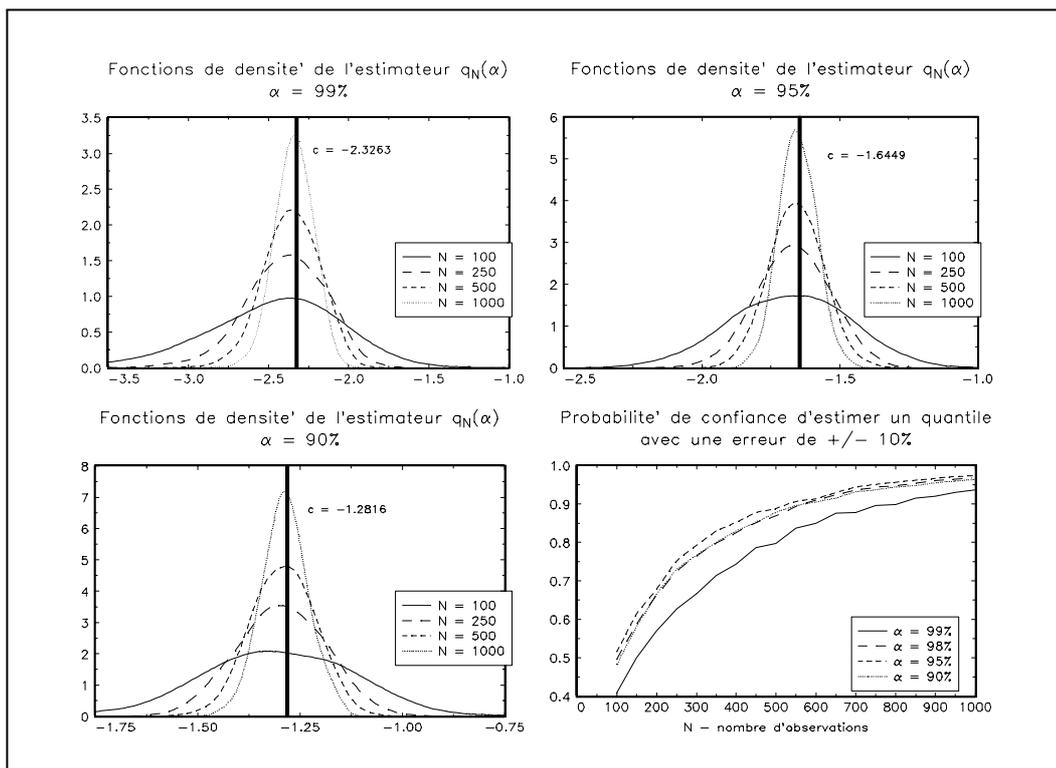


FIG. 1:

2.3 La VaR Monte-Carlo

La VaR Monte-Carlo est basée sur la simulation des facteurs de marché $\mathbf{F}(t)$ dont on se donne une loi de distribution a priori, de préférence admissible avec l'historique. Nous pouvons alors valoriser le portefeuille avec les facteurs simulés. Si nous utilisons N simulations, nous pouvons alors déterminer N variations simulées du portefeuille. Il suffit ensuite de calculer le quantile correspondant tout comme pour la méthode de la VaR historique. Les deux méthodes sont donc très semblables. La seule différence est que l'une des méthodes utilise les facteurs passés, alors que l'autre utilise des facteurs simulés. Une autre différence concerne la taille N de l'échantillon pour le calcul du quantile, qui n'est pas contraint dans le cas de la VaR Monte-Carlo.

Cette méthode est très intéressante, puisque nous pouvons calculer directement la VaR pour une période de détention de T jours même si les facteurs de marché correspondent à une période de 1 jour.

Il faut cependant noter que cette méthode nécessite un ordinateur très performant car elle est coûteuse en temps de calcul (elle convient difficilement au calcul journalier d'une VaR pour un nombre trop grand d'actifs). De plus, elle demande un effort important de modélisation puisque celle-ci déterminera entièrement les trajectoires des facteurs de marché que l'on utilise pour le calcul de la VaR.

3 Les problèmes liés à la construction de la *VaR*

3.1 Le choix de la distribution de probabilité

Le choix de la distribution de probabilité est primordial dans le calcul des *VaRs* paramétrique et de Monte-Carlo. Généralement, nous utiliserons une loi normale ou log-normale pour modéliser les facteurs $\mathbf{F}(t)$. Cela implique que la distribution de $\mathbf{F}(t)$ est entièrement déterminée par les deux premiers moments μ et Σ . L'utilisation en Finance de la normalité repose sur des arguments de facilité d'utilisation. Mais nous savons depuis fort longtemps que les séries financières ne sont ni normales ni log-normales. En revanche, il est facile de calculer la variance d'une combinaison des composantes d'un vecteur gaussien. De même, la simulation de nombres aléatoires normaux est très aisée à partir d'un générateur de nombres aléatoires uniformes pour le cas à une dimension, ou d'une décomposition de Cholesky ou en valeurs singulières pour le cas à plusieurs dimensions.

Certains auteurs ont tenté de justifier le recours à la loi normale par le théorème central-limite qui établit la convergence vers la loi normale sous des hypothèses peu contraignantes. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mathbb{E}(X_i)}{\sigma(X_i) \sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (9)$$

Cependant, la convergence en loi n'est rien d'autre qu'une convergence des fonctions de répartition. Cette convergence est beaucoup plus rapide dans les régions proches de la moyenne. FELLER [1968] a d'ailleurs montré que l'approximation n'est valable qu'autour de $n^{\frac{3}{4}}$ écarts-types de la moyenne. Nous pouvons alors facilement construire des exemples qui illustrent le problème du théorème central-limite dans la méthodologie *VaR* paramétrique. L'exemple suivant est proposé par BOULIER, BRABANT, DALAUD et DIEU [1997]. Les auteurs considèrent un modèle macro-économique de type APT où les rentabilités sont décrites par l'évolution aléatoire d'une trentaine de facteurs économiques, qu'ils supposent indépendants et de même loi. L'approximation n'est alors valable qu'autour de $30^{\frac{3}{4}} \simeq 12.819$ écarts-types de la moyenne. Or l'écart-type de la loi normale résultante est $\sqrt{30} \simeq 5.477$ fois plus grande que l'écart-type initial. Cela implique que l'approximation n'est plus valable au delà de la probabilité de 99.04%. Pour cet exemple, les *VaRs* au-delà de 99% ne font plus partie du domaine de validité de l'approximation par la loi normale. Dans le cas des portefeuilles de taux d'intérêt, il est recommandé d'utiliser au moins 13 facteurs. En utilisant le même raisonnement, cela voudrait dire que les *VaRs* au-delà de 97.12% sont en dehors du domaine de validité défini par Feller³.

Comme nous l'avons déjà signalé, la variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ est entièrement caractérisée par ces deux premiers moments $\mu = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}\left((X - \mu)^2\right)$. Nous rappelons que cette fonction de distribution est utilisée en finance car elle est facilement manipulable, mais il existe de nombreux travaux qui présentent des arguments contredisant l'idée que les variations des prix des actifs sont normaux (ou log-normaux). Cela vient notamment du fait que les moments d'ordre 3 et 4 d'une série financière sont très différents de ceux de la loi normale. La skewness ς (ou moment centré d'ordre 3) est un coefficient d'asymétrie de la fonction

³La valeur de la probabilité qui définit le domaine de validité est $\Phi\left(n^{\frac{1}{4}}\right)$.

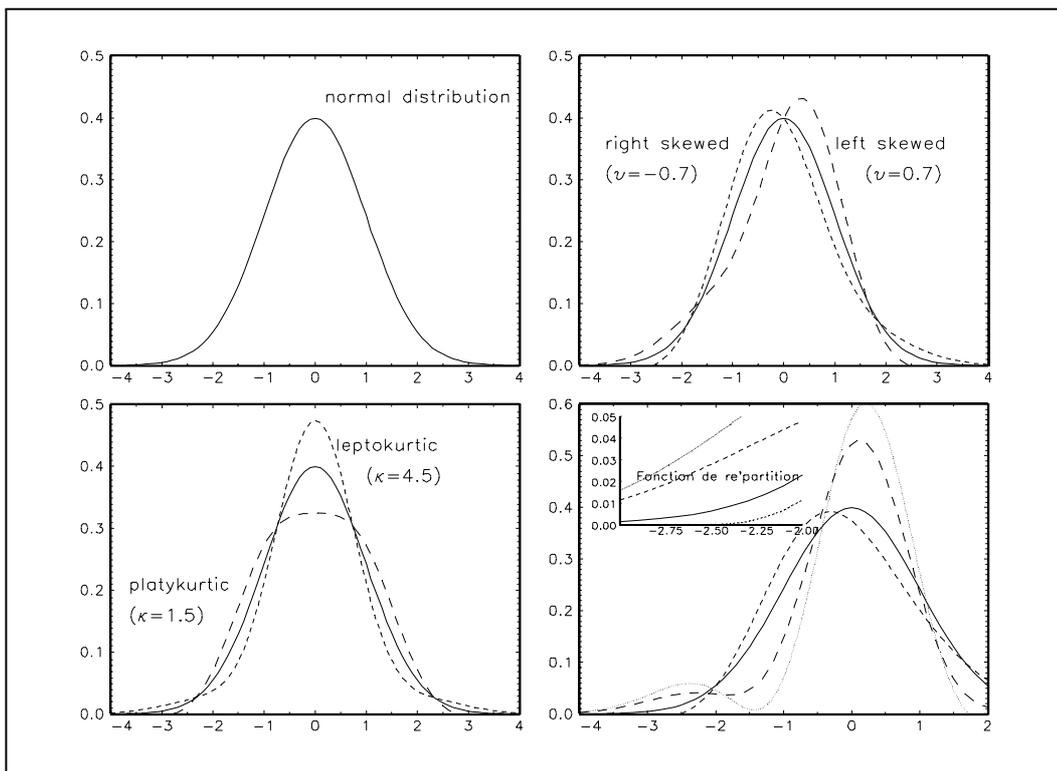


FIG. 2:

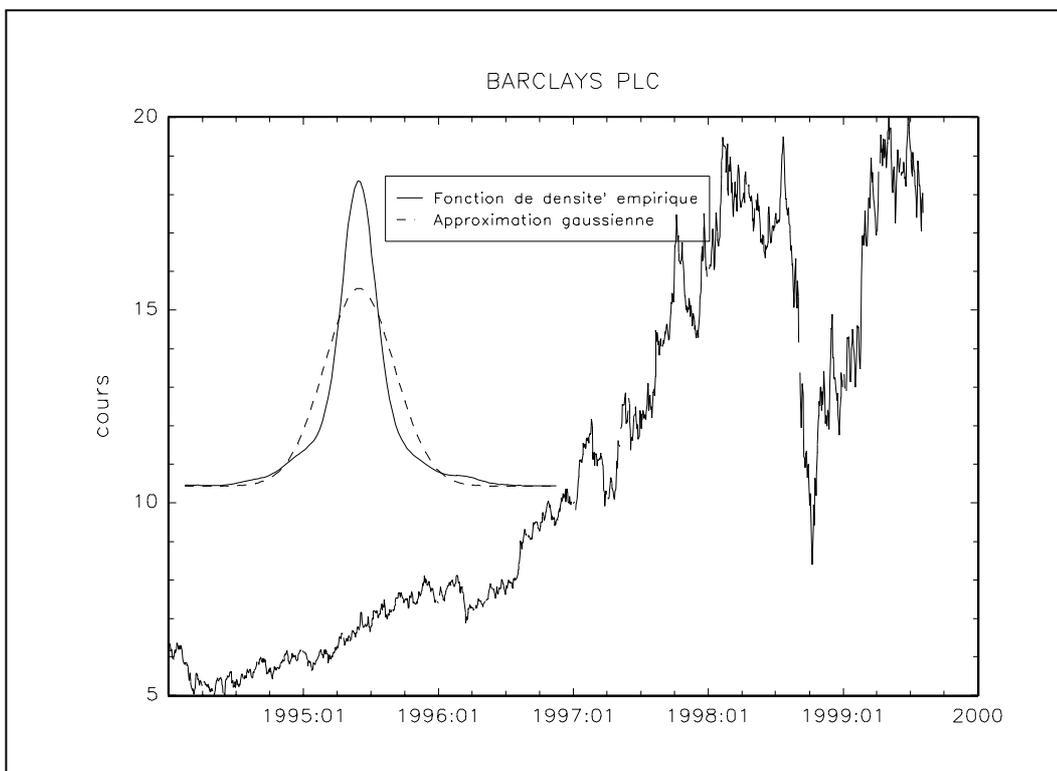


FIG. 3:

de densité, alors que la kurtosis κ (ou moment centré d'ordre 4) est une mesure d'aplatissement. Nous avons

$$\begin{aligned}\varsigma &= \frac{\mathbb{E}\left((X - \mu)^3\right)}{\sigma^3} \\ \kappa &= \frac{\mathbb{E}\left((X - \mu)^4\right)}{\sigma^4}\end{aligned}$$

Pour la loi normale, ς et κ valent respectivement 0 et 3. Si $\varsigma < 0$ (resp. $\varsigma > 0$), on dit que la distribution est asymétrique à droite (resp. à gauche). Lorsque κ est supérieur à 3, la distribution présente des queues épaisses (elle est leptokurtique). Le graphique (2) présente différentes fonctions de densité⁴. Lorsque les distributions présentent des queues de distribution épaisses, le quantile α est alors bien au delà (en valeur absolue) du quantile gaussien correspondant. Prenons par exemple la figure en bas à gauche. Celle-ci contient le graphe des fonctions de répartition pour le segment $x \in [-3, -2]$. Pour la loi gaussienne, nous vérifions bien que le quantile à 1% est -2.33 . Or pour cette valeur, la quatrième distribution présente une valeur de 5% pour la fonction de répartition. Le quantile à 1% est en fait bien au-delà de -2.33 . Le graphique (3) correspond à l'évolution du cours du titre Barclays depuis 1994. Nous avons estimé la fonction de densité des variations du cours et comparé celle-ci avec la fonction de densité gaussienne estimée par la méthode des moments. L'estimation classique basée sur les deux premiers moments ne permet donc pas de prendre en compte les queues épaisses.

L'évolution du titre Barclays nous interpelle sur le problème de la stationnarité du processus. Nous pouvons penser qu'une approximation gaussienne ne peut être valide que localement. Cela pose alors le problème de la longueur de l'historique utilisé pour la *VaR* paramétrique. Les instances réglementaires exigent un historique d'au moins 1 an. **Contrairement à l'idée fort répandue que plus l'historique est long, meilleure sera la mesure des risques, nous pensons que l'utilisation d'un historique trop long peut avoir des conséquences néfastes sur la *VaR* paramétrique.** Car, dans ce cas là, il est parfaitement clair que les propriétés d'ergodicité et de stationnarité ne sont pas respectées.

L'utilisation de la loi normale pour la *VaR* paramétrique n'en demeure pas moins incontournable. Une manière éventuelle de se ramener à des rendements gaussiens a été proposé par GEMAN H., D. MADAN et M. YOR [1998]. Leur approche repose sur une échelle de temps aléatoire appelé *business-time* sous laquelle les actifs suivent une diffusion log-normale. Leurs travaux sont résumés et présentés en Annexe ???. Dans tous les cas, que l'approximation par la loi normale nécessite un traitement particulier ou non, il convient d'apporter une attention particulière à l'estimation de la matrice de covariance.

⁴Nous avons généré celles-ci en utilisant la fonction de densité d'Edgeworth (RUBINSTEIN [1998]) :

$$f(x) = b(x) \left[1 + \frac{v}{6} (x^3 - 3x) + \frac{\kappa - 3}{24} (x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{v^2}{72} (x^5 - 10x^3 + 15x) \right]$$

avec b la fonction de densité Binomiale.

3.2 L'estimation de la matrice de covariance

3.2.1 Introduction

Nous notons $\mathbf{F}(t_0; N)$ la matrice des facteurs observés pour $t = t_0 - 1, \dots, t_0 - N$ avec

$$\mathbf{F}(t_0; N) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(t_0 - 1)^\top \\ \vdots \\ \mathbf{F}(t_0 - n)^\top \\ \vdots \\ \mathbf{F}(t_0 - N)^\top \end{bmatrix} \quad (10)$$

Considérons une matrice diagonale Λ de dimension $N \times N$ avec $\mathbf{1}^\top \text{diag}(\Lambda) = 1$. Λ est appelée la matrice des poids des observations. Nous définissons $\hat{\mu}$ et $\hat{\Sigma}$ par

$$\hat{\mu} = \mathbf{F}(t_0; N)^\top \Lambda \mathbf{1} \quad (11)$$

et

$$\hat{\Sigma} = \left(\mathbf{F}(t_0; N) - \mathbf{1} \odot \hat{\mu}^\top \right)^\top \Lambda \left(\mathbf{F}(t_0; N) - \mathbf{1} \odot \hat{\mu}^\top \right) \quad (12)$$

$\hat{\mu}$ et $\hat{\Sigma}$ sont deux estimateurs des paramètres μ et Σ de la loi de distribution $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.

Dans le cadre d'une *VaR*, nous utilisons généralement deux types de poids :

1. L'approche standard consiste à donner le même poids à chacune des observations. Dans ce cas, nous avons $\Lambda_{n,n} = \lambda_n = \frac{1}{N}$.
2. L'approche moyenne mobile consiste à donner des poids différents en fonction des positions des observations. Plus la date d'observation est récente, plus le poids associé est important. Sous l'impulsion de RiskMetrics, la méthode de la moyenne mobile exponentielle s'est imposée. Dans ce cas, nous avons $\lambda_n = (1 - \lambda) \lambda^{n-1} / (1 - \lambda^N)$.

Le graphique (4) représente la fonction λ_n pour N égal à 250 jours. Nous constatons que plus la valeur de λ est petite pour les poids exponentiels, plus les observations récentes ont de l'influence sur l'estimation. Nous remarquons aussi que les poids constants sont un cas particulier des poids exponentiels puisque

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} (1 - \lambda) \lambda^{n-1} / (1 - \lambda^N) = \frac{1}{N}$$

Nous pouvons aussi nous intéresser à la contribution des n premières observations, c'est-à-dire à la somme $\sum_{i=1}^n \lambda_n$. Sur le graphique (5), nous voyons parfaitement le caractère exponentiel de la méthode RiskMetrics. Ainsi, pour $\lambda = 0.94$ (valeur retenue par RiskMetrics), 50% des poids concernent les 12 premières observations⁵.

⁵A titre complémentaire, 75% et 95% des poids correspondent aux 23 et 49 premières observations.

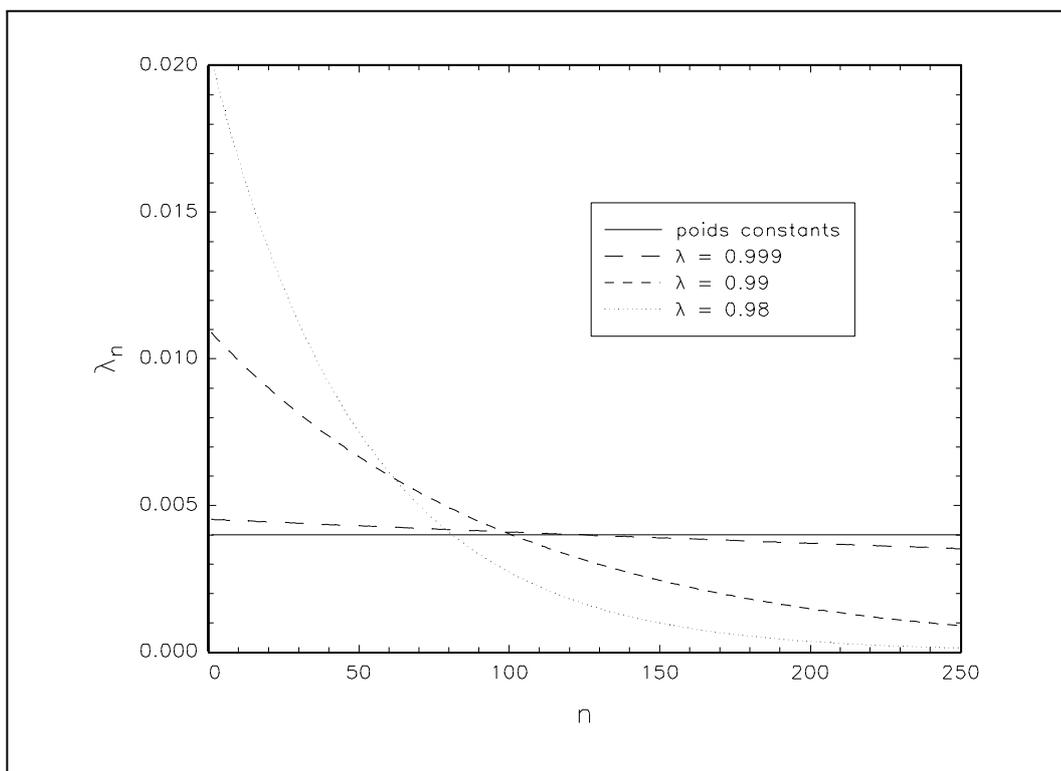


FIG. 4:

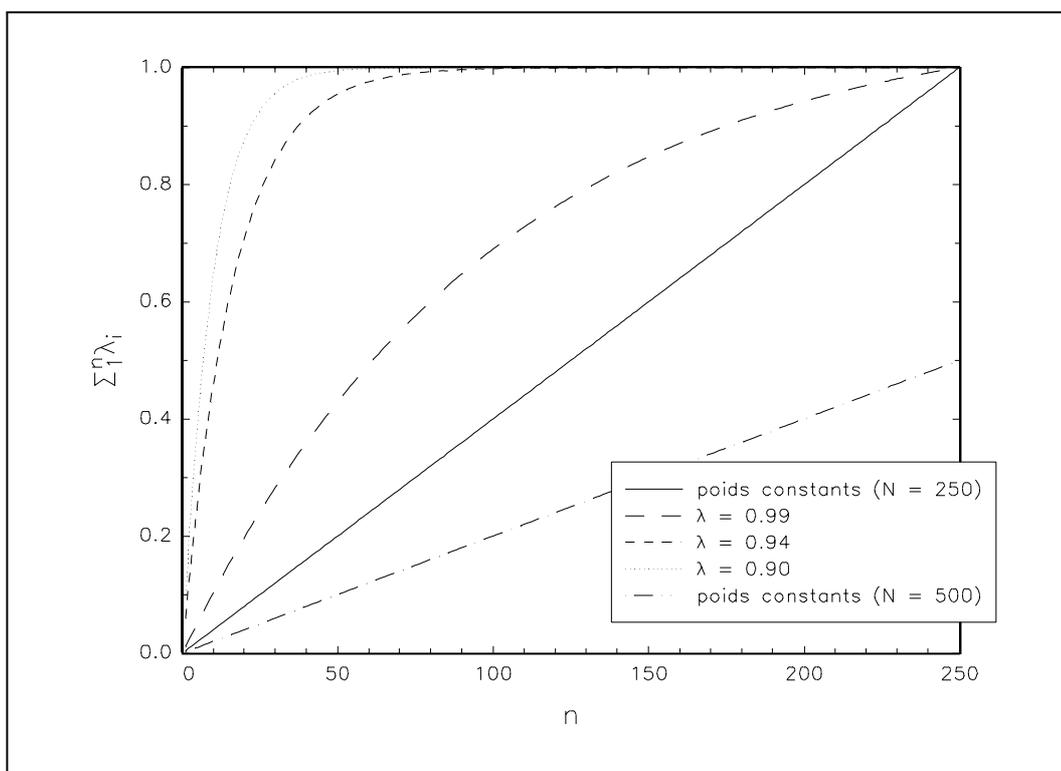


FIG. 5:

3.2.2 Un exercice de backtesting

Ce paragraphe s'attache à déterminer la manière optimale de calculer la matrice de covariance. Notre approche se base sur le calcul du nombre d'exceptions observées sur un historique des cours d'établissements financiers depuis 1994.

Nous nous plaçons dans le cadre d'une *VaR* analytique sous l'hypothèse de rendements gaussiens. Nous sommes donc en mesure de déterminer un intervalle de confiance à une certaine probabilité à partir des deux premiers moments. Nous comparons ici de manière qualitative la validité de ces intervalles de confiance selon la méthode choisie pour l'estimation des deux premiers moments. Les résultats qui suivent permettent de visualiser de manière dynamique les caractéristiques sur la *VaR* associées à ces méthodes.

Les estimateurs retenus pour le calcul des rendements moyens et des volatilités sont les méthodes de poids constants et de poids exponentiels ($\lambda = 0.94$). L'enjeu inhérent au choix de la méthode d'estimation de ces paramètres est capital ; il s'agit d'obtenir une réactivité optimale aux variations du marché, tout en conservant une inertie suffisante pour ne pas trop sur ou sous-estimer les variations possibles. A priori, une méthode reposant sur des poids constants accusera un petit peu de retard pour réhausser son niveau dans une période à forte volatilité. De même, la méthode reposant sur des poids exponentiels risque de largement sur-estimer la *VaR* après une courte période d'agitation.

Afin d'illustrer ce phénomène, nous proposons par la suite d'étudier le nombre d'exceptions observées sur le cours de certains établissements financiers par période. Une exception est définie comme une valeur du titre en dehors de l'intervalle de confiance prévu. Nous considérons les cas de positions longues et courtes sur un titre, ce qui nous amène à définir des bornes supérieures et inférieures de notre intervalle. Nous nous sommes attachés à respecter les critères quantitatifs de la Commission Bancaire pour le calcul de la *VaR*. Ainsi avons nous retenu un niveau de confiance de 1% sur une période de détention de 1 jour. De même, l'estimation des moments des distributions des rendements quotidiens ont été calculés sur un historique d'un an renouvelé tous les trois mois. Tout ceci nous a permis de déterminer les séries des deux bornes L^u et L^d de notre intervalle pour les rendements journaliers :

$$\begin{aligned}L_t^u &= \mu_t - \Phi^{-1}(0.5\%) \times \sigma_t \\L_t^d &= \mu_t + \Phi^{-1}(0.5\%) \times \sigma_t\end{aligned}$$

où $\Phi^{-1}(0.5\%)$ est le quantile à 0.5% de la loi normale centrée réduite ($\Phi^{-1}(0.5\%) \simeq 2.575$). μ_t et σ_t sont respectivement la moyenne et l'écart-type estimés du rendement à l'instant t .

Nous sommes alors en mesure de déterminer les valeurs *up* et *down* du cours à 1 jour avec un intervalle de confiance de 99%. Nous comptons alors le nombre de fois où le titre est sorti de cet intervalle sur chaque période de 3 mois (environ 60 jours). Les graphiques suivants représentent les mouvements des titres des grands établissements financiers par rapport aux intervalles calculés avec les poids constants et exponentiels, ainsi que le nombre d'exceptions constatés au cours des périodes. Ceci nous donne une bonne idée des avantages et inconvénients des deux méthodes d'estimation des moments. En fait, l'exemple de la Société Générale est particulièrement intéressant, puisqu'il comporte une longue période de stagnation pendant laquelle les deux méthodes sont équivalentes et performantes. Aux premiers chocs, la méthode aux poids constants réagit trop tard et accuse 3 et 5 exceptions sur 60 observations (périodes 9 et 10),

alors que la méthode aux poids exponentiels encaisse très bien le choc. De même, lors de la crise de l'été 1998 (période 16), la méthode aux poids constants réagit beaucoup trop tard et ne passe pas le backtesting. D'un autre côté les légères périodes de flottements suivies de brusques variations mettent en défaut les poids exponentiels (périodes 11 et 18). Du fait d'une période, même courte, relativement calme, la volatilité calculée à partir des poids exponentiels a trop vite chuté et sous-estime les variations possibles du cours. Enfin, nous devons mentionner le cas de la période 6 qui correspond à une période de stabilité exceptionnelle, ce qui entraîne une variance pour la période 7 quasi nulle lorsque celle-ci est calculée avec la méthode des poids exponentiels. Cela explique le nombre d'exceptions relativement élevé de la *VaR* RiskMetrics sur cette période relativement calme.

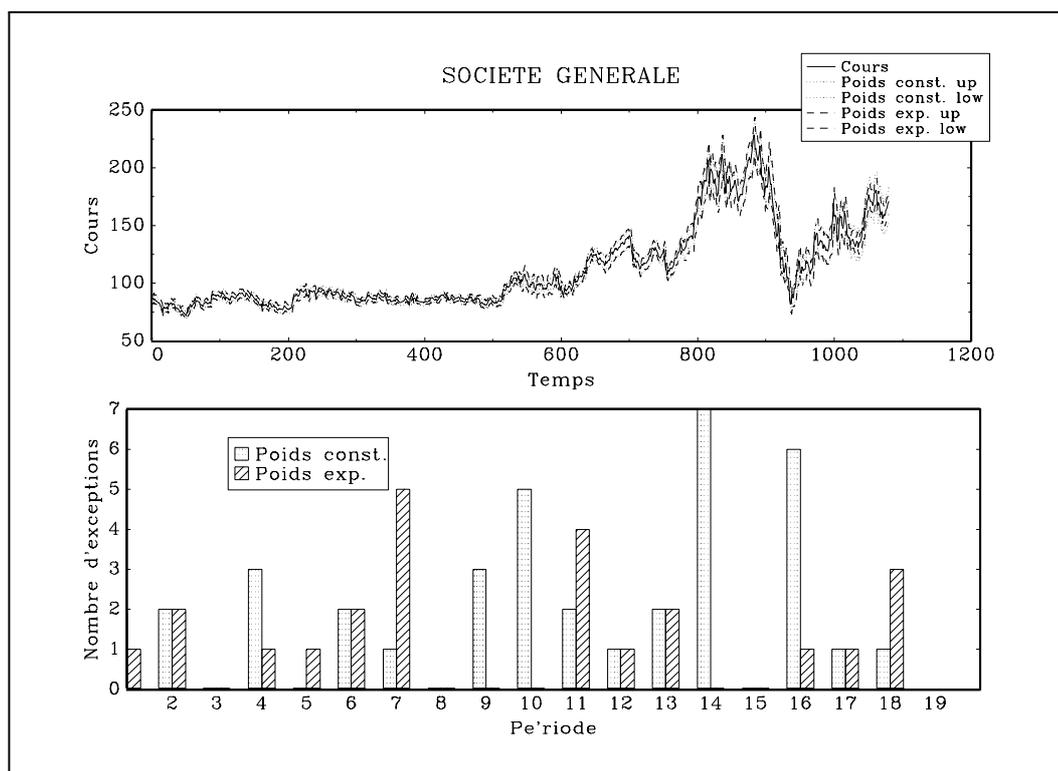


FIG. 6:

L'exemple de la Société Générale illustre la nécessité et la difficulté d'obtenir à la fois de la réactivité lors de périodes d'agitations et de l'inertie pour les fausses périodes de calme. RiskMetrics nous recommande de prendre $\lambda = 0.94$. Ceci implique que 95% de l'information est contenue dans les trois derniers mois. Outre le fait que cela pose quelques problèmes pour l'estimation des matrices de covariance de dimension trop grande, on peut s'interroger sur la mémoire de tels processus. En effet, même si les toutes dernières informations contribuent énormément à la détermination du moment, signe de réactivité forte, les informations de plus de trois mois ne jouent plus aucun rôle, signe de faible inertie.

Les résultats qui suivent traitent donc de l'influence de λ sur la qualité de la *VaR* analytique. Nous avons fait varier λ de 0.9 à 0.999, et nous avons comparé le nombre d'exceptions observées sur les périodes de trois mois suivant l'estimation des moments. Sans pour autant que ce résultat puisse être généralisé, l'étude des séries des cours sur les établissements financiers pousse à choisir

un coefficient λ favorisant une mémoire plus longue, c'est-à-dire une inertie plus importante. Il semble, de manière qualitative, que la valeur optimale de ce coefficient dans ce cas là soit de l'ordre de 0.96.

Nous notons, toutefois, que la valeur optimale de λ est susceptible de varier selon les marchés⁶. Aussi, le coefficient obtenu ne peut être adapté pour l'ensemble des séries financières. Nous conseillons plutôt une étude du marché à considérer au préalable, qui permettrait de déterminer le λ optimal.

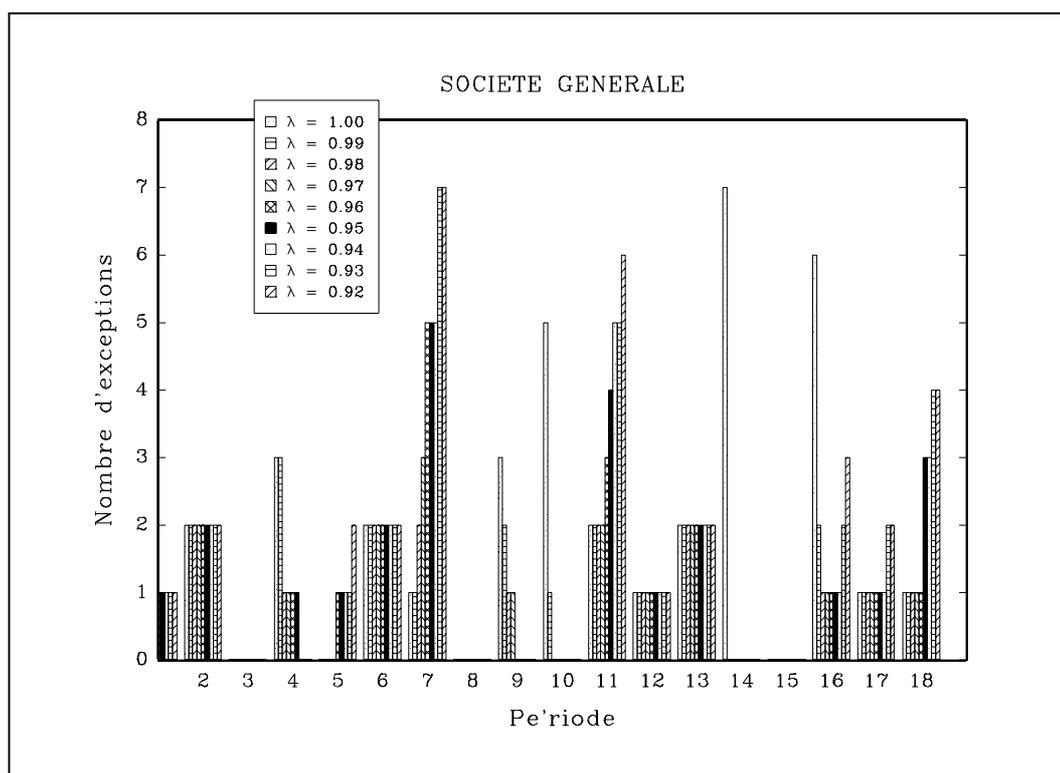


FIG. 7:

3.3 Une réflexion sur les *VaRs* réelle et estimée

La Value-at-Risk analytique proposée par RiskMetrics connaît un véritable succès; ce succès provient en partie de sa simplicité à être implémentée. En effet, dès lors qu'on suppose la normalité des distributions des rendements des actifs traités, la difficulté ne réside plus que dans l'estimation de la matrice de covariance de ces actifs. Une formule analytique, basée sur les quantiles de la loi normale centrée réduite, nous renseigne alors sur le risque global du portefeuille.

⁶Cette étude a déjà été menée par RiskMetrics, et met en évidence des différences notables de λ selon les marchés (places financières et produits) et la période de détention. $\lambda = 0.94$ est une valeur *moyenne* basée sur un critère de moindres carrés de la variance quotidienne des rendements. Dans le cadre de la *VaR*, nous pensons que ce critère n'est pas le plus approprié et qu'il est préférable de considérer un critère de minimisation du nombre d'exceptions.

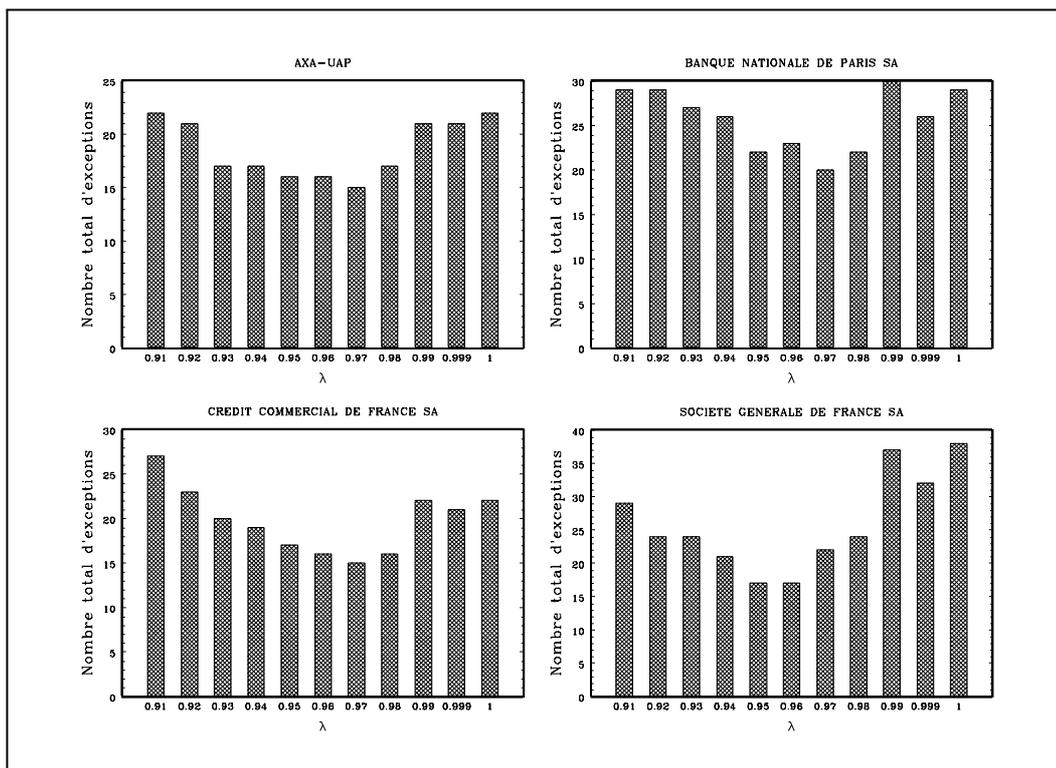


FIG. 8:

Un problème peu abordé dans la littérature est l'influence de la précision de la matrice de covariance sur celle de la VaR obtenue. Or la qualité de l'estimation $\widehat{\Sigma}$ de la matrice de covariance Σ est essentiellement fonction du nombre d'observations de l'historique N et du nombre d'actifs traités dans un portefeuille donné K . Si on suppose Σ constant, il semble évident que $\widehat{\Sigma}$ sera un meilleur estimateur de Σ , lorsque N devient grand et K petit. Intuitivement, on devine que la VaR obtenue sera alors une meilleure mesure des risques encourus.

Considérons le cas extrême où $K > N$. La matrice $\widehat{\Sigma}$ est alors singulière⁷, alors que Σ ne l'est pas. Ceci implique qu'il existe des portefeuilles risqués dans la réalité ayant une VaR estimée nulle. Cet exemple illustre l'importance pour une cellule de contrôle des risques de connaître l'erreur résiduelle après estimation de la VaR . Notre démarche s'attachera donc à mesurer de manière quantitative la qualité de la VaR calculée. Plus précisément, nous étudierons les deux cas suivants :

- Le portefeuille maximise le risque réel sous les contraintes de risque internes.
- Le portefeuille maximise le rendement sous les contraintes de risque internes.

⁷ $\widehat{\Sigma}$ est de la forme

$$\widehat{\Sigma} = \frac{1}{N} X^T \cdot X$$

où X est une matrice de dimension $N \times K$. On en déduit que :

$$\text{rang}(\widehat{\Sigma}) \leq N < K$$

alors que la matrice est de dimension K .

Nous étudierons dans les deux cas le pourcentage de la *VaR* réelle expliqué par la *VaR* estimée. La démarche théorique présentée par la suite s'inspire essentiellement des travaux de JU et PEARSON [1998] et reprend leur étude en considérant un cadre plus large. En particulier, les auteurs imposent aux portefeuilles une contrainte indépendante des montants gérés et supposent des variations des prix gaussiennes. Nous avons tenté de prolonger ces résultats en appliquant une contrainte supplémentaire à une *VaR* sous rendements gaussiens.

3.3.1 Notations- *VaR* estimée - *VaR* réelle

3.3.1.1 Notations Nous considérons un trader qui traite sur K actifs indicés par k , dont les prix à une date t sont notés p_t^k . Nous supposons que les rendements

$$r_t^k = \frac{p_t^k - p_{t-1}^k}{p_{t-1}^k} \quad (13)$$

suivent une loi normale multivariée. Ainsi, on définit R_t le vecteur aléatoire $K \times 1$ de composantes r_t^k de moyenne μ et de matrice de variance-covariance Σ .

On représente un portefeuille par un vecteur ω_t à K dimensions correspondant aux sommes investies dans chacun des titres k . La valeur du portefeuille sera noté P_t avec :

$$P_t = \sum_{k=1}^K w_t^k \times p_t^k \quad (14)$$

On peut également s'intéresser au rendement global du portefeuille ω géré par le trader. On est alors amené à introduire le vecteur α à K composantes, représentant la part du portefeuille investi dans le titre k . Plus formellement on a :

$$\alpha_t^k = \frac{w_t^k \times p_t^k}{\sum_{k=1}^K w_t^k \times p_t^k} \quad (15)$$

Si ω reste constant entre chaque période $t - 1$ et t , le rendement global du portefeuille s'écrit alors de manière simple :

$$X_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \sum_{k=1}^K \alpha_t^k \times r_t^k \quad (16)$$

3.3.1.2 Value-at-Risk réelle La dernière expression obtenue rend compte du caractère gaussien du rendement du portefeuille. Or, la *VaR* est une mesure du risque à une certaine probabilité de la valeur du portefeuille. Il revient au même d'étudier le rendement et on définira alors la *VaR* à $x\%$ comme le quantile à $x\%$ de la distribution du rendement, c'est à dire

$$\mathbf{P}(X_t < VaR_x) = x \quad (17)$$

L'un des intérêts principaux du cas gaussien réside dans le fait que toute la distribution de X est déterminée par ses deux premiers moments. On peut alors déduire la VaR d'un portefeuille à partir du quantile $x\%$ de la loi normale centrée réduite. Nous supposons par la suite que le premier moment de X_t est nul, quitte à considérer une variable translatée de μ . On obtient alors, pour un portefeuille entièrement déterminé par α :

$$VaR_x = k_x \sqrt{\alpha^\top \Sigma \alpha} \quad (18)$$

où α^\top est la transposée de α et k est le quantile $x\%$ de la loi normale centrée réduite. Par exemple, pour $x = 1\%$, on a $k_{1\%} = -2.326$.

3.3.1.3 Value-at-Risk estimée La contrainte imposée au trader sur son portefeuille nécessite d'estimer la matrice de variance-covariance du marché. L'estimateur obtenu permet alors de calculer une VaR estimée qui est celle que le trader devra respecter :

$$\widehat{VaR}_x = k_x \sqrt{\alpha^\top \widehat{\Sigma} \alpha} \quad (19)$$

Il apparaît clairement que selon l'estimation de Σ , la VaR calculée peut sur ou sous-estimer les véritables risques à couvrir. Nous retiendrons par la suite $\widehat{\Sigma}$ de la forme

$$\widehat{\Sigma} = \sum_{t=1}^N \lambda_t R_t R_t^\top \quad (20)$$

les λ_t étant des poids associés aux observations selon leur récence et tels que

$$\sum_{t=1}^N \lambda_t = 1 \quad (21)$$

Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas $\lambda_t = \frac{1}{N}$ et au cas $\lambda_t = (1 - \lambda) \lambda^t$ avec $\lambda < 1$ et N suffisamment grand pour que la somme jusqu'à N soit proche de la somme infinie. Dans ce dernier cas, nous suivrons les conseils de J.P. Morgan dans leur méthodologie RiskMetricsTM [73] et choisirons $\lambda = 0.94$.

Du fait des contraintes imposées qu'il a pu observer pendant une certaine période ou tout simplement de l'historique des cours qui lui sont accessibles, un trader peut deviner ou du moins avoir une bonne approximation de l'estimateur de la matrice de variance-covariance utilisée par le contrôle des risques. Ce trader peut alors choisir de maximiser son risque ou son rendement, connaissant Σ , tout en satisfaisant aux conditions imposées par $\widehat{\Sigma}$. La démarche choisie dans les parties à suivre tentera donc de mesurer le biais maximum que peut obtenir un trader dans chacun des deux scénarii considérés.

3.3.2 Calcul du biais maximum

Nous considérons ici le pire scénario, du point de vue de la cellule de contrôle des risques. Nous cherchons le portefeuille qui prenne le plus de risque réel, tout en respectant les contraintes internes évaluées par $\widehat{\Sigma}$. Autrement dit, nous imaginons qu'un trader connaisse la véritable matrice de variance-covariance⁸ et profite de cette information pour prendre le plus de risque possible. Cette situation se ramène à un programme de maximisation sous contraintes.

⁸Il semble du moins raisonnable de penser qu'un trader possède d'avantage d'information sur certaines corrélations entre les titres. On peut alors légitimement lui accorder une meilleure approximation de Σ .

3.3.2.1 Calcul théorique Nous cherchons ici à maximiser la variance réelle sur un ensemble de répartition du portefeuille vérifiant une variance estimée mesurée. Plus formellement, nous cherchons

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} \quad & (\alpha^\top \Sigma \alpha) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \alpha^\top \widehat{\Sigma} \alpha \leq c \\ \sum_{i=1}^K \alpha_i = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

Nous noterons α^* , la solution de ce programme et φ_1 et φ_2 les coefficients de Lagrange associés aux contraintes. Les conditions du premier ordre donnent :

$$\begin{cases} \Sigma \alpha^* - \varphi_1 \widehat{\Sigma} \alpha^* - \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{1} = 0 \\ \alpha^{*\top} \widehat{\Sigma} \alpha^* \leq c \\ \sum_{i=1}^K \alpha_i^* = 1 \end{cases} \quad (23)$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur à K dimensions composé de 1. En multipliant la première expression par $\alpha^{*\top}$ à gauche dans un cas et par Σ^{-1} dans l'autre cas, ces dernières conditions impliquent de plus :

$$\begin{cases} \alpha^{*\top} \Sigma \alpha^* = \varphi_1 c + \frac{\varphi_2}{2} \\ \Sigma^{-1} \widehat{\Sigma} \alpha^* = \frac{1}{\varphi_1} \alpha^* - \frac{\varphi_2}{2\varphi_1} \Sigma^{-1} \mathbf{1} \end{cases} \quad (24)$$

La première des deux équations nous renseignent sur la variance réelle du portefeuille le plus risqué. Nous pouvons la comparer à la variance estimée maximale imposée par le contrôle des risques, en l'occurrence c . La difficulté de la tâche réside désormais dans la détermination la moins coûteuse des coefficients de Lagrange.

3.3.2.2 Hypothèse d'approximation Les expressions obtenues sont peu commodes d'utilisation et les simulations qu'elles engendrent dépendent de nombreux paramètres (matrice Σ , coefficient c). Le temps de calcul que requiert l'étude complète de ce problème devient alors très grand. Pour remédier à ceci, Xiogwei Ju et Neil D. Pearson [80] suppriment une contrainte. Le problème possède alors une solution analytique et se ramène à un calcul de valeurs propres de matrices à simuler. Leur approche revient à fixer une contrainte de risque indépendante du niveau des montants gérés. Nous imposons au portefeuille de ne pas avoir une *VaR* estimée supérieure à un seuil absolu, et nous cherchons à maximiser le risque réel du portefeuille, dont la valeur n'est pas fixée et s'adapte en fonction de c , Σ et $\widehat{\Sigma}$. D'un point de vue mathématique, nous reprenons les expressions obtenues en (23) et en (24) dans lesquelles nous supposons que $\frac{\varphi_2}{2}$ est négligeable devant tous les autres termes. Ceci revient à supposer que la deuxième contrainte intervient peu dans le lagrangien, et que la variance maximale obtenue sans tenir compte de cette contrainte (i.e. juste astreinte à l'ellipsoïde $\alpha^\top \widehat{\Sigma} \alpha \leq c$) est peu éloignée de celle obtenue en se restreignant également à l'hyperplan $\alpha^\top \mathbf{1} = 1$.

Cette approximation permet d'identifier plus facilement φ_1 et d'avoir à faire des simulations nécessitant moins de temps de calcul. En effet, les conditions (24) se résument à

$$\begin{cases} \alpha^{*\top} \Sigma \alpha^* = \varphi_1 c \\ \Sigma^{-1} \widehat{\Sigma} \alpha^* = \frac{1}{\varphi_1} \alpha^* \end{cases} \quad (25)$$

La deuxième expression souligne le fait que α^* est vecteur propre de $\Sigma^{-1}\widehat{\Sigma}$, et surtout que $\frac{1}{\varphi_1}$ est valeur propre de la même matrice. La recherche de la plus grande variance réelle revient alors au calcul de la plus petite valeur propre d'une matrice estimée. Le choix de la plus petite parmi les valeurs propres satisfait aux conditions du second ordre du problème de maximisation sous contraintes.

L'une des conséquences importantes de cette hypothèse permet d'avoir à simuler des tirages de matrices estimées qui ne tiennent pas compte de la véritable matrice de variance-covariance Σ . En fait, le calcul des valeurs propres de $\Sigma^{-1}\widehat{\Sigma}$ ne nécessite pas de connaître Σ . Cela vient du fait que nous estimons

$$\widehat{\Sigma} = \sum_{t=1}^N \lambda_t R_t R_t^\top \quad (26)$$

avec R_t qui suit une loi normale multivariée centrée de matrice de variance covariance Σ . Nous pouvons donc écrire $\widehat{\Sigma}$ de la manière suivante

$$\widehat{\Sigma} = \Sigma^{1/2} \left(\sum_{t=1}^N \lambda_t z_t * z_t^\top \right) \Sigma^{1/2} \quad (27)$$

où z_t suit une loi normale multivariée centrée réduite indépendante des autres z_u . Nous notons $I(\widehat{K}, \widehat{N})$ la matrice aléatoire qui ne dépend que de K et N définie par

$$I(\widehat{K}, \widehat{N}) = \sum_{t=1}^N \lambda_t z_t * z_t^\top \quad (28)$$

La matrice $\Sigma^{-1}\widehat{\Sigma}$ s'écrit donc $\Sigma^{-1/2} I(\widehat{K}, \widehat{N}) \Sigma^{1/2}$, et on en déduit que

$$\text{Sp}(\Sigma^{-1}\widehat{\Sigma}) = \text{Sp}(I(\widehat{K}, \widehat{N})) \quad (29)$$

En particulier la plus petite valeur propre de $\Sigma^{-1}\widehat{\Sigma}$ est la plus petite valeur propre de $I(\widehat{K}, \widehat{N})$.

3.3.2.3 Simulations

Simulations sous approximation Nous faisons varier K de 10 à 100 titres avec un pas de 10, et N de 100 à 500 observations et un pas de 50. Dans chacune des configurations nous réalisons 5000 simulations de matrices de covariance estimée (i.e de tirages de matrice $I(\widehat{K}, \widehat{N})$). Pour ces matrices simulées, nous calculons la plus petite valeur propre.

Ce travail nous permet d'étudier la distribution de la part de la Value-at-Risk réelle couverte par la Value-at-Risk estimée. En effet, Nous avons

$$\frac{\widehat{VaR}_x}{VaR_x} = \frac{k_x \sqrt{\alpha^{*\top} \widehat{\Sigma} \alpha^*}}{k_x \sqrt{\alpha^{*\top} \Sigma \alpha^*}} = \sqrt{\varphi_1} \quad (30)$$

L'influence croisée de K et N sur la moyenne et l'écart-type de ce ratio se déduit des deux graphes suivants. Pour une lecture plus précise des valeurs de la surface, les tables relatives à ces graphiques sont présentées en annexe B.

Dans le cas où les observations pèsent tous le même poids, l'influence de N est évidente. Du fait que nous considérons la matrice Σ à estimer constante sur notre échantillon, il est clair qu'un historique plus long permet de réduire les erreurs d'estimations des différentes covariances à calculer. Ainsi, à K fixé, on peut lire le nombre d'observations $N(K)$ nécessaires pour minimiser à un certain seuil les risques non couverts par la VaR . Une autre façon de lire ces informations est de considérer le ratio $\frac{VaR\ estimée}{VaR\ réelle}$ comme l'inverse du coefficient qu'il faut appliquer à la VaR estimée pour obtenir la véritable VaR .

Graphiquement, on remarque une convergence très faible du ratio vers 1 avec tout de même une forte pente positive pour des petits N . De plus, la surface de l'écart-type de ce ratio devient très vite relativement stable autour de petites valeurs. Le rapport écart-type/moyenne est alors de l'ordre de 3×10^{-2} . Ceci tend vers la détermination d'un N optimal, pas trop coûteux, avec une erreur d'estimation mesurée et une connaissance de cette erreur assez sûre.

Les conseils de RiskMetricsTM[73] incitent à assigner des poids aux observations. Cette manoeuvre permet de rendre compte du côté dynamique de la véritable matrice de variance-covariance. En accordant d'avantage d'importance aux informations les plus récentes, on réduit l'inertie due à un historique trop long. La contrepartie d'une telle approche est la perte significative d'observations apportant de l'information. En effet, si on considère des poids de la forme $\lambda_t = (1 - \lambda) \lambda^t$ on peut se faire une idée très précise de l'inertie significative en fonction de λ ; les T dernières observations comptant pour $(1 - \lambda^T)$ de l'ensemble des poids. Autrement dit, pour $\lambda = 0.94$, 95% de l'information retenue se trouve dans les 45 dernières observations et 99% dans les 75 dernières. On devine alors que dans un tel modèle l'influence de N se fera beaucoup moins sentir. Ce phénomène se traduit effectivement par l'obtention de courbes relativement plates du ratio $\frac{VaR\ estimée}{VaR\ réelle}$ à K fixé. Rien ne sert de se procurer un historique long pour calculer les matrices de covariance. On remarque de plus, que l'erreur commise est beaucoup plus importante. Pour $K = 20$ la VaR estimée doit être multipliée par 3 pour mesurer le risque maximal.

Test de l'hypothèse Les résultats précédents ne doivent être considérés que sur un ensemble où la contrainte supprimée intervient peu. Pour illustrer la validité de cette hypothèse, nous avons effectué quelques simulations de matrice de covariance. Pour chacune de ces simulations, nous résolvons le programme d'optimisation sous contraintes (22). Nous récupérons ainsi les coefficients de Lagrange φ_1 et φ_2 associés à ces contraintes. Nous sommes alors en mesure de comparer les différents termes présents dans les expressions (23) et (24).

Compte tenu du coût en temps de calcul de telles simulations et de l'optimisation à effectuer, nous nous sommes restreints à tester cette hypothèse pour des faibles valeurs de K . En effet, dans le cadre d'un agent traitant sur une seule courbe de taux, les méthodologies en place actuellement relèvent une quinzaine de facteurs de risque. Nous nous sommes placés dans ce cadre. A partir d'une matrice de variance fictive Σ de dimension 15×15 , et de 1000 simulations de matrice $\widehat{\Sigma}$ estimant Σ , nous tentons de mesurer l'impact de la deuxième contrainte dans la solution du programme d'optimisation. Il reste à noter que l'algorithme permettant de résoudre chaque programme (relatif à chaque $\widehat{\Sigma}$) n'aboutit pas systématiquement⁹ et peut être source d'un léger biais. Toutefois, ce biais ne semble pas modifier l'ordre de grandeur des coefficients de Lagrange.

$K = 15$	$c \times \varphi_1$	$\left \frac{\varphi_2}{2} \right $	$\ \alpha^*\ $	$\left\ \frac{\varphi_2}{2} \Sigma^{-1} \mathbf{1} \right\ $
Moyenne	3.24×10^{-2}	8.5×10^{-4}	0.54	0.8
Ecart-type	5.5×10^{-3}	6.4×10^{-4}	0.03	0.3

La comparaison des différents termes présents dans (23) et (24) nous laisse supposer que φ_2 joue un rôle suffisant pour ne pas être négligé. Pour $K = 15$, même si $\left| \frac{\varphi_2}{2} \right|$ peut être considéré comme négligeable devant $c \times \overline{\varphi_1}$, il est clair que $\left| \frac{\varphi_2 \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{2} \right|$ ne l'est pas devant $|\alpha^*|$. Par conséquent φ_1 n'est plus une valeur propre de $I(\widehat{K}, \widehat{N})$ et les résultats qui en découlent sont faussés.

Remarquons, que l'approximation effectuée revient à réduire d'une dimension l'espace admissible des solutions. Intuitivement, on aurait donc tendance à penser que plus K devient grand et

⁹Dans le cas où cet algorithme ne converge pas suffisamment vite, nous avons tout de même conservé les valeurs prises par les différents coefficients lors de la dernière itération.

moins la contrainte associée à φ_2 intervient. Autrement dit, la contrainte relative est plus faible avec K . Cet argument plutôt spéculatif demande toutefois à être testé empiriquement.

3.3.3 Application à un portefeuille optimisé

La partie précédente considère le pire cas du point de vue de la cellule des risques. Que ce soit dû au hasard ou à la volonté d'un trader bien informé, nous calculons l'erreur de mesure de la *VaR* du portefeuille le plus risqué dans la réalité, compte tenu des contraintes internes imposées. Cette approche peut sembler peu réaliste et discutable quant aux hypothèses qu'elle nécessite. Comme alternative à cette approche, nous proposons d'étudier dans cette partie le cas d'un trader souhaitant, non pas prendre le plus de risque permis, mais chercher le rendement espéré le plus élevé. Ceci semble plus conforme avec le comportement réel d'un agent dont les rémunérations sont convexes avec ses résultats. Nous montrons, que dans ce cas, l'erreur de mesure de la *VaR* estimée ne dépend là encore que de N et de K . Ce résultat ne nécessite aucune approximation et ne repose, en fait, que sur le côté symétrique de l'erreur de l'estimation $\widehat{\Sigma}$ de Σ .

3.3.3.1 Principe Notons μ le vecteur des rendements espérés des K actifs présents dans un portefeuille. Nous cherchons alors la meilleure répartition de la richesse pour ce portefeuille, au sens du rendement le plus élevé. Comme dans la partie précédente, nous restreignons l'ensemble des portefeuilles admissibles à ceux de variance estimée bornée par c . Nous cherchons alors à mesurer l'erreur relative de la variance estimée c par rapport à la variance réelle du portefeuille optimal. Notre démarche se traduit alors par :

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu^\top \alpha \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \alpha^\top \widehat{\Sigma} \alpha \leq c \\ \sum_{i=1}^K \alpha_i = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

Nous noterons encore ici α^* , la solution de ce programme et φ_1 et φ_2 les coefficients de Lagrange associés aux contraintes. Les conditions du premier ordre donnent :

$$\begin{cases} \alpha^* = \frac{1}{2\varphi_1} \widehat{\Sigma}^{-1} (\mu - \varphi_2 \mathbf{1}) \\ \alpha^{*\top} \widehat{\Sigma} \alpha^* \leq c \\ \sum_{i=1}^K \alpha_i^* = 1 \end{cases} \quad (32)$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur à K dimensions composé de 1. En réinjectant la première expression dans les deux autres, nous obtenons un système à deux équations non linéaires, dont on extrait facilement les deux inconnues φ_1 et φ_2 .

$$4\varphi_1^2 c = (\mu - \varphi_2 \mathbf{1})^\top \widehat{\Sigma}^{-1} (\mu - \varphi_2 \mathbf{1}) \quad (33)$$

$$2\varphi_1 = \mathbf{1}^\top \widehat{\Sigma}^{-1} (\mu - \varphi_2 \mathbf{1}) \quad (34)$$

Le calcul explicite de φ_2 est inutile, nous ne le considérerons plus que dans le vecteur $\nu = \mu - \varphi_2 \mathbf{1}$ par la suite. Le vecteur ν apparaît comme un vecteur de rendement espéré modifié par

la deuxième contrainte. Nous montrons par la suite que l'erreur d'estimation est indépendante des rendements espérés, et donc que φ_2 n'intervient pas dans la mesure de cette erreur. En effet, le problème se ramène aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha^* &= \frac{1}{2\varphi_1} \widehat{\Sigma}^{-1} \nu \\ 4\varphi_1^2 c &= \nu^\top \widehat{\Sigma}^{-1} \nu \end{cases} \quad (35)$$

Ces deux équations nous permettent d'obtenir une expression pour le ratio écart-type estimé sur écart-type réel du rendement du portefeuille. Comme dans le premier cas étudié, nous aboutissons à des simulations ne faisant intervenir que K et N .

$$R = \frac{\sqrt{\alpha^{*\top} \widehat{\Sigma} \alpha^*}}{\sqrt{\alpha^{*\top} \Sigma \alpha^*}} \quad (36)$$

$$\alpha^* = \sqrt{c} \frac{\widehat{\Sigma}^{-1} \nu}{\sqrt{\nu^\top \widehat{\Sigma}^{-1} \nu}} \quad (37)$$

Après simplification, nous obtenons

$$R = \frac{\sqrt{\nu^\top \widehat{\Sigma}^{-1} \nu}}{\sqrt{(\widehat{\Sigma}^{-1} \nu)^\top \Sigma (\widehat{\Sigma}^{-1} \nu)}}$$

Nous faisons de nouveau intervenir le fait que

$$\widehat{\Sigma} = \Sigma^{1/2} I(\widehat{K}, \widehat{N}) \Sigma^{1/2} \quad (38)$$

avec

$$I(\widehat{K}, \widehat{N}) = \sum_{t=1}^N \lambda_t z_t * z_t^\top \quad (39)$$

où z_t suit une loi normale multivariée centrée réduite indépendante des autres z_u . Nous notons ici que $I(\widehat{K}, \widehat{N})$ est un estimateur de la matrice identité de dimension K , cette estimation étant d'autant meilleure que N est grand. L'écart entre $I(\widehat{K}, \widehat{N})$ et la matrice identité est *a priori* "équirépartie" dans l'espace. On devine alors que la direction du portefeuille optimal importe peu sur l'erreur d'estimation de la variance de ce portefeuille. De manière plus formelle, on a

$$R = \frac{\sqrt{(\Sigma^{-1/2} \nu)^\top I(\widehat{K}, \widehat{N})^{-1} (\Sigma^{-1/2} \nu)}}{\sqrt{(\Sigma^{-1/2} \nu)^\top I(\widehat{K}, \widehat{N})^{-1} I(\widehat{K}, \widehat{N})^{-1} (\Sigma^{-1/2} \nu)}} \quad (40)$$

puisque la direction de ν n'intervient pas nous le ramenons à un vecteur arbitraire par l'intermédiaire d'une isométrie. Nous prenons comme vecteur arbitraire $x = (1, 0, \dots, 0)^\top$ ¹⁰ et nous considérons l'isométrie T telle que

$$T \Sigma^{-1/2} \nu = ax \quad (41)$$

¹⁰N'importe quel vecteur de norme 1 convient. Le choix de ce vecteur est purement arbitraire et repose sur une simplification des calculs pour les simulations ultérieures.

où a est la norme de $\Sigma^{-1/2}\nu$ ¹¹. L'intérêt de cette opération est clair ; nous changeons de base par le biais d'une isométrie qui ne change en rien la loi de $I(\widehat{K}, \widehat{N})^{-1}$ et nous nous ramenons à un vecteur de base x simple et indépendant des paramètres initiaux μ , Σ et $\widehat{\Sigma}$. De plus T étant une isométrie, nous avons $T^{-1} = T^\top$ et donc

$$R = \frac{\sqrt{x^\top \left(T^\top I(\widehat{K}, \widehat{N})^{-1} T \right) x}}{\sqrt{x^\top \left(T^\top I(\widehat{K}, \widehat{N})^{-1} T \right) \left(T^\top I(\widehat{K}, \widehat{N})^{-1} T \right) x}} \quad (42)$$

qui est de même loi que

$$R = \frac{\sqrt{x^\top I(\widehat{K}, \widehat{N})^{-1} x}}{\sqrt{x^\top I(\widehat{K}, \widehat{N})^{-1} I(\widehat{K}, \widehat{N})^{-1} x}} \quad (43)$$

x étant fixé et $I(\widehat{K}, \widehat{N})$ ne dépendant que de K et N .

3.3.3.2 Simulations Là encore, nous faisons varier K de 10 à 100 titres avec un pas de 10, et N de 100 à 500 observations et un pas de 50. Dans chacune des configurations nous réalisons 5000 simulations de matrices de covariance estimée (i.e. de tirages de matrice $I(\widehat{K}, \widehat{N})$). Pour ces matrices simulées, nous calculons $R = \frac{\sqrt{\alpha^{*\top} \widehat{\Sigma} \alpha^*}}{\sqrt{\alpha^{*\top} \Sigma \alpha^*}}$ qui représente en quelque sorte l'erreur d'estimation de la VaR .

Dans le cas de poids homogènes, L'influence croisée de K et N sur la moyenne et l'écart-type de ce ratio est présentée sur les deux graphes suivants. Pour une lecture plus précise des valeurs de la surface, les tables relatives à ces graphiques sont présentées en annexe B.

Cas de la matrice de covariance estimée avec $\lambda_t = \frac{1}{N}$

¹¹Plus précisément

$$a = \sqrt{\nu^\top \Sigma^{-1} \nu}$$

Dans le cas où les observations pèsent tous le même poids, nous retrouvons une forte incidence de N sur le ratio. Nous notons que les nappes obtenues sont cohérentes avec celles relatives au risque maximal. La nappe du taux moyen lorsqu'on maximise le rendement est bien au-dessus de celle lorsqu'on cherche à maximiser le risque. Cette nappe est tout de même sous le plan $R = 1$ ce qui s'explique de manière intuitive par le fait que par arbitrage un portefeuille à plus fort rendement possède un risque réel plus fort et un risque estimé éventuellement moindre.

Dans le cas $\lambda_t = (1 - \lambda) \lambda^t$, les nappes obtenues sont sans surprise et cohérentes avec les résultats de la partie précédente.

Cas de la matrice de covariance estimée avec $\lambda_t = (1 - \lambda) \lambda^t$

3.3.4 Conclusion

Cette section a tenté de quantifier le biais de la VaR estimée à partir d'une matrice de covariance incertaine. Du fait, d'un historique trop court ou d'une évolution rapide des marchés quant aux corrélations entre les titres, l'erreur d'estimation de la matrice de covariance joue un rôle non négligeable dans le calcul de la VaR d'un portefeuille. Notre étude se prête plutôt à un cadre d'asymétrie d'information entre le front office et le contrôle des risques.

Le biais sur la VaR est fonction du portefeuille, ou du moins de la stratégie du gérant de ce portefeuille. Aussi, nous avons considéré successivement un trader tentant de maximiser son risque puis un trader cherchant à maximiser son rendement sous certaines contraintes. Le premier cas nécessite de fortes hypothèses pour être étudié, mais fournit sûrement un ordre de grandeur et une forme qualitative du biais en fonction de K et N . Le second cas, qui a priori semble plus correspondre au comportement des agents présents sur les marchés, et débouche sur des simulations relativement facile à implémenter. Les résultats obtenus peuvent expliquer, du moins en partie, le coefficient 3 affecté par la Commission bancaire aux VaR issues de modèles internes.

4 La VaR est-elle une bonne mesure des risques ?

4.1 Le problème de l'agrégation des risques

Ce paragraphe est consacré à l'agrégation des mesures de risques. Deux questions fondamentales sont posées :

- Connaissant la *Valeur en Risque* de plusieurs sous-portefeuilles, quelle est la *Valeur en Risque* du portefeuille global ?
- Comment agréger une mesure de risque sur des produits linéaires et une autre mesure de risque sur des produits non linéaires ?

4.1.1 Prise en compte de corrélations inter-marchés

Nous supposons que la mesure de risque est calculée en utilisant la *VaR* paramétrique. Nous rappelons que

$$VaR_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a}} \quad (44)$$

avec \mathbf{a} la composition du portefeuille et Σ la matrice de covariance des variations des prix des actifs. Nous notons \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 deux sous-portefeuilles de \mathbf{a} . Nous associons à chacune des partitions un marché implicite que nous notons \mathfrak{M} , \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 . Nous supposons que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$. Nous cherchons donc à expliciter la relation entre la *VaR* globale $VaR_\alpha(\mathfrak{M})$ et les *VaRs* des deux marchés $VaR_\alpha(\mathfrak{M}_1)$ et $VaR_\alpha(\mathfrak{M}_2)$. En considérant la partition par bloc conforme au découpage du portefeuille, nous avons

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^\top & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Nous en déduisons que

$$\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} = \mathbf{a}_1^\top \Sigma_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2^\top \Sigma_2 \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_1^\top \Sigma_{12} \mathbf{a}_2 \quad (46)$$

d'où

$$VaR_\alpha(\mathfrak{M}) = \sqrt{[VaR_\alpha(\mathfrak{M}_1)]^2 + [VaR_\alpha(\mathfrak{M}_2)]^2 + 2[\Phi^{-1}(\alpha)]^2 \mathbf{a}_1^\top \Sigma_{12} \mathbf{a}_2} \quad (47)$$

Nous obtenons finalement

$$VaR_\alpha(\mathfrak{M}) = \sqrt{[VaR_\alpha(\mathfrak{M}_1)]^2 + [VaR_\alpha(\mathfrak{M}_2)]^2 + 2\hat{\rho} VaR_\alpha(\mathfrak{M}_1) VaR_\alpha(\mathfrak{M}_2)} \quad (48)$$

avec

$$\hat{\rho} = \frac{\mathbf{a}_1^\top \Sigma_{12} \mathbf{a}_2}{(\mathbf{a}_1^\top \Sigma_1 \mathbf{a}_1)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{a}_2^\top \Sigma_2 \mathbf{a}_2)^{-\frac{1}{2}}} \quad (49)$$

Nous voyons donc apparaître une corrélation implicite $\hat{\rho}$ qui permet effectivement d'agréger les *VaRs* en utilisant une forme quadratique. La difficulté principale réside alors dans la détermination de $\hat{\rho}$. En effet, la corrélation implicite des deux sous-portefeuilles dépend de leur composition et de la matrice de covariance entre les deux marchés.

Remarque 1 $\hat{\rho}$ est un scalaire et non une matrice de corrélation. C'est pourquoi nous pouvons l'assimiler à **une corrélation implicite** entre les marchés \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 **conditionnelles** aux positions tenues sur ces marchés

Nous considérons plusieurs cas (que nous assimilons à des règles) :

1. Cas général

Dans ce cas, $\hat{\rho}$ dépend des positions \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 . Il n'est pas possible de réduire la complexité du problème. Cette solution n'est pas satisfaisante, puisqu'elle nécessite l'estimation des covariances entre les titres \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 . Or, la segmentation du marché principal en deux sous-marchés n'est intéressante que si elle permet d'éviter la connaissance exacte de Σ_{12} . Pour s'en convaincre, on imagine mal pouvoir estimer la matrice de variance-covariance globale du marché (dont la dimension est égale au nombre total de titres traités sur l'ensemble des marchés financiers) avec un historique de données de l'ordre de quelques centaines d'observations.

2. $\Sigma_{12} = 0$

Dans ce cas, il n'y a pas de corrélation entre les marchés \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 . $\hat{\rho}$ prend la valeur 0 et nous retrouvons le résultat classique :

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\mathfrak{M}) &= \sqrt{[VaR_\alpha(\mathfrak{M}_1)]^2 + [VaR_\alpha(\mathfrak{M}_2)]^2} \\ &\leq VaR_\alpha(\mathfrak{M}_1) + VaR_\alpha(\mathfrak{M}_2) \end{aligned} \quad (50)$$

En l'absence de corrélation entre les marchés, la *Valeur en Risque* globale est inférieure à la somme des *Valeurs en Risque* de chacun des marchés. La formulation exacte de la *VaR* est

$$VaR_\alpha(\mathfrak{M}) = \sqrt{\sum_i [VaR_\alpha(\mathfrak{M}_i)]^2} \quad \text{avec } \mathfrak{M} = \bigoplus_i \mathfrak{M}_i \quad (51)$$

3. $\text{rang}(\Sigma_{12}) = 1$

L'idée est ici de considérer les sous-marchés comme suffisamment homogènes et de retenir uniquement une corrélation globale entre les marchés. On peut penser par exemple à prendre certains indices pour refléter les évolutions des sous-marchés et de calculer les corrélations entre ces indices. De manière plus formelle, nous avons :

$$\Sigma_{12} = \rho \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2^\top \quad (52)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ sont les vecteurs des volatilités respectivement des titres des marchés 1 et 2, et ρ est la corrélation des indices des deux marchés. Cette représentation se traduit par le fait que la corrélation de n'importe quel titre du marché 1 avec un titre quelconque du marché 2 est ρ . Ceci permet de conserver la structure de volatilité des titres des deux marchés pour le calcul de la *VaR* et nous aboutissons à une mesure du risque agrégé qui ne dépend plus que des positions prises sur les deux portefeuilles.

$$VaR_\alpha(\mathfrak{M}) = (1 + \varpi)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{[VaR_\alpha(\mathfrak{M}_1)]^2 + [VaR_\alpha(\mathfrak{M}_2)]^2} \quad (53)$$

avec

$$\varpi = 2\rho \frac{\mathbf{a}_1^\top \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2^\top \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1^\top \Sigma_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2^\top \Sigma_2 \mathbf{a}_2} \quad (54)$$

Il faut noter que l'intérêt de cette approche réside dans le fait qu'elle ne nécessite aucune estimation supplémentaire, puisque les vecteurs $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ se lisent sur les diagonales des matrices Σ_1 et Σ_2 . Cependant, elle nécessite la connaissance des compositions des portefeuilles.

4. $\dim(\mathfrak{M}_1) = \dim(\mathfrak{M}_2) = 1$

La manière la plus simple, sans être pour autant la plus fiable, de prendre en compte les interférences entre les deux marchés est d'assimiler chaque marché \mathfrak{M}_i à un titre composite \mathfrak{T}_i . Le portefeuille \mathbf{a} correspond alors à deux positions longues sur \mathfrak{T}_1 et \mathfrak{T}_2 . Et nous utilisons la formulation (48) en remplaçant $\hat{\rho}$ par une corrélation composite entre \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 . Chaque marché correspond à un seul actif. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \\ &= \rho_{12}\end{aligned}\tag{55}$$

La corrélation implicite correspond donc à la corrélation ρ_{12} entre les deux actifs et nous avons

$$VaR_\alpha(\mathfrak{M}) = \sqrt{[VaR_\alpha(\mathfrak{M}_1)]^2 + [VaR_\alpha(\mathfrak{M}_2)]^2 + 2\rho_{12}VaR_\alpha(\mathfrak{M}_1)VaR_\alpha(\mathfrak{M}_2)}\tag{56}$$

L'annexe C contient différents exemples numériques. Pour chacun de ces exemples, nous avons calculé la VaR globale $\mathfrak{R} = VaR(\mathfrak{M})$, la VaR de chacun des sous-portefeuilles $\mathfrak{R}_1 = VaR(\mathfrak{M}_1)$ et $\mathfrak{R}_2 = VaR(\mathfrak{M}_2)$, ainsi que les quantités $\mathfrak{R}_a = \sqrt{[VaR(\mathfrak{M}_1)]^2 + [VaR(\mathfrak{M}_2)]^2}$ et $\mathfrak{R}_b = VaR(\mathfrak{M}_1) + VaR(\mathfrak{M}_2)$. Nous avons aussi déterminé les valeurs prises par $\hat{\rho}$ et $\bar{\rho}$. Enfin, $\hat{\rho}$ correspond à une corrélation implicite qui permet de segmenter les marchés, c'est-à-dire que nous avons

$$VaR_\alpha(\mathfrak{M}) = \sqrt{[VaR_\alpha(\mathfrak{M}_1)]^2 + [VaR_\alpha(\mathfrak{M}_2)]^2 + 2\hat{\rho}[\Phi^{-1}(\alpha)]^2 \mathbf{a}_1^\top \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2^\top \mathbf{a}_2}\tag{57}$$

et donc

$$\hat{\rho} = \frac{[VaR_\alpha(\mathfrak{M})]^2 - [VaR_\alpha(\mathfrak{M}_1)]^2 - [VaR_\alpha(\mathfrak{M}_2)]^2}{2[\Phi^{-1}(\alpha)]^2 \mathbf{a}_1^\top \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2^\top \mathbf{a}_2}\tag{58}$$

Il ressort de ces quelques simulations que l'agrégation pose véritablement de gros problèmes. La somme des VaR s apparaît comme une mesure trop conservatrice. Et l'utilisation d'une corrélation implicite nécessite beaucoup de précautions pour être utilisée.

Le problème de l'agrégation des risques est très peu traité dans les méthodologies rencontrées dans la littérature. La segmentation des marchés permet de regrouper des risques plus homogènes entre eux et nous pouvons obtenir un calcul de risque agrégé de façon très simple. D'un autre côté, la prise en compte des corrélations inter-marchés est plus rigoureuse mais sûrement trop coûteuse. C'est pourquoi il est difficile de se prononcer entre cohérence et rigueur. Néanmoins, nous déconseillons d'appliquer de manière systématique une agrégation des risques par simple addition des valeurs en risque de chacun des sous-portefeuilles. Nous recommandons plutôt une méthode qui consiste à assimiler chaque marché à un titre composite. Cependant, dans ce cas là, plusieurs questions se posent :

1. Le calcul des corrélations implicites entre les sous-marchés peut-il être basé sur celui d'indices représentatifs des sous-marchés ?
2. Quelle est la pertinence de cette méthode lorsque les sous-marchés présentent des corrélations élevées ?
3. Quelle est l'ordre d'erreur de cette méthode ?
4. Ces corrélations, si prises en compte, sont-elles stables ?

4.1.2 Problème de sous-additivité

En ce qui concerne la question de l'agrégation lorsque des mesures de risque concernent les produits optionnels, il existe une nouvelle fois aucune réponse et le problème est encore plus technique que précédemment. Considérons par exemple une VaR linéaire sur taux et une VaR sur les produits optionnels de taux. Nous voyons bien que la VaR option est fortement liée à la VaR taux, puisqu'elle doit prendre en compte le risque de taux. D'un côté, nous avons l'impression de comptabiliser certains risques plusieurs fois, d'un autre côté, rien ne nous garantit que le risque n'est pas plus grand que la somme des deux $VaRs$ ¹².

En second lieu, la question de l'agrégation aborde le sujet délicat de la cohérence de la VaR en tant que mesure des risques. D'après l'axiomatique développée par ARTZNER, DELBAEN, EBER et HEATH [1998], la VaR ne vérifie pas la propriété fondamentale de sous-additivité¹³. Deux types de mesures \mathfrak{R} cohérentes du risque ont alors été proposés. Soit X la variable aléatoire décrivant la position nette du portefeuille, EMBRECHTS, KLÜPPELBERG et MILKOSH [1997] définissent \mathfrak{R} de la façon suivante :

$$\mathfrak{R} = \mathbb{E} [-X | X \leq x^-] \quad (59)$$

Dans ce cas, \mathfrak{R} n'est plus un quantile (comme pour la VaR), mais l'espérance de perte au delà d'un certain quantile (qui pourrait être éventuellement le niveau de la VaR). ARTZNER, DELBAEN, EBER et HEATH [1997] ont suggéré une deuxième mesure de risque proche de la précédente¹⁴ :

$$\mathfrak{R} = \sup \{ \mathbb{E} [-X | X \leq x^-, \mathbb{P} = p] \mid p \in \wp \} \quad (60)$$

avec \wp l'ensemble des distributions de probabilités des états de la nature. \wp , aussi appelé l'ensemble des "scénarios généralisés". Dans ce cas, pour chaque scénario appartenant à \wp , on calcule l'espérance de perte ($x^- = 0$) ou l'espérance de perte au delà d'un certain quantile ($x^- < 0$), puis on détermine la plus grande valeur parmi tous les scénarios de \wp .

4.2 La théorie des valeurs extrêmes

4.2.1 Une introduction heuristique des extrêmes

La distribution gaussienne est parfaitement caractérisée par ses deux premiers moments. La connaissance de la moyenne et de la variance permet alors de calculer tous les quantiles. Avec l'hypothèse de normalité, l'analyse statistique porte donc sur les caractères les plus visibles et les plus faciles à interpréter. La gestion du risque est une gestion des événements inattendus, des événements rares. Avec la distribution gaussienne, ces événements ont un caractère "*predictable*".

¹²Considérons par exemple le portefeuille composé de deux options binaires X_1 et X_2 , dont les sous-jacents sont indépendants, et dont le domaine d'exercice de chacune des deux options est de 99.2%. On a alors :

$$VaR(X_1 + X_2) = 1$$

$$Var(X_1) = Var(X_2) = 0$$

¹³Cela veut dire que la VaR globale de deux portefeuilles peut être supérieure à la somme des $VaRs$ individuelles des deux portefeuilles!

¹⁴Le lecteur peut aussi consulter [47], [48] et [67] pour d'autres travaux sur les mesures de risque cohérentes.

Et rien ne sert pour cela d'étudier leur fréquence, puisque celle-ci se déduit des deux premiers moments.

Contrairement à l'inférence statistique gaussienne, la théorie des valeurs extrêmes consiste à analyser les occurrences qui présentent des fréquences très faibles. Considérons la figure (9). Nous avons représenté sur celle-ci la fonction de densité¹⁵ des variations normalisées du cours de la banque LLOYDS/TSB pour la période allant de janvier 1994 à juillet 1999. L'analyse gaussienne consiste à se focaliser sur les événements qui sont concentrés autour du mode de la fonction de densité. Cela revient à s'éloigner suffisamment pour ne distinguer que la forme générale sans considérer les parties accidentées de cette fonction de densité. La théorie des extrêmes consiste à se rapprocher, à opérer des agrandissements afin de mieux visualiser les parties extrêmes de la fonction de densité. Cela implique qu'une grande partie des données n'est pas intéressante lors de l'analyse. Seules les observations qui présentent un intérêt pour modéliser les extrêmes seront utilisées.

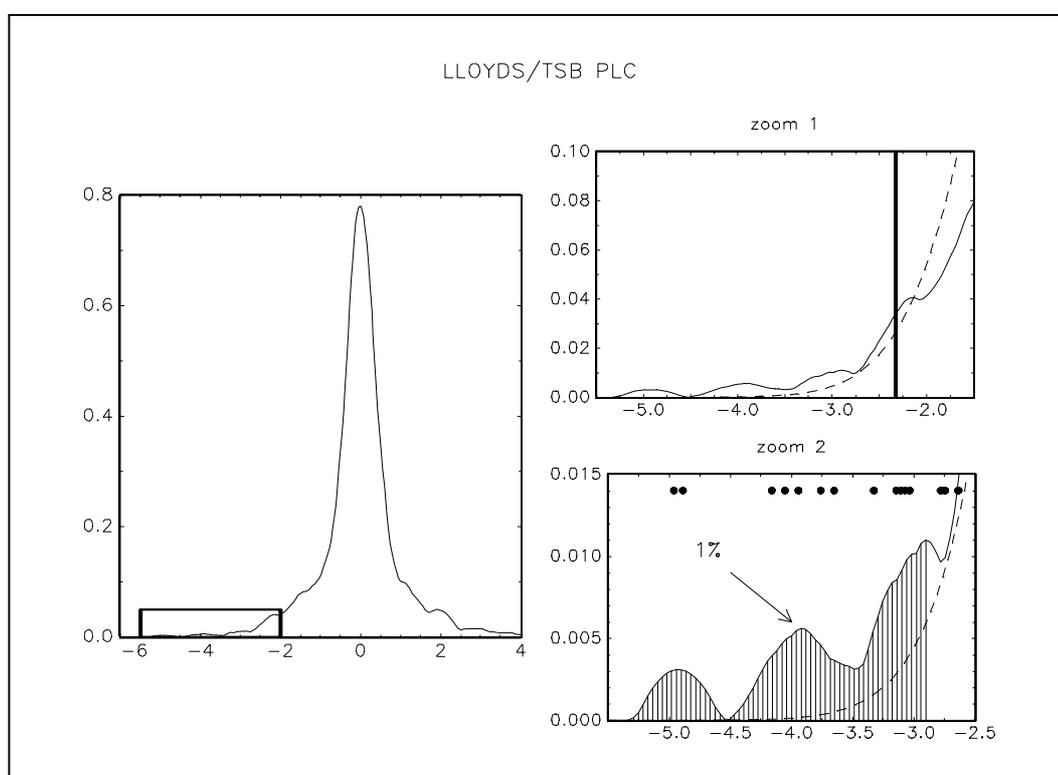


FIG. 9:

Par exemple, si nous étudions la distribution jointe des cours BARCLAYS et LLOYDS/TSB, les observations qui sont proches du centre de l'ellipse de covariance gaussienne contiennent de l'information très peu utilisable pour modéliser le risque associé à un portefeuille composé de ces deux titres. L'information **pertinente** correspond en fait aux observations qui sont à l'extérieur des ellipses de covariance 95% et 99% (voir la figure (10)). Et nous voyons notamment que l'utilisation d'une distribution normale à deux dimensions n'est pas appropriée pour modéliser la loi jointe des cours LLOYDS/TSB et BARCLAYS, puisque de nombreuses réalisations sont

¹⁵ estimée par la méthode non paramétrique du noyau d'Epanechnikov.

dans des domaines qui présentent des occurrences très faibles (qui sont égales numériquement à zéro).

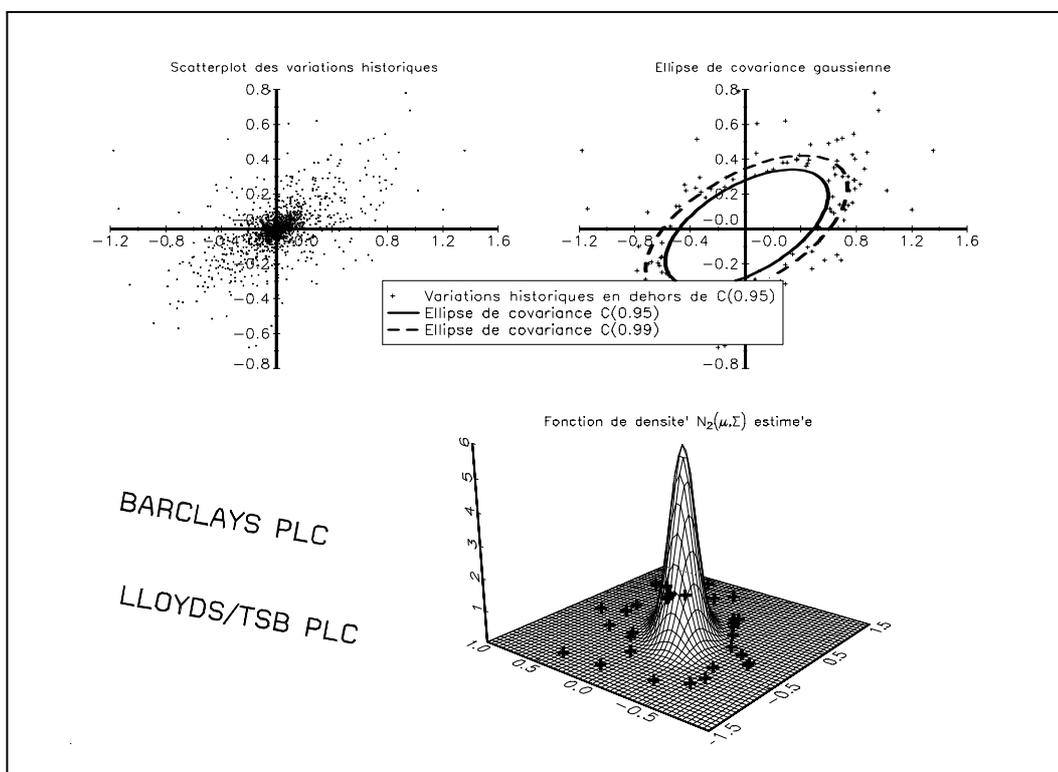


FIG. 10:

Il faut bien comprendre que **la théorie des valeurs extrêmes**, même si elle est liée aux recherches dans le domaine des queues épaisses, **n'est pas un outil de modélisation du caractère leptokurtique d'une distribution**. En fait, elle permet de caractériser la loi des extrema. Dans la section précédente, nous déterminions la distribution des minima à partir de la fonction de densité qui les engendrent. La théorie des valeurs extrêmes va nous permettre, en particulier, d'estimer directement la distribution à partir des données. L'idée est donc la suivante :

4.2.2 L'analyse du *worst case scenario*

Le "*worst-case scenario*" (ou WCS) est très lié à la théorie des extrêmes. BOUDOUKH, RICHARDSON et WHITELAW [1995] définissent l'analyse WCS de la façon suivante :

WCS asks the following question : what is the worst that can happen to the value of the firm's trading portfolio over a given period (eg, 20 trading days) ?

Elle consiste à diviser une période de référence T en N sous-intervalles de même longueur. Soit X_n la variable aléatoire décrivant la position nette du portefeuille pour le n -ième sous-intervalle. Dans ce contexte, nous pouvons définir la mesure de VaR à partir du nombre de sous-intervalles qui présentent une perte supérieure à une valeur donnée x^- :

$$\frac{\sum_{n=1}^N 1_{[X_n \leq x^-]}}{N} = 1 - \alpha \quad (61)$$

avec α le seuil de confiance. Présenté de cette façon, x^- n'est rien d'autre que la mesure *VaR*. En revanche, l'analyse WCS considère **la distribution de la perte maximale** (ou la fonction de distribution du *pire*) parmi les sous-intervalles. On cherche donc à caractériser la fonction de distribution \mathbf{G}_N de $\chi_N^- = \min(X_1, \dots, X_n, \dots, X_N)$. Si nous supposons que les variables aléatoires X_n sont indépendantes et de même loi de distribution \mathbf{F} , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_N(x) &= \Pr(\chi_N^- \leq x) \\ &= 1 - \Pr(X_1 > x, \dots, X_n > x, \dots, X_N > x) \\ &= 1 - [1 - \mathbf{F}(x)]^N \end{aligned} \quad (62)$$

Notons g_N et f les fonctions de densité correspondantes, nous pouvons montrer facilement que

$$g_N(x) = N \times [1 - \mathbf{F}(x)]^{N-1} f(x) \quad (63)$$

et

$$\mathbf{G}_N^{-1}(\alpha) = \mathbf{F}^{-1}\left(1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{N}}\right) \quad (64)$$

$\mathbf{G}_N^{-1}(\alpha)$ est donc le quantile de la fonction de distribution du *pire*. A titre d'illustration, nous avons représenté sur le graphique (11) les fonctions WCS de densité et de répartition pour une loi normale et une loi de Student à un degré de liberté.

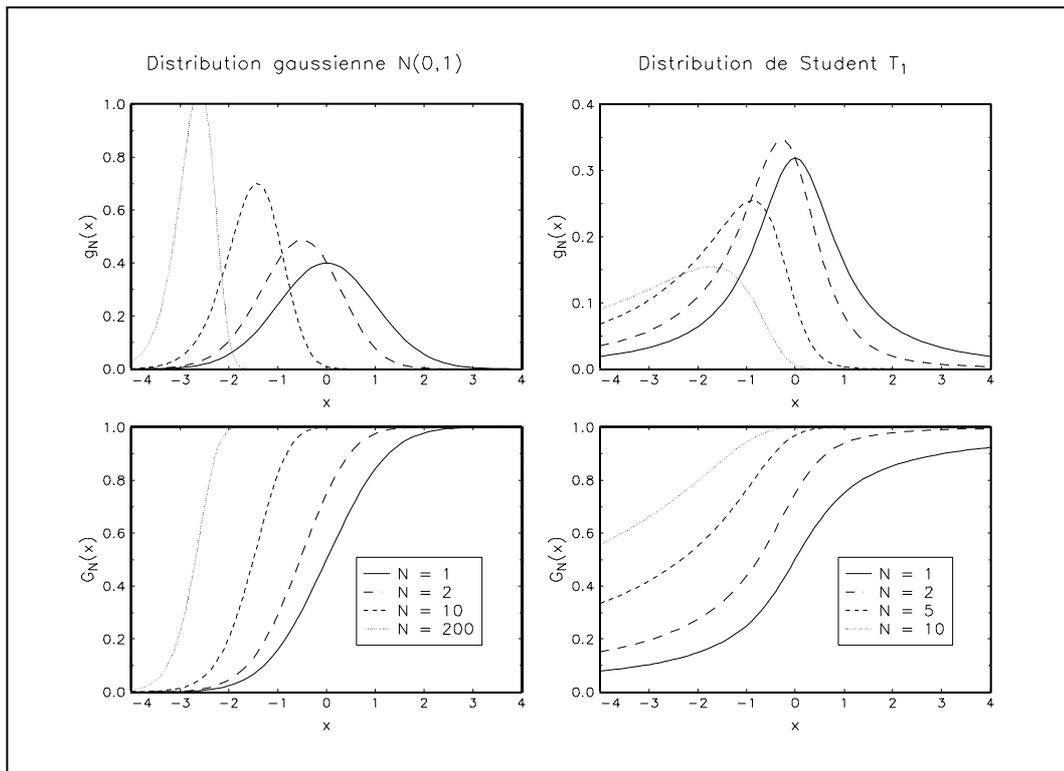


FIG. 11:

Remarque 2 Lorsque N est égal à 1, c'est-à-dire lorsque nous ne considérons qu'un seul jour de trading, nous avons $\mathbf{G}_1(x) = \mathbf{F}(x)$, $g_1(x) = f(x)$ et $\mathbf{G}_1^{-1}(\alpha) = \mathbf{F}^{-1}(\alpha)$. Dans ce cas, $|\mathbf{G}_1^{-1}(\alpha)|$ est exactement la Valeur en Risque.

$|\mathbf{G}_N^{-1}(\alpha)|$ apparaît comme une extension de la mesure *VaR*. Nous notons celle-ci $\mathfrak{R}_{\text{WCS}}$. Cette mesure de risque dépend donc de deux paramètres, N le nombre de jours de trading et α la probabilité¹⁶ que la perte dépasse $\mathfrak{R}_{\text{WCS}}$. Prenons un exemple. Nous supposons que la position nette du portefeuille X suit une loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$. Nous avons reporté les valeurs prises par $|\mathbf{G}_N^{-1}(\alpha)|$ dans le tableau suivant :

$N - \alpha$	0.5%	1%	5%	10%
1	2.5758	2.3263	1.6449	1.2816
5	3.0896	2.8769	2.3187	2.0365
10	3.2899	3.0889	2.5679	2.3087
100	3.8900	3.7178	3.2834	3.0748
250	4.1069	3.9432	3.5334	3.3384

Lorsque l’horizon considéré est un jour de trading et pour α égal à 1%, la mesure de risque est bien égale à 2.33, la *Valeur en Risque*. Lorsque nous prenons 5 jours de trading, la mesure de risque passe à 2.88. Nous voyons bien que le risque dépend alors du nombre de jours de trading considéré. La courbure de la fonction $|\mathbf{G}_N^{-1}(\alpha)|$ en fonction de N nous donne une certaine vision “dynamique” du risque¹⁷. A partir de la fonction de distribution du *pire*, nous pouvons construire d’autres mesures de risque. Par exemple, nous pouvons considérer l’*espérance du pire* $\eta(N)$ définie par

$$\begin{aligned} \eta(N) &= -\mathbb{E}[\chi_N] \\ &\equiv -N \times \int [1 - \mathbf{F}(x)]^{N-1} f(x) x dx \end{aligned} \tag{65}$$

Comme le montre le graphique (12), cette espérance du pire dépend fortement de la fonction de densité et notamment de la queue gauche de celle-ci. Nous voyons clairement que dans le cas où la fonction de distribution des pertes potentielles est leptokurtique (cas de la Student T_1), la différence de risque entre cette distribution et la distribution gaussienne estimée peut croître très fortement avec N .

On associe généralement l’analyse WCS aux simulations de crises, car elles sont toutes les deux liées à la notion de temps de retour. En général, une méthodologie *VaR* a du mal à appréhender les crises. En effet, les temps de retour basés sur les *VaRs* manquent généralement de réalisme. L’analyse WCS ou la théorie des extrêmes, qui fait l’objet de la prochaine sous-section, sont des outils plus adaptés dans ces cas-là (BOULIER, BRABANT, DALAUD et DIEU [1997]) :

On remarque d’abord le réalisme des résultats obtenus par la méthode statistique des extrêmes. Ainsi, lors du krach d’octobre 1987, la variation quotidienne la plus forte de l’indice MSCI France fut de 8.4%. Cette chute correspond à une durée de

¹⁶Nous avons donc

$$\alpha_{\text{WCS}} = 1 - \alpha_{\text{VaR}}$$

¹⁷Cependant, comme les variables aléatoires X_n sont indépendantes, cette dynamique ne tient pas compte des effets de contagion.

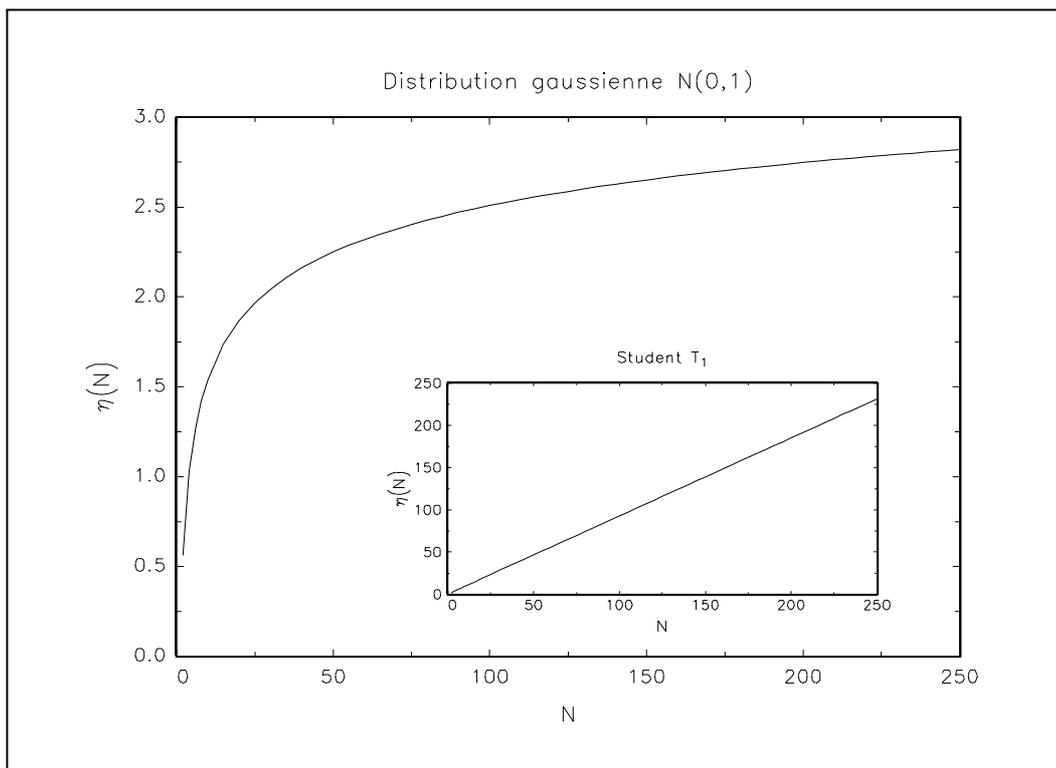


FIG. 12:

retour estimée à treize ans par la méthode des extrêmes, alors que l'approche par la loi normale fournit une durée de retour de l'ordre de dix milliards d'années. Ici la méthode paramétrique est mise en défaut parce que le quantile considéré (99.97%) a trait à un événement très rare.

4.2.3 La théorie classique

4.2.3.1 Présentation des 3 lois d'extrêmes Nous reprenons les notations introduites pour définir la distribution du *pire*. Nous considérons N variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, \dots, X_N$ indépendantes et de même loi de distribution \mathbf{F} dont nous cherchons à étudier le comportement des extrêmes $\chi_N^- = \min(X_1, \dots, X_n, \dots, X_N)$ et $\chi_N^+ = \max(X_1, \dots, X_n, \dots, X_N)$. Pour cela, nous pouvons utiliser la statistique d'ordre Y sur X , c'est-à-dire que nous avons

$$\chi_N^- = Y_1 \leq \dots \leq Y_n \leq \dots \leq Y_N = \chi_N^+ \quad (66)$$

Considérons alors la variable aléatoire $\Lambda = \sum_{n=1}^{k(N)} \tilde{h}(Y_n)$. EMBRECHTS, RESNICK et SAMORODNITSKY [1997] donnent différents exemples d'utilisation de Λ en finance :

- Si $\tilde{h}(y) = \frac{1}{k(N)} \times y$, Λ correspond à la moyenne des $k(N)$ -ièmes pertes les plus importantes ;
- Si $\tilde{h}(y) = (y^- - y)_+$ et $k(N) = N$, Λ représente la somme des pertes plus grandes qu'un seuil ;
- Si $\tilde{h}(y) = y$ et $k(N) = \alpha N$, Λ est le quantile α de X .

Avec la théorie des extrêmes, nous nous intéressons directement à $\Lambda = Y_1$ et $\Lambda = Y_N$. Pour cela, nous avons besoin du théorème de Fisher-Tippett qui permet de caractériser la loi de distribution des extrêmes :

Théorème 1 (Th. 3.2.3 de Embrechts, Klüppelberg et Mikosch (1997)) *Supposons N variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, \dots, X_N$ indépendantes et de même loi de distribution \mathbf{F} . S'il existe des suites a_N et b_N et une distribution limite non dégénérée \mathbf{G} telles que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr \left(\frac{X_N^+ - b_N}{a_N} \leq x \right) = \mathbf{G}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (67)$$

alors \mathbf{G} appartient à l'un des trois types suivants de distribution :

Type I	(Frechet)	$\mathbf{G}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \end{cases}$	$g(x) = \begin{cases} 0 & \\ \alpha x^{-(1+\alpha)} \exp(-x^{-\alpha}) & \end{cases}$
Type II	(Weibull)	$\mathbf{G}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$	$g(x) = \begin{cases} \alpha (-x)^{\alpha-1} \exp(-(-x)^\alpha) & \\ 0 & \end{cases}$
Type III	(Gumbel)	$\mathbf{G}(x) = \exp(-e^{-x})$	$g(x) = \exp(-x - e^{-x})$

C'est l'un des résultats les plus importants de la théorie des extrêmes : sous certaines conditions, la loi de distribution des extrêmes est l'une des trois lois paramétriques précédentes. En fait, nous pouvons caractériser ces trois types de distribution par une distribution unique (COLES et TAWN [1999]) :

$$\mathbf{G}(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \quad (68)$$

défini sur le support $\Delta = \{x : 1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) > 0\}$ et que nous notons $\mathcal{G}(\mu, \sigma, \xi)$. Cette fonction de distribution correspond à la loi de probabilité de Von Mises, mais elle est plus connue sous le nom de “*Generalized Extreme Value distribution*” (GEV). Nous avons alors les correspondances suivantes :

Frechet	$\xi = \alpha^{-1} > 0$
Weibul	$\xi = -\alpha^{-1} < 0$
Gumbel	$\xi \rightarrow 0$

Remarquons que les paramètres μ et σ sont en fait les limites de b_N et a_N . A titre d'illustration, voyons quelques exemples de distribution GEV. Pour cela, nous pouvons facilement montrer que la fonction de densité correspondante est

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \quad (69)$$

Les graphiques (13) et (14) présentent des fonctions de densité et de répartition pour différentes valeurs de paramètre. Lorsque μ varie, nous remarquons une translation des fonctions. μ est donc un paramètre de **localisation**. σ joue le rôle d'une variance, c'est pourquoi nous le considérons comme un paramètre de **dispersion**. Enfin, le paramètre ξ est lié au caractère leptokurtique de la fonction de distribution \mathbf{F} . C'est pourquoi on lui donne généralement le nom d'indice de queue ou d'indice de valeur extrême (DREES [1997]).

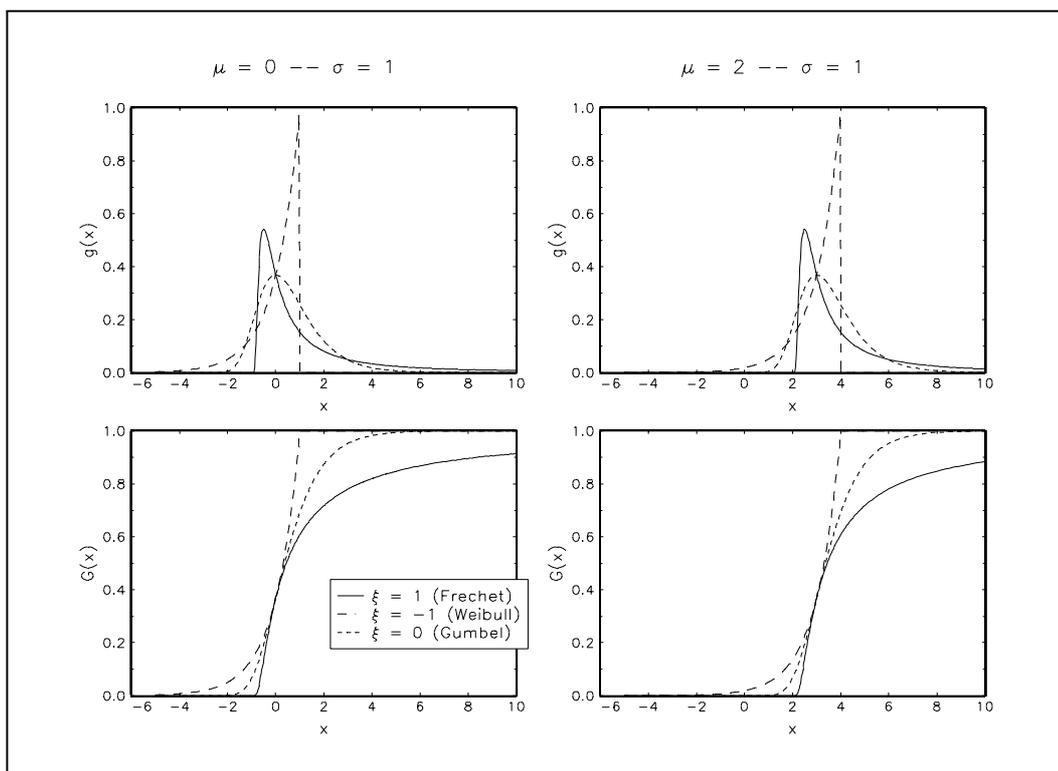


FIG. 13:

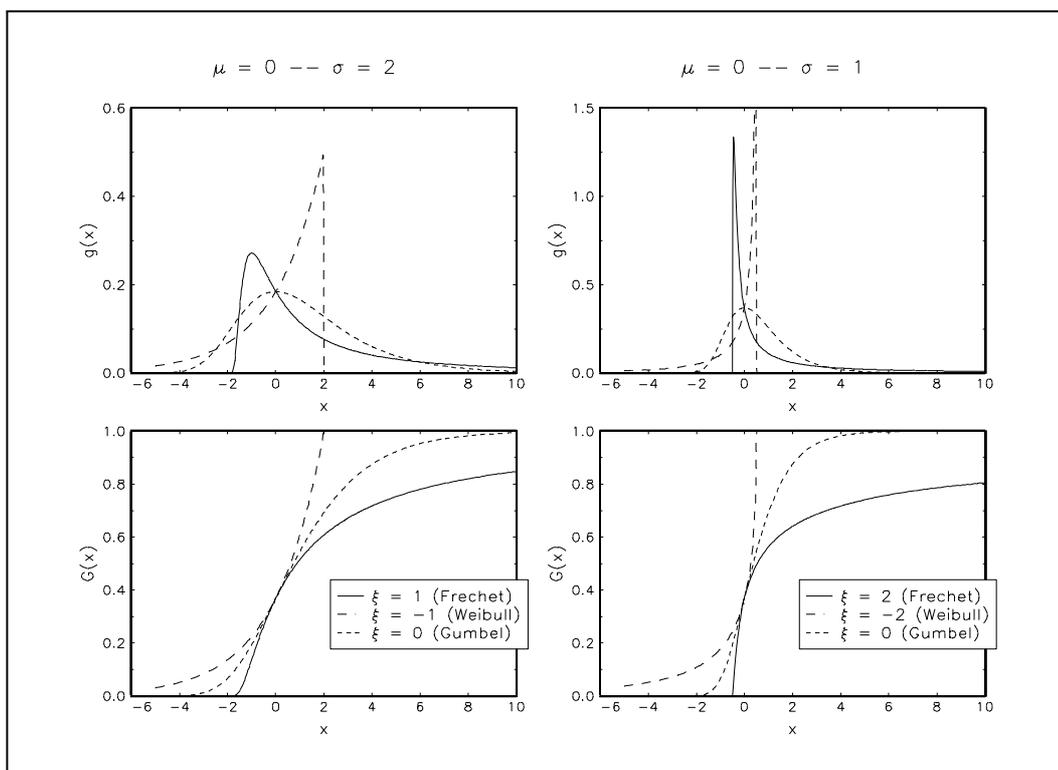


FIG. 14:

4.2.3.2 Quelques remarques sur les lois d'extrêmes L'étude des lois d'extrême est très intéressante. C'est un domaine de recherche prolifique. Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats remarquables.

Remarque 3 Si nous appliquons l'analyse WCS au maximum χ_N^+ , nous avons alors

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_N(x) &= \mathbf{F}(x)^N \\ g_N(x) &= N \times \mathbf{F}(x)^{N-1} f(x) \end{aligned} \quad (70)$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{G}_N(x) = \mathbf{G}(x) \quad (71)$$

Il est alors intéressant d'étudier la vitesse de convergence qui permet d'avoir une idée de la période de référence de l'analyse WCS pour que celle-ci soit "équivalente" à la théorie des extrêmes.

Voyons un exemple. Nous considérons la distribution gaussienne standard. Nous savons que la loi des extrêmes correspondante est une Gumbel. Sur le graphique (15), nous remarquons que l'approximation de $\mathbf{G}_1(x)$ par une loi de Gumbel est moins bonne que celle de $\mathbf{G}_{10000}(x)$.

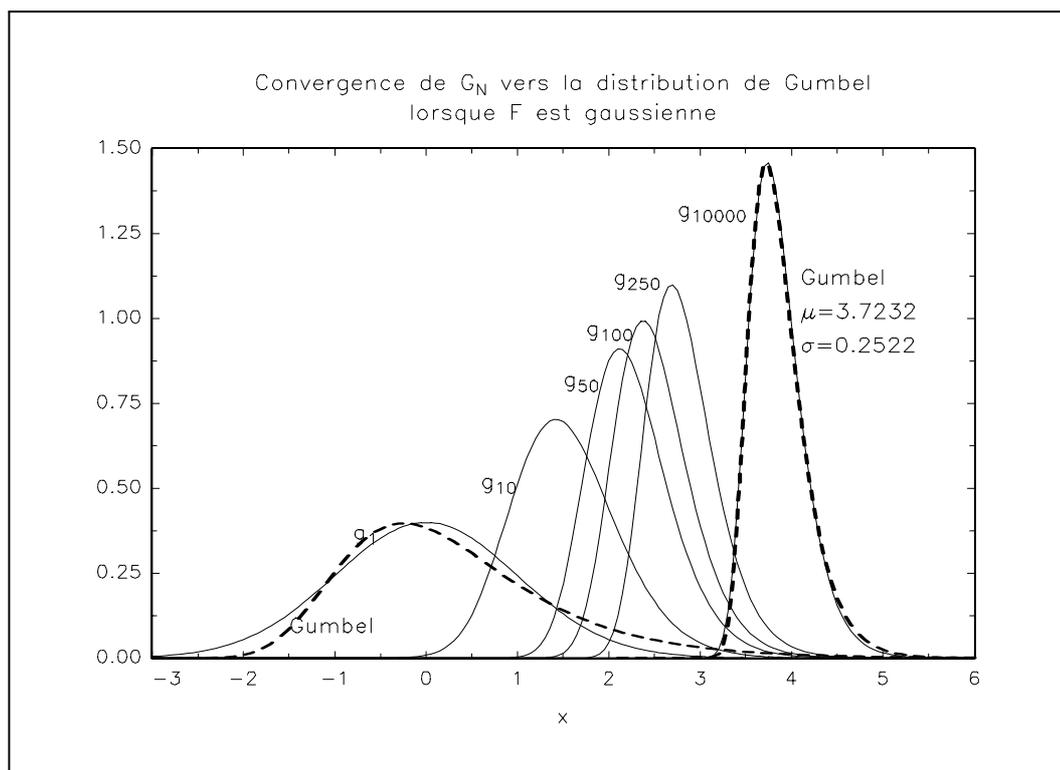


FIG. 15:

Nous considérons maintenant plusieurs distributions : la loi gaussienne, la loi exponentielle, la loi de Student T_4 et la loi α -stable symétrique¹⁸ $S_{0.7}(1, 0, 0)$. Pour mesurer la convergence, COLES et

¹⁸voir NOLAN [1999].

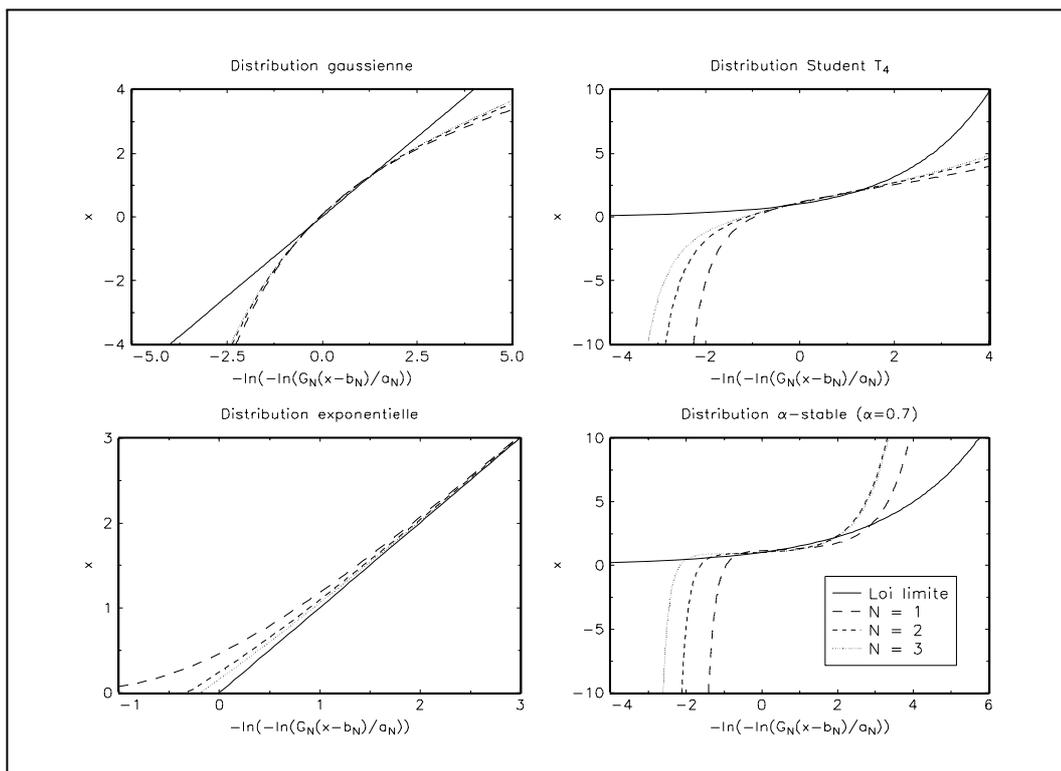


FIG. 16:

TAWN [1999] proposent d'étudier graphiquement le comportement de $-\ln\left(-\ln\left(\mathbf{G}_N\left(\frac{x-b_N}{a_N}\right)\right)\right)$ en fonction de N et de le comparer celui-ci de la loi limite. Pour les lois gaussienne et exponentielle, la loi limite est la distribution de Gumbel. Pour les deux autres, c'est la distribution de Fréchet. Le problème est de construire les suites (a_N) et (b_N) . Pour la loi exponentielle, nous pouvons montrer que si $a_N = 1$ et $b_N = -\ln(N)$, $\frac{x_N^+ - b_N}{a_N}$ converge bien en loi vers la famille de type III. Pour les autres lois, la connaissance des suites (a_N) et (b_N) n'est pas toujours vérifiée¹⁹. Dans ce cas, nous pouvons construire les suites numériquement en adoptant un critère de bonne adéquation²⁰ entre $\mathbf{G}_N\left(\frac{x-b_N}{a_N}\right)$ et la loi limite $\mathbf{G}(x)$. Les résultats sont présentés sur le graphique (16). Nous voyons ainsi que la convergence de la loi exponentielle est bien plus rapide que celle de la loi gaussienne. Et les distributions qui ont des queues leptokurtiques (c'est le cas des distributions T_4 et $S_{0.7}(1,0,0)$) présentent des vitesses de convergence plus faibles.

Remarque 4 *Le quantile $\mathbf{G}^{-1}(\alpha)$ d'ordre α pour la distribution GEV est donné par la formule suivante :*

$$\mathbf{G}^{-1}(\alpha) = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left[1 - (-\ln \alpha)^{-\xi} \right] \quad (72)$$

¹⁹COLES et TAWN [1999] fournissent deux expressions pour (a_N) et (b_N) pour la loi gaussienne, mais celles-ci s'avèrent numériquement non adéquates, notamment pour des faibles valeurs de N . C'est pourquoi nous avons aussi préféré utiliser la méthode numérique de construction des suites pour la loi gaussienne.

²⁰Nous avons utilisé une norme ℓ_2 pour le critère d'adéquation.

Ce quantile est donc fortement influencé²¹ par les deux paramètres σ et ξ . A titre d'illustration, le graphique (17) présente différentes courbes de quantiles en fonction de ξ . Intuitivement, nous comprenons que plus la distribution \mathbf{F} possède de la variance et plus elle est leptokurtique, plus ce quantile sera élevé.

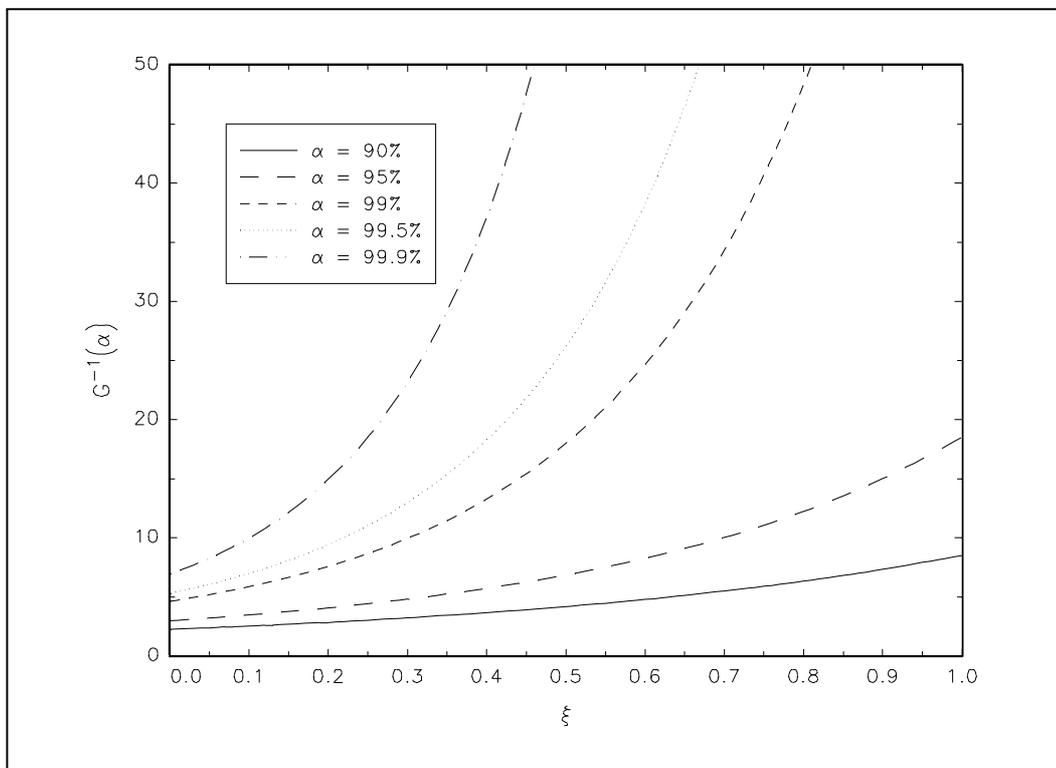


FIG. 17:

Remarque 5 Nous pouvons montrer que le mode de la distribution GEV est atteint pour la valeur $\mu + \sigma(1 - \xi)^\xi$. Quant à la moyenne $\mathbb{E}[\chi_N^+]$, nous pouvons la calculer facilement en utilisant une procédure d'intégration numérique de type Gauss-Legendre ou Gauss-Hermite.

Nous avons maintenant presque tous les éléments pour appliquer la théorie des valeurs extrêmes à la gestion du risque. Soit P la perte potentielle d'un portefeuille. Mesurer le risque revient alors à analyser la loi du maximum de $-P$, c'est-à-dire la *distribution du pire*. A partir de celle-ci, nous pouvons calculer les quantiles du pire, l'espérance ou le mode du pire, les temps de retour, etc. Avant de voir quelques applications, il reste cependant à développer l'inférence statistique et les méthodes d'estimation d'une distribution GEV.

4.2.3.3 Estimation des paramètres de la distribution GEV Il existe plusieurs méthodes pour estimer les paramètres de la distribution GEV. Nous pouvons par exemple citer les méthodes d'estimation de l'indice de queue (de type Hill ou Pickands — voir DREES, DE HAAN et RESNICK

²¹En effet, nous avons

$$\partial_\alpha \mathbf{G}^{-1}(\alpha) = \frac{\sigma}{\alpha(-\ln \alpha)^{1+\xi}} \quad (73)$$

[1998]), la méthode des moments ou encore les méthodes de seuil (basée par exemple sur la distribution de Pareto généralisée). Mais celle qui reste la plus populaire et qui sous certaines conditions est la plus efficace est la méthode du Maximum de Vraisemblance²².

Soit θ le vecteur des paramètres. Nous avons

$$\theta = \begin{bmatrix} \mu \\ \sigma \\ \xi \end{bmatrix}$$

Nous considérons un échantillon de données $\{X_t\}$ de dimension $T = \varphi N$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$. Nous divisons cet échantillon en N blocs et nous définissons χ_n^+ de la façon suivante

$$\chi_n^+ = \max(\{X_{1+n(t-1)}, t = 1, \dots, \varphi\}) \quad (74)$$

L'expression de la vraisemblance de l'observation n est donc

$$L(\chi_n^+; \theta) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi \left(\frac{\chi_n^+ - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{\chi_n^+ - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \quad (75)$$

Nous en déduisons l'expression suivante pour la log-vraisemblance :

$$\ell(\chi_n^+; \theta) = -\ln \sigma - \left(\frac{1+\xi}{\xi} \right) \ln \left(1 + \xi \left(\frac{\chi_n^+ - \mu}{\sigma} \right) \right) - \left[1 + \xi \left(\frac{\chi_n^+ - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \quad (76)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance correspond alors à

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \sum_{n=1}^N \ell(\chi_n^+; \theta) \quad (77)$$

avec Θ l'espace des paramètres. L'estimation de l'expression (77) est relativement aisée à condition de prendre quelques précautions, notamment pour la spécification de Θ (à cause de la singularité au point $\xi = 0$). Pour les applications, nous avons utilisé l'algorithme de Bryoden-Fletcher-Goldfarb-Shanno en utilisant un jacobien analytique (voir l'annexe D.2).

4.2.3.4 Applications Nous considérons une première illustration. Nous simulons plusieurs séries de données de loi $\mathcal{G}(3, 2, \frac{1}{2})$ de longueur 1000. Pour chacune des séries, nous estimons les paramètres de la distribution GEV en prenant respectivement les cinquante, cent et cinq cents premières observations, ainsi que l'échantillon entier. Sur le graphique (18), nous remarquons que l'adéquation des fonctions de densité estimées à la vraie loi est meilleure lorsque nous disposons de plus de données.

Cela peut poser des problèmes importants pour l'application de la théorie des extrêmes à la mesure de risque, puisque elle nécessite un échantillon de longueur assez importante pour obtenir des estimations "propres". En effet, les pertes potentielles vont être calculées comme pour les méthodes de *VaRs* historique et de Monte Carlo. La différence provient du fait qu'on ne calcule pas directement le quantile, mais qu'on estime la distribution à partir des maxima.

²²Nous utilisons ici les notations et la terminologie de DAVIDSON et MACKINNON [1993], ouvrage de référence sur la question du maximum de vraisemblance.

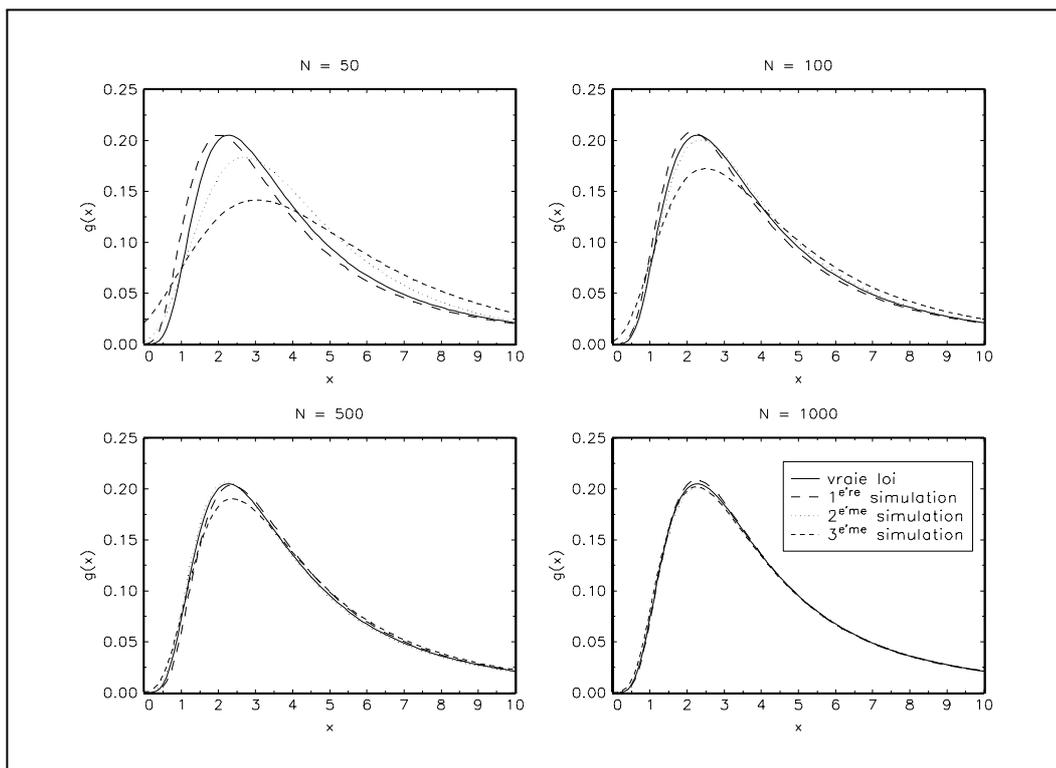


FIG. 18:

Par exemple, si nous avons un historique de 250 jours et que nous considérons des blocs de 25 jours de trading pour définir χ_n^+ , l'estimation portera sur un échantillon de 10 extrema. **Nous ne pouvons donc appliquer la théorie des extrêmes que dans le cadre d'un système performant de gestion de bases de données qui a été mis en place relativement tôt afin de disposer d'historiques assez longs.**

Prenons l'exemple du cours LLOYDS TSB. Nous considérons deux portefeuilles, l'un correspondant à une position courte sur ce titre, l'autre étant une position longue. Nous prenons 25 jours de trading pour définir les blocs. Nous obtenons alors 58 valeurs "extrêmes" qui vont nous permettre de modéliser la distribution du pire (voir le graphique (19)). Nous estimons ensuite les paramètres de la distribution GEV pour chacun des portefeuilles. Sur le graphique (20), nous avons reporté les fonctions de densité correspondantes²³. Nous remarquons que les distributions sont légèrement différentes. Dans le cas de la *VaR* analytique, les portefeuilles présentent un risque équivalent, puisque nous avons

²³A titre d'information, nous avons obtenus les résultats suivants (les écarts-types ont été calculés à partir de la matrice hessienne) :

	Position longue		Position courte	
	Estimation	Ecart-type	Estimation	Ecart-type
μ	0.105	0.012	0.105	0.012
σ	0.076	0.013	0.069	0.015
ξ	0.714	0.182	1.063	0.244

	VaR 90%	VaR 95%	VaR 99%
Position longue	0.174	0.224	0.317
Position courte	0.179	0.229	0.330

A titre de complément, voici les quantiles correspondants aux distributions estimées²⁴.

	$G^{-1}(0.90)$	$G^{-1}(0.95)$	$G^{-1}(0.99)$
Position longue	0.531	0.890	2.85
Position courte	0.752	1.571	8.70

Pour finir ce paragraphe, nous considérons les deux événements “extrêmes” du titre LLOYDS qui ont eu lieu durant ces quatre ans. En avril 1998, le titre baisse de 0.68 en une seule séance. En utilisant la *VaR* analytique, cet événement correspond à une durée de retour de 2320745 jours soit près de 9383 années. Elle n’est que de 347 jours si nous la calculons à partir de la théorie des extrêmes. En octobre 1995, le titre augmente lors d’une séance de cotation de 0.79. Les durées de retour sont respectivement 262 jours pour la théorie des extrêmes et plus de 750 mille années pour la *VaR* analytique !

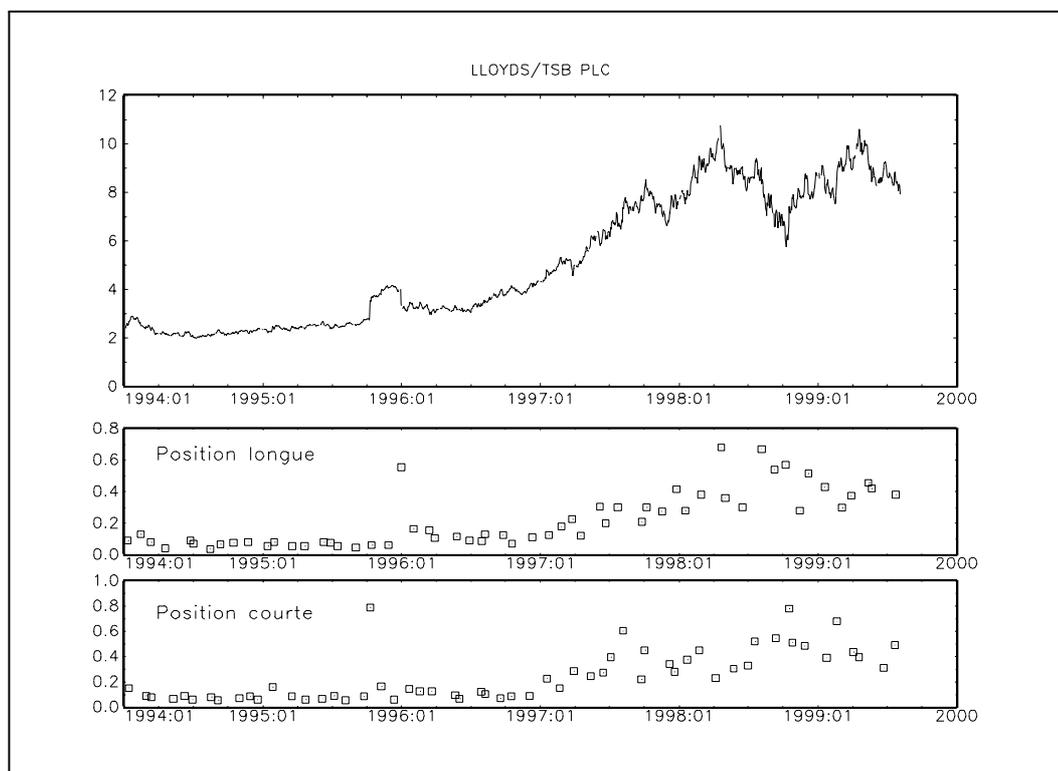


FIG. 19:

4.2.4 L’utilisation des *copulas*

Nous avons consacré le paragraphe précédent à la théorie classique des extrêmes **dans un cadre unidimensionnel**. Cela implique une réévaluation du portefeuille (de façon historique

²⁴Pour avoir d’autres indications sur la mesure du risque, nous pourrions aussi calculer le mode, l’espérance du pire, les probabilités d’occurrence de certaines régions de risque, etc.

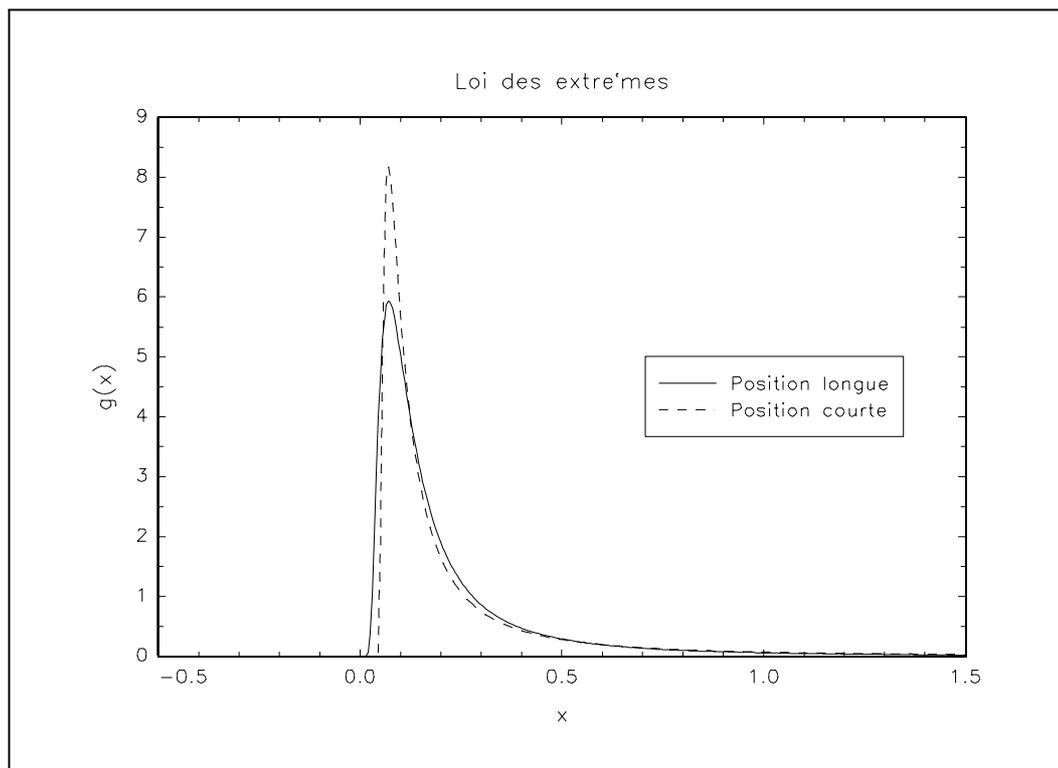


FIG. 20:

ou avec une méthode de Monte Carlo) afin de calculer la mesure des risques. C'est en quelque sorte un modèle à un seul facteur. La théorie des valeurs extrêmes multivariés (références [44], [45] et [102]) est le cadre d'analyse pour étudier les extrêmes si nous désirons tenir compte de plusieurs facteurs.

Dans le cadre traditionnel de la *VaR* analytique, la mesure de risque est une fonction de la variance lorsque nous considérons un seul facteur, alors qu'elle dépend des variances et des corrélations lorsqu'il y a plusieurs facteurs. Dans le cadre unidimensionnel de la théorie des extrêmes, nous abandonnons le paradigme de la variance pour définir la mesure de risque. Dans le cas de la théorie des extrêmes multivariés, nous allons aller plus loin, puisque nous abandonnons aussi le paradigme de la corrélation. Dans l'article "Correlation and dependency in risk management : Properties and pitfalls", EMBRECHTS, MCNEIL et STRAUMANN [1999] fournissent quelques explications :

Correlation in finance and insurance... *The current quest for a sound methodological basis for integrated risk management also raises the issue of correlation and dependency. Although contemporary financial risk management revolves around the use of correlation to describe dependence between risks, the inclusion of non-linear derivative products invalidates many of the distributional assumptions underlying the use of correlation.*

Correlation as a source of confusion... *But correlation, as well as being one of the most ubiquitous concepts in modern finance and insurance, is also one of the*

most misunderstood concepts. Some of the confusion may arise from the literay use of the word to cover notion of dependency. To a mathematician, correlation is only one particular measure of stochastic dependency among many. It is a canonical measure in the world of multivariate normal distributions, and more generally for spherical and elliptical distributions. However, empirical research in finance and insurance shows that the distributions of the real world are seldom in this class.

Pour illustrer ces propos, nous avons simulé des séries de données bi-dimensionnelles présentant une corrélation de 0.5 avec différentes distributions marginales. Les graphiques (21) sont des scatterplots de ces séries. Même si pour les quatre distributions, nous avons $\text{cor}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}$, $\text{var}(X_1) = \text{var}(X_2) = 1$, nous ne pouvons accepter l'idée de résumer celles-ci par la matrice de variance-covariance. Si nous assimilons ces quatre séries à des séries historiques de deux facteurs, alors elles présentent la même *Valeur en Risque* si nous utilisons la méthode paramétrique.

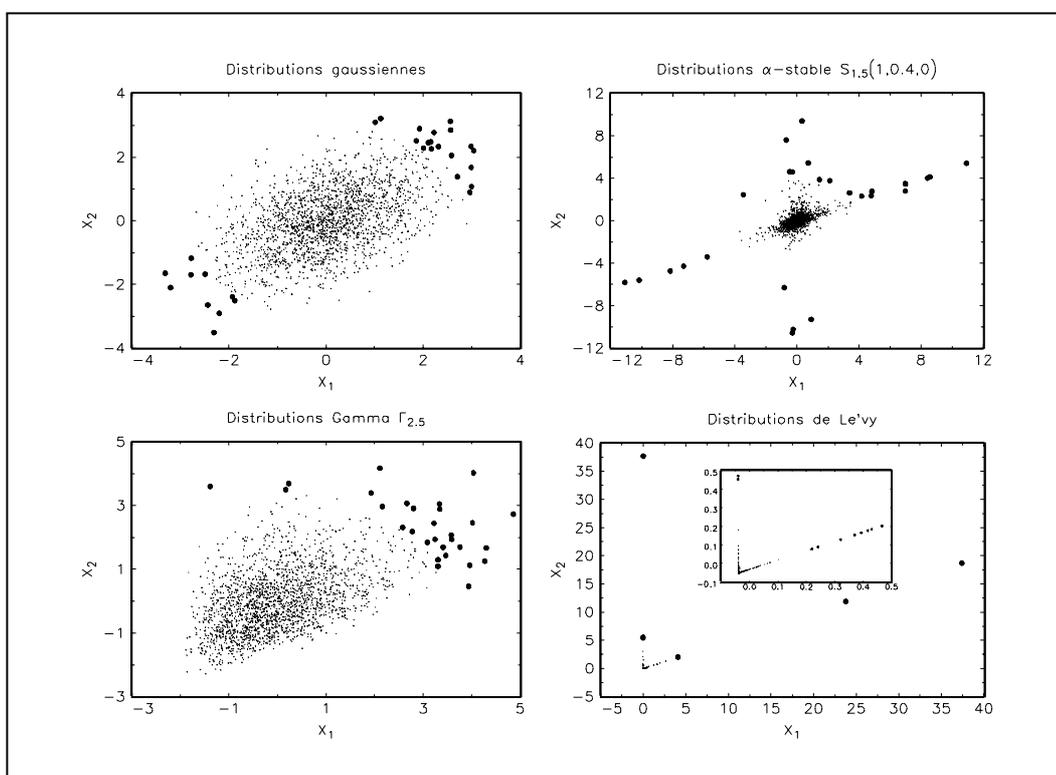


FIG. 21:

Nous allons maintenant définir la notion de *copula*, qui est une mesure de la dépendance de structure (JOE [1997], NELSEN [1999]). Nous considérons une distribution \mathbf{F} de dimension N . L'idée est alors de "séparer celle-ci en une partie qui décrit la dépendance de structure et une autre partie qui décrit seulement le comportement marginal" (EMBRECHTS, MCNEIL et STRAUMANN [1999]).

Definition 1 Soit N variables aléatoires X_1, \dots, X_N de distribution jointe \mathbf{F} . Nous considérons

la fonction C sur $[0, 1]^N$ telle que²⁵

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_1, \dots, x_N) &= \Pr\{X_1 \leq x_1, \dots, X_N \leq x_N\} \\ &= C(\mathbf{F}_1(x_1), \dots, \mathbf{F}_N(x_N)) \end{aligned} \quad (78)$$

avec $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$ les distributions marginales. Nous appelons alors la fonction C le *copula* de \mathbf{F} .

L'idée générale est donc de transformer les variables aléatoires de telle sorte que nous obtenons des distributions marginales uniformes. Voici quelques exemples de fonctions *copula* (COLES, CURRIE et TAWN [1999]) :

- Lorsque les variables aléatoires sont indépendantes, nous avons

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{n=1}^N \mathbf{F}_n(x_n) \quad (79)$$

Nous en déduisons que la fonction *copula* est

$$C(u_1, \dots, u_N) = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_N \quad (80)$$

- Si pour tout x_2 , nous vérifions que $x_2 = \mathbf{F}_2^{-1}(\mathbf{F}_1(x_1))$, alors nous avons

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \min(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)) \quad (81)$$

et la fonction *copula* est

$$C(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2) \quad (82)$$

Voyons maintenant comment le concept de *copula* est lié aux mesures de risque. Plusieurs choses intéressent un système de gestion des risques, par exemple les valeurs en risque associées aux variables aléatoires X_1 et X_2 , identiquement distribuées, mais aussi la probabilité que les réalisations dépassent ces valeurs en risque, ou encore la probabilité que l'on dépasse la première valeur en risque sachant que la seconde a été franchie.

Nous considérons l'indice de dépendance extrême χ défini par²⁶

$$\chi = \lim_{x_1 \rightarrow \sup \Delta_{x_1}} \Pr(X_2 > x_1 | X_1 > x_1) \quad (83)$$

χ est donc la probabilité limite d'un extrême conditionnelle à un autre extrême. COLES, CURRIE et TAWN [1999] montrent alors que

$$\chi = \lim_{u \rightarrow 1^-} \chi(u) \quad (84)$$

avec

$$\chi(u) = 2 - \frac{\ln C(u, u)}{\ln u} \quad (85)$$

²⁵On montre que celle-ci existe et est unique sous certaines conditions de continuité.

²⁶Par souci de simplification, nous menons l'analyse dans le cas bi-dimensionnel.

La mesure χ permet donc de mesurer une “probabilité de dépendance entre les extrêmes”. Par exemple, si nous l’appliquons à la *VaR*, nous avons (EMBRECHTS, MCNEIL, et STRAUMANN [1999]) :

$$\begin{aligned}\chi &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \Pr (X_2 > \mathbf{F}_2^{-1}(\alpha) | X_1 > \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \Pr (X_2 > VaR_\alpha(X_2) | X_1 > VaR_1(X_2)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2\alpha + C(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha}\end{aligned}\tag{86}$$

Comme χ est une probabilité, le support de χ est donc $[0, 1]$. Nous devons remarquer que cette mesure ne dépend que de la fonction *copula* et est indépendante des distributions marginales. Nous considérons maintenant une seconde mesure de dépendance $\bar{\chi}$ définie de la façon suivante :

$$\bar{\chi} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \bar{\chi}(u)\tag{87}$$

avec

$$\bar{\chi}(u) = 2 \frac{\ln(\Pr(X_2 > x_1))}{\ln(\Pr(X_2 > x_1 | X_1 > x_1))} - 1\tag{88}$$

Une nouvelle fois, nous pouvons montrer que $\bar{\chi}$ ne dépend que du *copula*. Ici, le support de $\bar{\chi}$ est $[-1, 1]$, tout comme le support de la corrélation.

Remarque 6 Dans le cas d’un vecteur gaussien à deux dimensions présentant une corrélation égale à ρ , la mesure de dépendance $\bar{\chi}$ est égale à ρ .

Dans le cadre d’analyse gaussien, la corrélation est donc une mesure adéquate d’agrégation des risques. Maintenant, si nous nous plaçons dans un autre cadre d’analyse, la mesure de dépendance $\bar{\chi}$ n’est plus égale à la corrélation ρ entre les données, puisque le *copula* change. L’agrégation des risques par la méthode des corrélations n’est alors plus appropriée et il est préférable d’utiliser une méthodologie basée sur $\bar{\chi}$ (voir BOUYÉ [1999]).

Cependant, même si l’utilisation des *copulas* pour la mesure des risques est intéressante, il n’en demeure pas moins que c’est un domaine de recherche relativement jeune et que plusieurs problèmes ne sont pas encore complètement résolus (estimation du *copula*, estimation directe de $\bar{\chi}$ à partir des données, etc).

4.3 De la *VaR* à l’exigence en Fonds Propres : changement d’horizon

Cette section s’intéresse au choix de l’horizon considéré et aux difficultés qu’il engendre pour le calcul de la *VaR*. Selon le type d’actifs gérés, nous aurons tendance à porter notre attention à des *VaR* allant de l’intra-day à quelques années. De manière opérationnelle, les risques sont souvent mesurés à 1 jour. Le passage à un autre horizon peut poser quelques problèmes.

Le comité de Bâle impose une période de détention de **10 jours** pour mesurer l’exigence en fonds propres associée à un portefeuille. Il conseille alors de convertir la *VaR* 1 jour à la *VaR* 10 jours par scaling. Le scaling consiste à multiplier la volatilité à 1 jour par \sqrt{T} , T étant l’horizon

considéré. Cette méthode soulève une certaine polémique quant à son application, et le débat sur l'adéquation du scaling s'intensifie sans pour autant faire ressortir un consensus clair.

Nous présentons dans un premier temps les idées rencontrées dans les derniers articles publiés sur le sujet, puis nous effectuons quelques simulations pour tester la validité du coefficient $\sqrt{10}$ pour le calcul de la *VaR*.

4.3.1 Quelques éléments théoriques

Au travers des différents articles sur le sujet, il ressort trois méthodes pour la conversion de la volatilité 1 jour à une volatilité T jours :

- La première conseillée par RiskMetrics est la fameuse \sqrt{T} rule qui consiste à appliquer le coefficient multiplicatif \sqrt{T} à la *VaR* 1 jour. Cette méthode est appréciée principalement pour sa simplicité et sa très facile mise en œuvre. Elle repose essentiellement sur une hypothèse de normalité et d'indépendance des accroissements des prix des actifs. Ces hypothèses sont souvent discutées, et ne s'appliquent pas à toutes les maturités.
- L'alternative actuelle à la première méthode repose sur la théorie des valeurs extrêmes. Elle demande à estimer un coefficient α représentatif de l'épaisseur des queues de distribution. Par exemple, pour une loi de Student, α représente le nombre de degrés de liberté (ou l'exposant caractéristique) et pour un processus ARCH, α représente le nombre de moments finis de la distribution non conditionnée des innovations. Ce coefficient étant déterminé, nous appliquons la $T^{\frac{1}{\alpha}}$ rule, qui consiste à passer de la *VaR* 1 jour à la *VaR* T jours en multipliant par $T^{\frac{1}{\alpha}}$.
- La dernière méthode consiste tout simplement à déterminer la matrice de variance-covariance des rendements à T jours. Cette approche nécessite un historique assez long des données et ne peut pas être appliquée à tous les horizons. Toutefois, elle permet d'obtenir la véritable matrice de variance-covariance historique. Reste alors le problème de l'adéquation du modèle à cette maturité.

Les articles rencontrés dans la littérature s'attachent plus particulièrement à tester la validité de la première approche et à développer la deuxième méthodologie au travers de modèles semi-paramétriques. Il n'y a pas de consensus arrêté sur la question. DIEBOLD et al. [57], [49] testent la procédure de scaling sur des actifs soumis à une dynamique de type GARCH. Leur argumentation repose sur la formule de Drost-Nijman qui permet de corriger la volatilité à T jours à partir de celle obtenue à 1 jour, sous certaines conditions de régularité et pour des horizons suffisamment longs. Leurs deux principales conclusions sont les suivantes :

- pour un horizon supérieur à 10-15 jours, la volatilité n'est pas prévisible. Autrement dit, les modèles à volatilité conditionnelle ne sont plus valables pour $T > 10$;
- dans tous les cas, le scaling amplifie les fluctuations de la volatilité. Même si en moyenne le coefficient \sqrt{T} peut sembler conservateur, le véritable rapport entre les deux volatilités est souvent bien au-dessous **ou** bien au-dessus de \sqrt{T} .

DANIELSSON et DE VRIES [51], [52] proposent une autre approche fondée sur des résultats de la théorie des valeurs extrêmes. Ils émettent quelques réserves sur l'application de la méthode proposée par RiskMetrics pour un horizon de 10 jours, même si les conclusions ne s'appliquent pas uniquement au passage de la VaR 1 jour à la VaR 10 jours. C'est plus la méthode fondée sur l'unique estimation de la matrice de variance-covariance qui est remise en cause. Les tests et simulations qu'ils ont effectués aboutissent aux conclusions suivantes :

- RiskMetrics **sous-estime** la VaR à 1 jour par rapport à une méthode fondée sur la théorie des extrêmes surtout pour la mesure des risques rares (i.e. 0.05% et 0.005%). Nous notons ici que les résultats obtenus pour une VaR à 1% sont comparables pour les deux méthodes.
- Pour des prévisions à 10 jours, la méthode de RiskMetrics basée sur le scaling **sur-estime** la VaR obtenue par la $T^{\frac{1}{\alpha}}$ rule (en moyenne, le coefficient α obtenu vaut 4.6).

Ces différents résultats ne font ressortir aucun consensus quant à l'application du coefficient \sqrt{T} . Les seules conclusions tirées soulignent que dans une approche purement RiskMetrics, le scaling n'est pas forcément conservateur (amplification des fluctuations) et qu'en le comparant à des méthodes plus fines, il peut s'avérer trop conservateur.

4.3.2 Un exercice de simulation

Pour illustrer les idées énoncées ci-dessus, nous avons effectué quelques simulations de rendements de différents actifs. Nous avons considéré successivement une dynamique de type GARCH, puis un modèle à volatilité stochastique (Hull-White). Dans ces deux cas, nous simulons des trajectoires du cours, dont nous calculons les vraies volatilités à 1 jour et à 10 jours, puis nous comparons le rapport de ces deux volatilités avec le coefficient $\sqrt{10}$. Cette approche a seulement le mérite de tester la validité de l'approximation effectuée par la \sqrt{T} rule, mais ne nous apporte aucune information quant à la pertinence d'une VaR analytique de type RiskMetrics qui ne dépend que de la matrice de variance-covariance.

4.3.2.1 Modèle GARCH Nous supposons ici que le rendement 1 jour d'un actif peut être modélisé par un GARCH(1,1). Cette hypothèse n'est pas très restrictive et semble cadrer avec la dynamique observée sur les marchés de certains titres. Nous simulons donc un processus y_t tel que :

$$\begin{aligned}y_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= w + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ \varepsilon_t &\sim NID(0, 1)\end{aligned}$$

Nous imposons les conditions usuelles de régularité et de stationnarité

$$\begin{aligned}0 &< w < \infty \\ \alpha &\geq 0, \beta \geq 0 \\ \alpha + \beta &< 1\end{aligned}$$

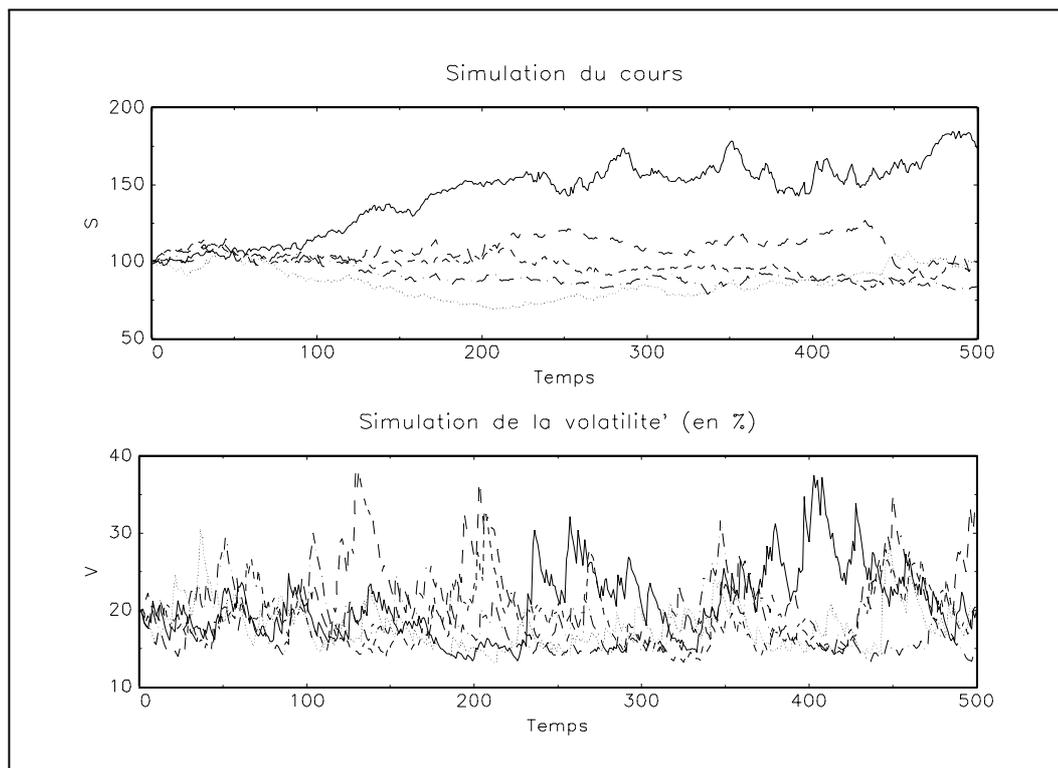


FIG. 22:

Nous avons paramétré ce modèle de telle sorte qu'il reflète des séries de rendements à 1 jour en posant $\alpha = 0.1$ et $\beta = 0.85$. Le choix de w est purement arbitraire et est fixé à 20%. Pour illustrer le type de processus que nous obtenons, nous représentons quelques trajectoires simulées (voir le graphique 22). Les rendements simulés permettent de récupérer les volatilités historiques 1 jour et 10 jours pour chaque trajectoire simulée. Nous avons effectué ceci sur 1000 simulations de trajectoires. Chacune des volatilités étant calculée à partir de 250 observations quotidiennes (donc 25 observations pour la volatilité 10 jours), nous nous sommes placés dans la situation d'un historique d'un an. Les simulations effectuées rendent compte du fait que même si le rapport des volatilités semble estimer $\sqrt{10}$ en moyenne, il subsiste un fort écart-type (voir le graphique 23). On ne retrouve pas le phénomène d'amplification des fluctuations en multipliant par $\sqrt{10}$. Nous ne pouvons donc pas conclure quant à l'adéquation de la méthode de RiskMetrics à la VaR à 10 jours dans le cas de modèles GARCH.

4.3.2.2 Modèle à volatilité stochastique Nous avons développé la même méthodologie pour des prix d'actifs régis par un modèle à volatilité stochastique de type Hull-White. Plus précisément la dynamique des cours suit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)} &= r dt + V(t) dW^1(t) \\ \frac{dV(t)}{V(t)} &= \nu dt + \eta dW^2(t) \end{aligned}$$

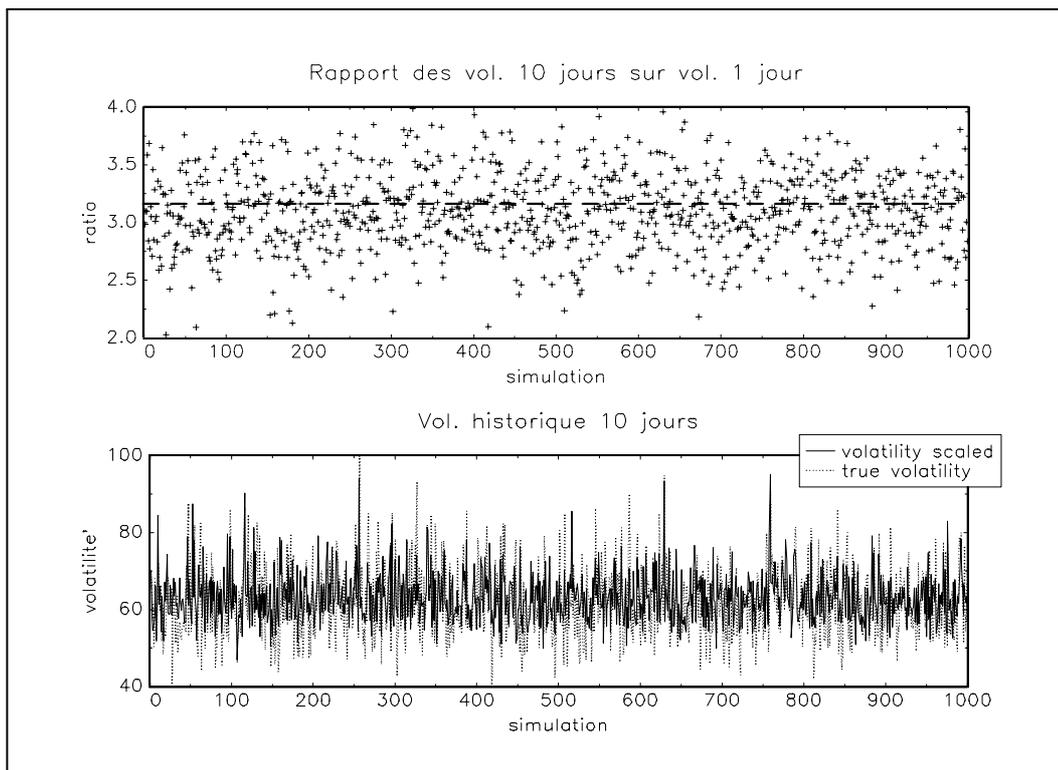


FIG. 23:

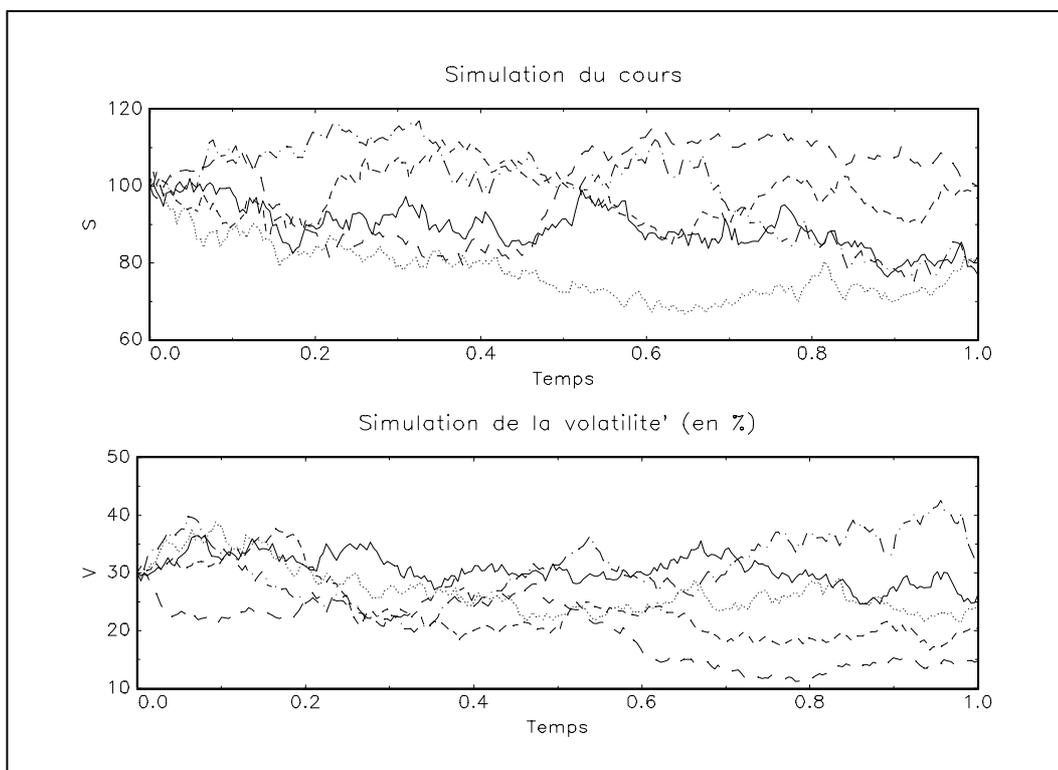


FIG. 24:

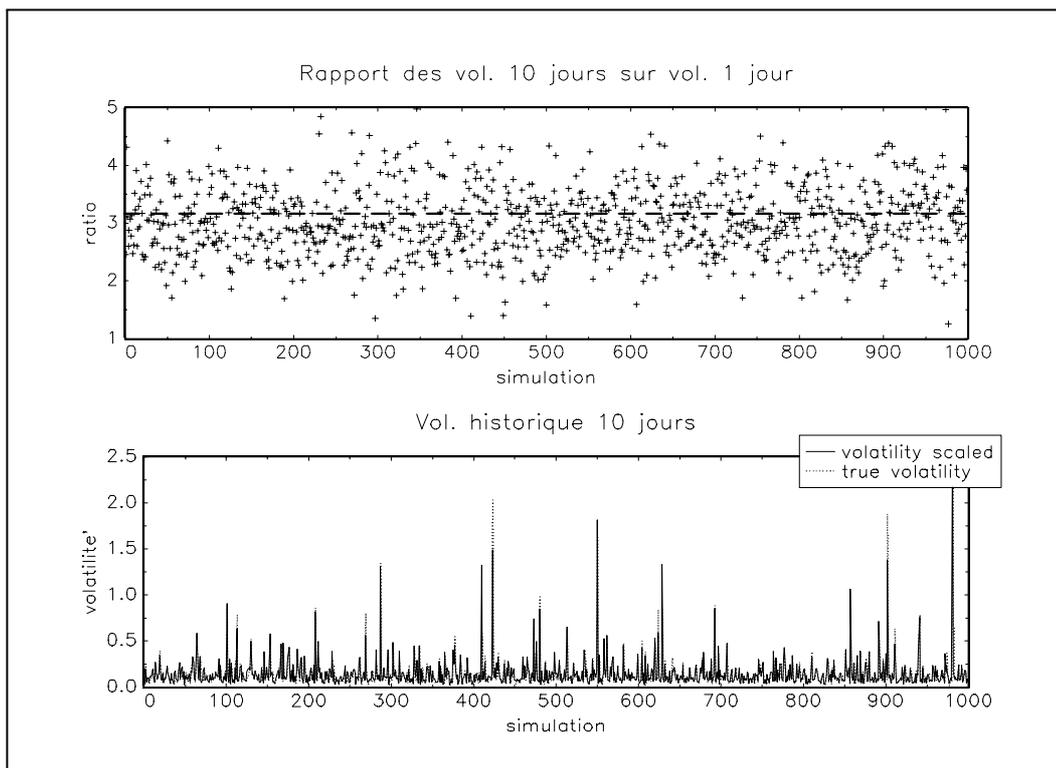


FIG. 25:

où W^1 et W^2 sont deux browniens de matrice de corrélation $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. Ce modèle, sorte de processus ARCH en temps continu, reflète de manière assez satisfaisante la dynamique suivie par les cours de certains actifs. Le graphique (24) contient quelques exemples de trajectoires de ces processus. Comme pour le modèle GARCH, nous avons simulé 1000 trajectoires sur 1 an de ce processus. Pour chacune des trajectoires, nous calculons la volatilité des rendements à 1 jour multipliée par $\sqrt{10}$ et la volatilité des rendements à 10 jours. Nous représentons sur le graphique (25) les volatilités obtenues pour ces 1000 trajectoires ainsi que le rapport des volatilités (à comparer avec $\sqrt{10}$). Nos conclusions sont les mêmes que pour le modèle GARCH.

4.3.3 Conclusion

Nos résultats semblent cohérents avec les idées rencontrées dans la littérature financière. Nous ne pouvons pas affirmer que le passage d'une *VaR* analytique à 1 jour à une *VaR* analytique à 10 jours par scaling soit conservateur (voir le schéma 26). En effet, même si les simulations effectuées ont tendance à montrer qu'en moyenne le ratio entre les volatilités 10 jours et 1 jour est inférieur à $\sqrt{10}$, l'écart type de ce même ratio reste très élevé. Toutefois, les travaux actuels réalisés dans la théorie des valeurs extrêmes semblent montrer que le calcul d'une *VaR* analytique (type RiskMetrics) est inadapté pour un horizon supérieur à 10 jours. Les articles publiés sur le sujet s'accordent à dire que l'approche *VaR* analytique conduit à une sur-estimation de la mesure de risque à 10 jours par rapport à un calcul basé sur la théorie des extrêmes. **Si nous assimilons la mesure basée sur les extrêmes au véritable risque encouru, nous pouvons donc**

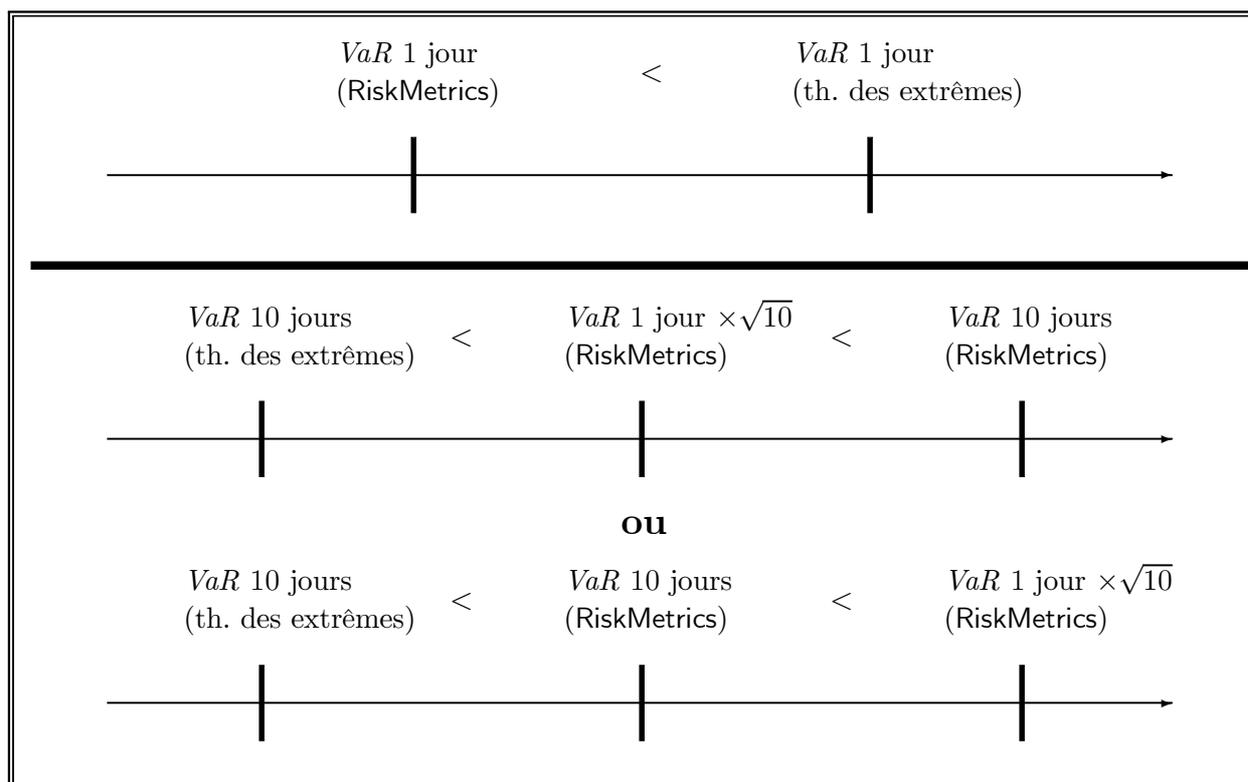


FIG. 26: Positions relatives des $VaRs$

affirmer que la méthode du scaling est conservatrice (voir de nouveau le schéma 26 pour les positions relatives des différentes mesures de risque).

5 Conclusion

Les modèles de mesure des risques de marché demandent beaucoup de savoir-faire. Celui-ci ne doit pas seulement concerner les instruments de marché ou les aspects financiers, mais aussi les outils statistiques et la gestion des bases de données. Il apparaît, en effet, que les sources d'erreurs possibles dans le calcul d'une VaR sont nombreuses. Ceci peut expliquer l'existence d'un coefficient multiplicateur imposé par la Commission Bancaire aux établissements financiers dans le calcul d'exigence en fonds propres.

L'accumulation des problèmes quantitatifs rencontrés dans la méthodologie VaR a soulevé de nombreuses polémiques autour la VaR . Cette mesure – nous l'avons déjà vu – pose de nombreux problèmes statistiques. Aux États-Unis, cela a conduit à des attaques assez violentes de la part des économètres et des statisticiens²⁷. D'autres critiques plus théoriques ont été faites. En premier lieu, elles concernent l'impossibilité de modélisation du futur par le passé (voir la controverse entre Nassim Taleb et Phillippe Jorion — références [79], [100] et [101]). De même, nous avons mentionné les problèmes inhérents à la somme de quantiles pour l'agrégation des risques.

²⁷Des procès impliquant des économètres, des revues et des fabricants de logiciels sont d'ailleurs en cours.

Malgré toutes ces critiques, force est de constater que la *VaR* est la méthodologie de mesure des risques la plus rencontrée sur les marchés. Elle a le mérite non négligeable d'aboutir à un chiffre final mesurant une certaine définition du risque. En cela, elle doit être conservée et associée à d'autres mesures permettant de capter d'autres informations des données collectées.

Références

- [1] Règlement N° 91-05 du 15 février 1991 relatif au ratio de solvabilité, *Journal Officiel de la République Française*, 7 mars 1991
- [2] Capital Adequacy Directive (CAD), directive 93/6/CEE du CONSEIL du 15 mars 1993 sur l'adéquation des fonds propres des entreprises d'investissement et des établissements de crédit, *Journal Officiel des Communautés Européennes*, N° L 141/1-26
- [3] Risk management guidelines for derivatives, *Basle Committee on Banking Supervision*, July 1994, N° 13
- [4] An internal model-based approach to market risk capital requirements, *Basle Committee on Banking Supervision*, April 1995, N° 17
- [5] Règlement N° 95-02 du 21 juillet 1995 relatif à la surveillance prudentielle des risques de marché, *Journal Officiel de la République Française*, 28 septembre 1995
- [6] Supervisory framework for the use of "backtesting" in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements, *Basle Committee on Banking Supervision*, January 1996, N° 22
- [7] Overview of the amendment to the capital accord to incorporate market risks, *Basle Committee on Banking Supervision*, January 1996, N° 23
- [8] Amendment to the capital accord to incorporate market risks, *Basle Committee on Banking Supervision*, January 1996, N° 24
- [9] Guide Technique sur l'Application du Dispositif de Surveillance Prudentielle des Risques de Marché, Commission Bancaire, Service des études bancaires, 14 juin 1996
- [10] La surveillance prudentielle des risques de marché supportés par les établissements de crédit, Commission Bancaire, Service des études bancaires, article pour la *Revue d'Economie Financière*, 26 juin 1996
- [11] Arrêté du 11 mars 1997 portant homologation de règlements du Comité de la réglementation bancaire et financière, *Journal Officiel de la République Française*, 25 mars 1997
- [12] Principles for the management of interest rate risk, *Basle Committee on Banking Supervision*, September 1997, N° 29
- [13] Core principles for effective banking supervision, *Basle Committee on Banking Supervision*, September 1997, N° 30
- [14] Les Marchés de Produits Dérivés, note d'information n°108, Banque de France, octobre 1997
- [15] Modalités de Calcul du Ratio de Solvabilité — Actualisation au 31 décembre 1997, Commission Bancaire, Cellule de contrôle des Risques de marché, 3 novembre 1997
- [16] The measurement of aggregate market risk, *Committee on the Global Financial System*, November 1997, ISBN 92-9131-060-3, N° 7
- [17] Framework for the Evaluation of Internal Control Systems, *Basle Committee on Banking Supervision*, January 1998, N° 33
- [18] Directive 98/31/CEE du 22 juin 1998 du Parlement européen et du Conseil, *Journal Officiel des Communautés Européennes*

- [19] Survey of disclosures about trading and derivatives activities of banks and securities firms 1997, *Basle Committee on Banking Supervision*, November 1998, N° 44
 - [20] Modalités de Calcul du Ratio de Solvabilité — Actualisation au 31 décembre 1998, Commission Bancaire, Secrétariat Général, Service des Affaires Internationales, 30 décembre 1998
 - [21] Recommendations for Public Disclosure of Trading and Derivatives Activities of Banks and Securities Firms, *Joint report by the Basle Committee on Banking Supervision and the Technical Committee of the "IOSCO"*, February 1999, N° 48
 - [22] A new capital adequacy framework, *Basle Committee on Banking Supervision*, June 1999, N° 50
 - [23] Arrêté du 13 juillet 1999 portant homologation de règlements du Comité de la réglementation bancaire et financière, *Journal Officiel de la République Française*, numéro 178, 4 août 1999
 - [24] De nouvelles règles pour le contrôle des risques de marché, *La Tribune*, 5 août 1999
-
- [25] ANDERSEN, T.G. [1994], Stochastic autoregressive volatility : a framework for volatility modeling, *Mathematical Finance*, 4, 75-102
 - [26] ANÉ, T. et H. GEMAN [1997], Order Flow, Transactions Clock and Normality of Asset Returns Working paper, Université Paris IX Dauphine.
 - [27] ARTZNER, A., F. DELBAEN, J-M. EBER et D. HEATH [1997], Thinking coherently, *Risk magazine*, 10, November, 68-71
 - [28] ARTZNER, A., F. DELBAEN, J-M. EBER et D. HEATH [1998], Coherent measures of risk, *Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich*, Working Paper
 - [29] BAHAR, R., M. GOLD, T. KITTO et C. POLIZU [1997], Making the best of the worst, *Risk Magazine*, 10, August
 - [30] BAKER, M., J. TATTERSALL et R. WILSON [1996], CAD and beyond, *Risk Magazine*, 9-2, February
 - [31] BECKSTROM, R. [1995], *VaR*, the next generation, *Derivatives Strategy*, October 2
 - [32] BLANCO, C. et J. IHLE, [1999], How good is your *VaR*? Using backtesting to assess system performance, *Financial engineering news*, 08/11/99
 - [33] BOLLERSLEV, T. [1986], Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 50, 987-1008
 - [34] BOLLERSLEV, T., R.F. ENGLE et D.B. NELSON [1993], ARCH models, in *The Handbook of Econometrics*, Volume 4, chapter 11
 - [35] J.F. BONNANS, J.C. GILBERT, C. LEMARECHAL et C. SAGASTIZABAL [1997], Optimisation Numérique, Mathématiques & Applications, Springer Verlag, 27
 - [36] BOUDOUKH, J., M. RICHARDSON et R. WHITELAW [1995], Expect the worst, *Risk Magazine*, 8, September
 - [37] BOULIER, J-F., A. BRABANT, R. DALAUD et A-L. DIEU [1997]. Risques de marché : Vue de Profil, Direction de la Recherche et de l'Innovation, Crédit Commercial de France, *Quants*, 28
 - [38] BOURGUINAT, H. [1992], *Finance Internationale*, PUF, Paris

- [39] BOUYÉ, E. [1999], Tail dependence and portfolio aggregation, City University Business School, *Financial Econometric Research Centre*, Working Paper
- [40] BRITTEN-JONES, M. et S.M. SCHAEFER [1997], Non-linear Value at Risk, *London Business School*, Working Paper
- [41] CÁRDENAS, J., E. FRUCHARD, E. KOEHLER, C. MICHEL et I. THOMAZEAU [1997], *VaR : One step beyond*, *Risk magazine*, **10**, October, 72-75
- [42] COLES, S. [1998], Extreme value theory and applications, *A course presented at the 44th Reunião Annual de RBRAS*, São Paulo, 26-30 July
- [43] COLES, S., J. CURRIE et J. TAWN [1999], Dependence measures for extreme value analyses, Department of Mathematics and Statistics, Lancaster University, Working Paper
- [44] COLES, S.G. et J.A. TAWN [1991], Modelling extreme multivariate events, *Journal of the Royal Statistical Society (B)*, **53**, 377-392
- [45] COLES, S.G. et J.A. TAWN [1994], Statistical methods for multivariate extremes : an application to structural design, *Applied Statistics*, **43**, 1-48
- [46] COLES, S. et J. TAWN [1999], Statistical methods for extreme values, *A course presented at the 1988 RSS conference*, Strathclyde, September 1998
- [47] CVITANIĆ, J. [1998], Minimizing expected loss of hedging in incomplete and constrained markets, Department of Statistics, *Columbia University*, Preprint
- [48] CVITANIĆ, J. et I. KARATZAS [1998], On dynamic measures of risk, Department of Statistics, *Columbia University*, Preprint
- [49] P.F. CHRISTOFFERSEN, F.X. DIEBOLD et T. SCHUERMAN [1998], Horizon Problems and Extreme Events in Financial Risk Management, FRBNY Economic Policy Review
- [50] DACOROGNA, M.M., U.A. MÜLLER, O.V. PICTET et C.G. DE VRIES [1998], Extremal forex returns in extremely large data sets, *Olsen & Associates*, Zürich, Working Paper
- [51] J. DANIELSSON et C.G. DE VRIES [1997a], Value-at-Risk and Extreme Returns, *Tinbergen Institute Rotterdam*, Mimeo
- [52] J. DANIELSSON et C.G. DE VRIES [1997b], Beyond the Sample : Extreme Quantile and Probability Estimation, *Tinbergen Institute Rotterdam*, Mimeo
- [53] DANTHINE, J-P., F. GIAVAZZI, X. VIVES et E-L. VON THADDEN [1999], The Future of European Banking, Monitoring European Integration 9, *Centre for Economic Policy Research*, London, January
- [54] DARIPA, A. et S. VAROTTO [1997], Agency incentives and reputational distortions : a comparison of the effectiveness of Value-at-Risk and Pre-commitment in regulating market risk, *Bank of England*
- [55] DAVÉ, R.D. et G STAHL [199 ?], On the accuracy of *VaR* estimates based on the variance-covariance approach, *Olsen & Associates*, Zürich, Working Paper
- [56] DAVIDSON, R. et J. MACKINNON [1993], Estimation and Inference in Econometrics, Oxford University Press, Oxford
- [57] F.X. DIEBOLD, A. HICKMAN, A. INOUE et T. SCHUERMAN [1997], Converting 1-Day Volatility to h-Day volatility : Scaling by \sqrt{h} is worse than you think, *The Wharton School*, University of Pennsylvania, **97-34**
- [58] DREES, H. [1997], Optimal rates of convergence for estimates of the extreme value index, *University of Cologne*, Technical report

- [59] DREES, H., L. DE HAAN et S. RESNICK [1998], How to make a Hill plot, *University of Cologne*, Technical report
- [60] DUNBAR, N. et R. IRVING [1998], This is the way the world ends, *Risk Magazine*, **11**, December
- [61] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C. et T. MIKOSCH [1997], *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, Berlin
- [62] EMBRECHTS, P., MCNEIL, A.J. et D. STRAUMANN [1999], Correlation and dependency in risk management : properties and pitfalls, Département Mathematik, ETHZ, Zürich, Preprint
- [63] EMBRECHTS, P., RESNICK, S.I. et G. SAMORODNITSKY [1997], Extreme value theory as a risk management tool, Département Mathematik, ETHZ, Zürich, Preprint
- [64] EMBRECHTS, P., RESNICK, S.I. et G. SAMORODNITSKY [1998], Living on the edge, *Risk Magazine*, **11**, January
- [65] ENGLE, R.F. [1982], Autoregressive conditional Heteroskedasticity with estimates of the variance of the U.K. inflation, *Econometrica*, **50**, 987-1008
- [66] FELLER, W. [1968], *An introduction to probability theory and its applications*, volume 1, troisième édition, John Wiley & Sons, New York
- [67] FÖLLMER, H. et P. LEUKERT [1998], Quantile Hedging, à paraître dans *Finance and Stochastics*
- [68] FONG, G. [1996], Valuation — multidimensional risk, *Derivatives strategy*, **1**, October
- [69] GEMAN H., D. MADAN et M. YOR [1998], Asset Prices are Brownian motion : only in Business Time Working paper, Université Paris IX Dauphine - Université Paris VI - Laboratoire de Probabilités.
- [70] GEOFFRON, P. et D. PLIHON [1999], La corrosion financière des modèles internes industriels asiatiques, Attac-talk, mars 1999
- [71] GIZYCKI, M. et N. HEREFORD [1998], Assessing the dispersion in banks' estimates of market risk : the results of a Value-at-Risk survey, *System Stability Department, Reserve Bank of Australia*, Discussion Paper **1**, october
- [72] GOURIÉROUX, C. et J. JASIAK [1998], Truncated maximum likelihood and nonparametric tail analysis, CREST, DP
- [73] GULDIMANN, Til. [1994], RiskMetricsTM Technical Document, 2nd edition, *J.P. Morgan*, New York
- [74] HENDRICKS, D. [1996], Evaluation of Value-at-Risk models using historical data, Federal Reserve Board of New York, *FRBNY Economic Policy Review*, April, 39-69
- [75] HUA, P. [1998], Alternative thinking on VaR — Back to basics, Risk Conference on *Risk Management*, Geneva, December 7, 1998
- [76] JOE, H. [1997], *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, London
- [77] JORDAN, J.V. et R.J. MACKAY [1996], Assessing value-at-risk for equity portfolios : implementing alternative techniques, *Handbook of firm-wide risk management* (eds Beckstrom, Campbell et Fabozzi)
- [78] JORION, P. [1996], *Value at Risk : The new Benchmark for Controlling Market Risks*, Irwin Professional
- [79] JORION, P. [1997], In defense of VaR, *Derivatives Strategy*

- [80] JU, X. et N.D. PEARSON [1998], Using Value-at-Risk to control risk taking : How wrong can you be?, *University of Illinois at Urbana-Champaign*, OFOR Paper, **98-08**
- [81] KUPIEC, P.H. et J.M. O'BRIEN [1995], A pre-commitment approach to capital requirements for market risk, Federal Reserve Board, *Finance and Economics Discussion Series*, **95-34**, July
- [82] KUPIEC, P.H. et J.M. O'BRIEN [1997], The pre-commitment approach : using incentives to set market risk capital requirements, Federal Reserve Board, *Finance and Economics Discussion Series*, **97-14**, March
- [83] LONGIN, F.M. [1997], Beyond the *VaR*, ESSEC, Working Paper, **97-011**
- [84] LOPEZ, J. [1998], Methods for evaluating Value-at-Risk estimates, Federal Reserve Bank of New York
- [85] LINSMEIER, T.J. et N.D. PEARSON [1996], Risk measurement : An introduction to Value at Risk, University of Illinois at Urban-Champaign, Working Paper
- [86] MAKAROV, V. [1998], Re-evaluating market risk modelling and calculation techniques — VaR, stress testing and scenario analysis, Risk Conference on *Risk Management*, Geneva, December 7, 1998
- [87] MARRERO J.P. et RIBOULET, G. [1999], Erreurs d'estimation de la *VaR* : incidence d'une matrice de covariance incertaine, document de travail, *Groupe de Recherche Opérationnelle*, Crédit Lyonnais
- [88] MCNEIL, A.J. [1997a], On extremes and crashes, Département Mathematik, ETHZ, Zürich, Preprint
- [89] MCNEIL, A.J. [1997b], Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory, *ASTIN Bulletin*, **27**, 117-137
- [90] MCNEIL, A.J. [1998a], History repeating, *Risk Magazine*, **11**, January
- [91] MCNEIL, A.J. [1998b], Calculating quantile risk measures for financial return series using extreme value theory, Département Mathematik, ETHZ, Zürich, Preprint
- [92] MCNEIL, A.J. [1999], Extreme value theory for risk managers, Département Mathematik, ETHZ, Zürich, Preprint
- [93] NELSEN, R.B. [1999], An Introduction to Copulas, Springer Verlag, New York
- [94] NOLAN, J.P. [1999], Maximum likelihood estimation and diagnostics for stable distributions, American University, Washington, Preprint
- [95] REVUZ D. et M. YOR [1994], Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer Verlag.
- [96] ROUVINEZ, C. [1997], Going greek with VaR, *Risk Magazine*, **10**, February
- [97] RUBINSTEIN, M. [1998], Edgeworth binomial trees, *Journal of Derivatives*, spring, 20-27
- [98] SPARKES, J.R. et E. HALAMANDARIS [1999], Risk management survey : major findings, *University of Bradford & Eurobanking*, July
- [99] STAHL, G. [1997], Three cheers, *Risk Magazine*, **10**, May
- [100] TALEB, N. [1997a], The world according to Nassim Taleb, interview by editor Joe Kolman, *Derivatives Strategy*, December/January
- [101] TALEB, N. [1997b], Against Value-at-Risk : Nassim Taleb replies to Phillipe Jorion, document non publié

- [102] TAWN, J.A. [1988], Bivariate extreme value theory : models and estimation, *Biometrika*, 75, 397-415
- [103] TAYLOR, S.J. [1994], Modeling stochastic volatility : a review and comparative study, *Mathematical Finance*, 4, 183-204
- [104] TUCKER, T et A. LAWRENCE [1998], Chain reaction, *FOW*, November, 25-28
Règlement N° 90-02 du 23 février 1990 relatif aux fonds propres, *Journal Officiel de la République Française*, 1er avril 1990

ANNEXES

A Les aspects réglementaires des risques de marché

Le développement des marchés financiers dans les années 80 et surtout dans les années 90, a conduit les autorités de contrôle bancaire et les autorités de marché à prendre un certain nombre de décisions pour réguler ces marchés. En particulier, ces décisions ont concerné fortement les risques de marché. Actuellement, ils existent plusieurs textes réglementaires relatifs à ce sujet. Nous pouvons citer par exemple celui de la Commission Bancaire daté du 3 Novembre 1997 et celui de la CAD [2]. Ces textes réglementaires ont eu pour effet de pousser les établissements financiers à développer des méthodes internes de mesure de risque²⁸.

Avant de situer les enjeux pour une banque, nous devons préciser dans un premier temps la notion de risque de marché. Celui-ci est présenté de la manière suivante dans le texte de la Commission Bancaire (référence [15], section 1) :

Le risque de marché, défini comme le risque de pertes sur les positions du bilan et du hors-bilan à la suite de variations des prix de marché, recouvre :

- *Les risques relatifs aux instruments liés aux taux d'intérêt et titres de propriété du portefeuille de négociation ;*
- *Le risque de change et le risque sur produits de base encourus pour l'ensemble de l'activité de bilan et hors-bilan.*

Nous remarquons tout de suite le caractère **potentiel** de la perte induit par cette définition. Et nous voyons aussi que le périmètre considéré est relativement large. Nous devons noter tout de même que cette perte doit être liée à des possibles variations de prix de marché.

De la même manière que pour le risque de crédit, les exigences de fonds propres relatives aux risques de marché s'appliquent sur une base consolidée. Pour les mesurer, les établissements ont le choix entre deux types d'approches :

1. l'approche standard présentée dans les différentes annexes du document [15]. Celles-ci concernent les catégories suivantes de risques et «sont additionnées de manière arithmétique» ;

Catégorie de risque	Périmètre de calcul
Risque de Taux (risque général et risque spécifique)	Portefeuille de négociation
Risque sur Titres de Propriété (risque général et risque spécifique)	Portefeuille de négociation
Risque de Change	Ensemble des opérations qu'elles appartiennent au portefeuille de négociation ou non
Risque sur matières premières	Ensemble des opérations qu'elles appartiennent au portefeuille de négociation ou non
Risques optionnels	Options associées à chacune des catégories de risques précédentes

2. ou l'approche *modèles internes*. L'utilisation de cette méthode, subordonnée à la réalisation de certaines conditions, «est soumise à l'approbation explicite du Secrétariat Général de la Commission Bancaire».

²⁸ Celles-ci sont présentées dans la deuxième section.

Le problème de l'utilisation conjointe des modèles internes et de la méthodologie standardisée fait l'objet d'un paragraphe dans l'annexe 7 du document [15]. La position de la Commission Bancaire sur ce point est donc la suivante :

Ainsi, un établissement commençant à utiliser des modèles pour une ou plusieurs catégories de facteurs de risque doit en principe étendre progressivement ce système à tous ses risques de marché et ne peut plus, pour les risques évalués, revenir à la méthodologie standardisée (à moins que la Commission Bancaire ne lui ait retiré son agrément pour ses modèles).

La Commission Bancaire tolère donc l'utilisation combinée des modèles internes et de la méthode standardisée. Mais elle prête une attention particulière à la permanence des méthodes, ainsi qu'à leur évolution afin de s'orienter vers un modèle global qui tient compte de l'**ensemble** des risques de marché.

Pour la banque, en plus de fournir une mesure plus juste des risques de marché, la construction d'un modèle interne est un projet qui permet aussi d'assainir son système d'information, notamment sur le stockage et la qualité des données. Mais le véritable enjeu concerne l'exigence en fonds propres. Nous pouvons penser qu'une mesure plus réfléchie permet de mieux mesurer la consommation en fonds propres des activités de marché. Un modèle interne est donc un élément de réponse dans le cadre d'un modèle d'allocation de fonds propres, comme peuvent l'être les outils RAROC.

La lecture des textes réglementaires est intéressante à plusieurs titres. Elle permet de dégager les critères définissant *un bon modèle selon les autorités réglementaires*, c'est-à-dire de définir les normes de validation. Elle permet aussi de s'interroger sur les aspects méthodologiques et le choix d'un modèle. Elle permet enfin de repositionner les pratiques actuelles en matière de gestion du risque de marché par rapport aux exigences réglementaires.

Il existe plusieurs textes officiels relatifs à la réglementation des risques de marché. En ce qui nous concerne, nous nous sommes principalement intéressés à celui de la Commission Bancaire et celui de la CAD. Ce sont les deux textes (l'un provenant d'une autorité de réglementation française, l'autre d'une autorité européenne) qui s'appliquent aux établissements financiers français. Cependant, il convient aussi d'élargir ce périmètre d'investigation. En effet, ces textes se nourrissent des recherches faites par des groupes de travail (notamment, le comité de Bâle), des réglementations existantes dans d'autres pays et de la recherche académique. Il convient donc d'être vigilant afin de bien appréhender les évolutions futures des réglementations auxquelles seront astreintes les établissements financiers français. Cela suppose de procéder à une **véritable** veille technologique sur ce sujet.

A.1 La réglementation de la Commission Bancaire

Celle-ci a fait l'objet de plusieurs révisions importantes qui sont présentées dans l'article [10] de la *Revue d'Economie Financière*. Dans les années 80, suite à la déréglementation et la libéralisation des mouvements de capitaux, les opérations de marché ont connu un essor considérable. Jusque là, les risques de marché étaient relativement peu contrôlés. Une des conséquences de la crise d'octobre 1987 a été la signature d'un premier accord international (l'accord de Bâle) sur le risque bancaire, mais celui-ci concernait plus spécifiquement «le risque de crédit, c'est-à-dire le risque de défaillance de la contrepartie». Ce n'est «qu'en 1993 que des méthodes standardisées

pour mesurer les risques de marché ont commencé à être proposées dans le cadre du Comité de Bâle, sans encore faire l'objet d'application en termes de contrôle». Sous la pression de certains événements marquants du début des années 1990 (en particulier, la faillite de la banque Barings), de nouveaux travaux ont vu le jour, notamment l'amendement à l'accord sur les fonds propres de 1988 concernant les risques de marché du comité de Bâle en janvier 1996. C'est sur ce texte, ainsi que sur la directive 93/6/CEE du Conseil de l'Union Européenne du 15 mars 1993, que s'appuie très fortement la réglementation de la Commission Bancaire.

Il convient de ne pas perdre de vue que le véritable enjeu concerne **l'adéquation des fonds propres aux risques de marché**. L'objet final porte donc sur une norme prudentielle et sur la pérennisation du système financier. De nombreux économistes ont travaillé sur ce sujet, et la plupart s'accorde à penser que cela passe avant tout par l'existence d'une autorité de tutelle disposant d'un pouvoir important. En particulier, certains ont avancé des solutions relativement dirigistes (taxe à la Tobin, prêteur en dernier ressort, etc.). Il n'est donc pas impossible (notamment, si de nouvelles crises survenaient), que le pouvoir de la Commission Bancaire soit renforcée, ou que des exigences nouvelles touchent les établissements financiers. Il est aussi fort possible que les autorités de régulation nationales disparaissent pour laisser place à une autorité réglementaire européenne. C'est notamment la proposition de certains économistes du CEPR²⁹. Dans le rapport [53] intitulé '*The Future Of European Banking*', les auteurs posent le problème de cette autorité de régulation en partant du constat suivant :

One money, one central bank, 11 independent supervisors

Les auteurs concluent que le système de régulation actuel est incohérent et doit être complété et intégré.

Les institutions financières ont la possibilité d'utiliser leurs propres modèles internes de mesure de risques de marché à la place des méthodes *standardisées*. Ces modèles internes doivent cependant être validés par l'autorité de tutelle, c'est-à-dire qu'ils doivent respecter des normes qualitatives et des critères qualitatifs et quantitatifs. Nous développons ceux-ci dans les paragraphes qui suivent.

A.1.1 Les normes générales

Les modèles internes doivent remplir les conditions minimales suivantes (section 1 de l'annexe 7 du document [15]) :

- «le système de gestion des risques de l'établissement repose sur des principes sains et mis en œuvre de manière intègre ;
- l'établissement possède en nombre suffisant de personnel qualifié pour l'utilisation de modèles élaborés non seulement dans le domaine de la négociation, mais aussi dans ceux du contrôle des risques, de l'audit interne et, du postmarché ;
- les modèles de l'établissement ont fait la preuve sur une durée significative qu'ils mesurent les risques avec une précision raisonnable ;

²⁹Le CEPR (Centre for Economic Policy Research) est un organisme indépendant (même s'il est financé par la Banque Centrale Européenne, la Banque des Règlements Internationaux et 22 banques centrales) regroupant les meilleurs chercheurs économistes d'Europe. Parmi ceux-ci, nous trouvons notamment De Grauwe, Svensson, Giovannini, Masson, Goodhart, Eichengreen, Miller, Dewatripont ou encore Wyplosz. Les travaux du CEPR ont beaucoup d'influence sur la politique économique européenne. Nous pouvons par exemple citer les travaux sur les zones cibles qui ont eu un impact important sur la politique de change, sur le problème de convergence des cours de change, et surtout sur les règles d'interventions des banques centrales.

- *l'établissement effectue régulièrement des simulations de crise selon les modalités précisées à la section A.1.4.3.»*

Dans la même section, la Commission Bancaire précise la procédure de soumission du modèle et les modalités d'utilisation :

L'utilisation des modèles internes pour le calcul de l'exigence prudentielle en fonds propres est soumise à l'approbation préalable de la Commission Bancaire, après une période de suivi et de test en situation réelle.

A.1.2 Les critères qualitatifs

Les systèmes de gestion des risques de marché doivent **respecter** certains critères qualitatifs. Les conséquences sont relativement importantes, puisque «le degré de conformité à ces critères peut conditionner le niveau du multiplicateur. Seuls les établissements les respectant **intégralement** pourront prétendre au multiplicateur minimal.» Ce multiplicateur (qui correspond au $(3 + \xi)$ de la formule 89 page 67) intervient dans le calcul de l'exigence de fonds propres et doit être considéré comme un paramètre de pénalisation.

L'ensemble des critères qualitatifs est présenté dans le paragraphe 2 de l'annexe 7 du document [15]. Nous présentons ici un résumé de ces différents critères :

- L'établissement financier doit disposer «d'**une unité de contrôle des risques**, responsable de la configuration et de l'exploitation du système de gestion des risques, **indépendante des unités de négociation.**» Elle doit «établir et analyser des rapports **quotidiens** sur les résultats produits par les modèles ainsi qu'une évaluation de l'utilisation des limites de négociation et **rend compte directement à l'organe exécutif de l'établissement.**»
- Cette unité doit effectuer régulièrement («au moins **trimestriellement**») des contrôles *ex-post*.
- «L'organe délibérant et l'organe exécutif doivent être **activement associés** au processus de contrôles des risques et le considérer comme **un aspect essentiel de l'activité** de l'établissement.»
- «Les rapports quotidiens doivent être revus par des responsables disposant de l'expertise et de l'autorité suffisantes pour **exiger** au besoin une réduction des positions prises par un opérateur **voire une diminution** du degré d'exposition global de la banque.»
- «Les modèles internes doivent être étroitement intégrés à la gestion **journalière** des risques.»
- «Le système de mesure des risques doit être utilisé **conjointement** avec les limites opérationnelles.»
- «Un programme rigoureux de simulations de crise doit **régulièrement compléter** l'analyse des risques fondée sur les résultats quotidiens des modèles internes. Lorsque ses conclusions font apparaître une vulnérabilité particulière à un ensemble donné de circonstances, des mesures appropriées doivent être prises rapidement pour réduire ces risques.»
- «Les établissements doivent **disposer d'un programme de vérification du respect des règles et procédures** internes relatives au fonctionnement du système de mesure des risques. Ce système fait l'objet d'une **documentation** décrivant les principes de base et le détail des techniques de mesure utilisées.»

- i. «Une **analyse indépendante** du système de mesure des risques doit être effectuée régulièrement dans le cadre du processus d'un audit interne de l'établissement. Elle doit porter à la fois sur les activités des unités de négociation et **sur celles de l'unité indépendante de contrôle des risques**. Réalisée à intervalles réguliers, si possible **annuellement**, elle doit couvrir au minimum :
- le caractère adéquat de la documentation concernant le système et les processus de mesure des risques ;
 - l'organisation de l'unité de contrôle des risques ;
 - l'intégration des mesures des risques de marché dans la gestion journalière des risques ;
 - les procédures d'agrément des modèles et systèmes de valorisation ;
 - la validation de toute modification significative du processus de mesure des risques ;
 - la couverture par le modèle des différents risques de marché ;
 - la fiabilité et l'intégrité du système d'information et des tableaux de bord destinés aux responsables ;
 - **la précision et l'exhaustivité des données relatives aux positions** ;
 - le contrôle de la cohérence, de la mise à jour et de la fiabilité des données utilisées dans les modèles internes ainsi que de l'indépendance des sources ;
 - l'exactitude et la pertinence des hypothèses en matière de **volatilité et corrélations** ;
 - la vérification de la précision des modèles par le biais d'analyses *ex-post* fréquentes.»

Plusieurs commentaires peuvent être faits sur ces critères qualitatifs. Tout d'abord, la Commission Bancaire insiste fortement sur l'organisation du système des risques et notamment sur l'unité de contrôle. Sans fournir la structure désirée du système, elle indique des signaux forts pour l'unité de contrôle concernant **son indépendance, son pouvoir et sa compétence**. La Commission Bancaire insiste aussi sur la transparence des modèles. Ils doivent notamment faire l'objet d'une description écrite détaillée et doivent être alimentés par **des bases de données fiables**.

Certains critères diffèrent légèrement de ceux du comité de Bâle. Le paragraphe A.3.1 contient une comparaison sur ces différences.

A.1.3 Les critères quantitatifs

Le choix des modèles est laissé aux établissements financiers. Mais ils doivent respecter un certain nombre de règles, qui sont décrites dans le paragraphe 5 de l'annexe 7 du document [15] :

1. «La *perte potentielle* est calculée quotidiennement.»
2. «Le *niveau de confiance* unilatéral requis est de 99%.»
3. «Il est appliqué un choc instantané sur les prix équivalent à une variation sur dix jours correspondant à une *période de détention* de dix jours ouvrés.»
4. «La *période d'observation* (échantillon historique) pour le calcul de la perte potentielle doit être au minimum d'un an.»
5. «Les établissements doivent mettre à jour leurs *séries de données* **au moins une fois tous les trois mois** et plus fréquemment en cas d'accroissement notable des volatilités observées.»

6. «Les établissements peuvent prendre en compte les *corrélations* empiriques **entre tous les facteurs** de risques sous réserve que le système de mesure de celles-ci soit fiable, appliqué de manière intègre et que **la qualité des estimations soit suffisante.**»
7. «Les modèles doivent appréhender avec précision les risques particuliers liés au **caractère non linéaire** du prix des options.»
8. «Chaque établissement doit satisfaire, sur une base journalière, à *l'exigence de fonds propres* correspondant à **la valeur la plus élevée entre** : i) la perte potentielle du jour précédent ; et ii) la moyenne des pertes potentielles sur les soixante derniers jours ouvrés, à laquelle est appliqué un facteur de multiplication.»
9. «La Commission Bancaire attribue à chaque établissement un *facteur multiplicatif* en fonction de la qualité de son système de gestion des risques, avec un minimum de 3, le *complément éventuel*, compris entre 0 et 1, étant directement lié aux performances de son modèle, évaluées *a posteriori*.»
10. «Lorsque le risque spécifique inhérent aux instruments liés au taux d'intérêt et aux titres de propriété n'est pas pris en compte de manière satisfaisante dans leurs modèles, les établissements sont assujettis à une exigence de fonds propres distincte destinée à couvrir ce *risque* calculée selon la méthodologie standard.»

Plusieurs des critères précédents sont discutés dans la section concernant les aspects méthodologiques. Pour résumer, **les établissements doivent calculer la perte potentielle quotidiennement pour une période de détention de 10 jours**. Notons cette perte potentielle $P(t)$ à la date t (jour ouvré). A chaque date t , l'établissement calcule l'exigence de fonds propres $FP(t)$ de la façon suivante

$$FP(t) = \max \left(P(t-1), (3 + \xi) \times \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} P(t-i) \right) \quad (89)$$

avec ξ le complément éventuel ($0 \leq \xi \leq 1$). Il est donc important de **disposer d'une bonne mesure des risques** (c'est-à-dire de la perte potentielle) puisque celle-ci conditionne totalement l'exigence en fonds propres. **Dans le cadre d'une banque universelle, il est important de veiller à ce que la mesure des risques de marché ne soit ni sur-estimée, ni sous-estimée afin de ne pas défavoriser ou favoriser l'activité Corporate Marché au détriment des autres activités de la banque.** De même, nous pouvons supposer que la Commission Bancaire attribuera automatiquement un coefficient multiplicateur égal à 4 lorsque la mesure de risque lui sera présentée pour la première fois. Ce n'est qu'au vu du comportement de cette mesure que la Commission Bancaire modifiera ce coefficient et le fixera peut-être à 3. Il convient donc de prendre conscience de l'importance des réflexions menées en amont sur la mesure et sur la nécessité de la période de test.

Remarque 7 *L'exigence en fonds propres est calculée pour une période de détention de 10 jours. Cependant, cette période de détention est ramenée à un jour lorsque l'analyse concerne le calcul des exceptions, c'est-à-dire le backtesting. Il convient donc de bien distinguer ces deux mesures de risque.*

Deux points sont importants dans la mise en place du modèle. Le point 6 précise que nous devons prendre en compte l'ensemble des facteurs de marché. Il n'est donc pas nécessaire de considérer chaque produit comme un facteur de marché. Nous pouvons donc effectuer des regroupements (notamment pour les produits de taux) à partir de techniques d'analyse de données

pour construire ces facteurs. Mais ces facteurs pris dans leur ensemble doivent parfaitement refléter les possibilités de variation des prix. Cela s'applique en particuliers aux produits optionnels (point 7). Il n'est pourtant pas précisé les types de non-linéarité que doit appréhender le modèle. Il est communément admis que les convexités d'ordre 1 et 2 par rapport au prix du sous-jacent (risques de Delta et Gamma) doivent être pris en compte. Dans l'annexe 6, il est de plus précisé que nous devons tenir aussi compte de la «sensibilité des options à la volatilité des sous-jacents (risque vega)». Nous pouvons donc supposer que les modèles de mesure de risque des options doivent être basés sur des modèles qui prennent en compte le *smile* de volatilité. Enfin, la Commission Bancaire est assez imprécise concernant le cinquième point. Elle ne précise pas ce qui est considéré comme un accroissement notable de la volatilité. L'appréciation est laissée à la discrétion de l'unité de contrôle. **Une réflexion doit donc être menée** et il est nécessaire de disposer de critères objectifs pour définir des signaux d'évolution de la volatilité et la **fréquence** des mesures lorsque l'*accroissement notable de la volatilité* s'est présenté.

A.1.4 Autres considérations

Dans ce paragraphe, nous présentons des points particuliers relatifs aux facteurs de marché, au risque spécifique et aux simulations de crise.

A.1.4.1 Définition des facteurs de risque de marché D'une manière générale, les grandes catégories de facteurs concernent :

- Les taux d'intérêt ;
- Les cours de change ;
- Les prix des titres de propriété et de produits de base³⁰ ;
- La volatilité des options correspondantes.

Plus précisément, la commission Bancaire propose de définir les facteurs de risque comme «les paramètres de marché qui affectent la valeur des positions de négociation de l'établissement» et propose un certain nombre de recommandations :

1. Pour les taux d'intérêt, un ensemble de facteurs de risque doit exister pour chaque monnaie.
 - La modélisation de la courbe des taux doit faire intervenir «plusieurs bandes de maturité, afin d'appréhender la variation de la volatilité des taux tout au long de l'échéancier ; à chaque bande correspond **au moins** un facteur de risque.»
 - Le système de mesure doit inclure «des facteurs distincts destinés à saisir le risque lié aux écarts de taux entre types d'instruments et/ou catégories d'émetteurs.»
2. Pour les cours de change, on doit prévoir «des facteurs correspondant au cours contre monnaie nationale de chaque devise.»

³⁰Les risques de marché concernent aussi les produits sur matières premières. Cela apparaît clairement dans l'actualisation du 31 décembre 1998 (référence [20]) :

Enfin, par instruments sur produits de base, il faut comprendre tous contrats à terme ou d'échange, toutes options achetées ou tous produits dérivés similaires ayant pour sous-jacents des contrats sur produits énergétiques, productions agricoles ou métaux non ferreux (par exemple aluminium, cuivre et zinc), ainsi que les autres métaux non précieux.

3. «Les facteurs de risque doivent exister pour chacun des marchés de titres de propriété. Au minimum, un facteur de risque doit appréhender les fluctuations des prix d'un marché donné (indice de marché). Une méthode plus détaillée consiste à définir des facteurs de risque correspondant aux différents secteurs du marché. L'approche la plus complète consiste à retenir comme facteurs de risque les titres spécifiques.»
4. Pour les produits de base, un facteur de risque unique peut être admis lorsque les positions sont faibles. En cas d'activité plus importante, les modèles doivent tenir compte des différences entre qualités du même produit et maturités.
5. Pour les options, on doit tenir compte de «facteurs de risque appréhendant la volatilité des taux/prix/cours sous-jacents.» Lorsque les positions sont importantes ou lorsque l'actif conditionnel est complexe, on doit utiliser «des volatilités différenciées en fonction des échéances et le cas échéant des prix d'exercice.»

Ce dernier point est important, puisque la Commission Bancaire précise comment doit être pris en compte le risque de volatilité. D'une manière générale, l'aspect *volatility skew*³¹ doit être intégré dans le modèle. Il est aussi intéressant de remarquer la construction du troisième point. A sa lecture, la meilleure méthode consisterait à prendre en compte la totalité des prix de titres pour définir les facteurs de risque. Cependant, ce type d'approche pose des problèmes statistiques importants liés à la théorie de convergence des estimateurs, de telle sorte que, concrètement, une application à la lettre du point 3 peut être dangereuse.

A.1.4.2 Traitement du risque spécifique Nous rappelons que le risque spécifique «*vis*e à tenir compte du risque de contrepartie lié à l'**émetteur** de l'instrument» (document [10], page 9). Les modèles internes, qui prennent en compte ce risque spécifique, doivent satisfaire les critères suivants :

- «Le modèle est apte à expliquer **ex ante** les variations historiques des valeurs du portefeuille,
- il fournit la preuve de sa sensibilité au risque de concentration dans la composition du portefeuille,
- sa fiabilité de fonctionnement demeure **bonne** dans un environnement **adverse**,
- la qualité de ses performances est justifiée par un contrôle ex-post (backtesting),
- la méthodologie sous-jacente doit être en mesure de prendre en compte le risque d'événements imprévisibles (OPA, OPE, etc.) ainsi que le risque de défaillance de l'émetteur.»

La conséquence immédiate de la non prise en compte du risque spécifique dans le modèle est que

... les exigences de fonds propres pour la couverture du risque spécifique feront l'objet d'une surcharge en capital.

Le mode de calcul de l'exigence de fonds propres est relativement peu clair dans ce cas (voir page 53 du document [15]). Néanmoins, la Commission bancaire fournit la formule suivante :

- soit $3 \times (VaR \text{ globale}) + (VaR \text{ risque spécifique du portefeuille global})$,
- soit $3 \times (VaR \text{ globale}) + (VaR \text{ des sous-portefeuilles contenant du risque spécifique})$.

³¹La notion de *volatility skew* (ou *volatility smile*) correspond au fait que la volatilité implicite des options de même maturité n'est pas constante et qu'elle dépend des prix d'exercice. Si nous représentons sur un graphe la volatilité en fonction du prix d'exercice, nous obtenons une courbe qui ressemble souvent à un sourire.

Il est difficile de faire le lien entre cette formule et la formule (89). Dans l'actualisation du 31 décembre 1998 (référence [20]), la Commission Bancaire est encore moins précise sur le risque spécifique puisque le paragraphe traitant de ce sujet se réduit à "une peau de chagrin". **Il est donc nécessaire de contacter le Secrétariat Général de la Commission Bancaire afin qu'elle précise clairement les modalités de prise en compte du risque spécifique dans le calcul de l'exigence de fonds propres.** Néanmoins, nous pouvons penser que le coefficient 3 est en fait le coefficient multiplicatif $3 + \xi$. En notant VaR_{sp} la VaR du risque spécifique (c'est-à-dire la VaR risque spécifique du portefeuille global ou la VaR des sous-portefeuilles contenant du risque spécifique), il est possible que la vraie formulation soit

$$FP(t) = \max \left(P(t-1) + VaR_{sp}(t-1), (3 + \xi) \times \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} P(t-i) + \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_{sp}(t-i) \right) \quad (90)$$

Il est intéressant de noter que la Commission Bancaire fait explicitement référence à la VaR (Value-at-Risk) que nous pouvons traduire sous le terme de "*valeur en risque*". Même si cela n'est pas affirmé parfaitement, la méthode interne de référence est clairement la VaR .

A.1.4.3 Simulations de crise Nous rappelons que les simulations de crise font partie des normes générales d'acceptation de la méthode interne. C'est donc un point important dans la mise en place d'un modèle interne. Celles-ci font d'ailleurs l'objet d'un paragraphe dans le texte de la Commission Bancaire. 7 points sont alors évoqués :

1. «Les établissements... **doivent se doter d'un programme de simulations** de crise à la fois rigoureux et complet. Ces simulations, qui permettent d'identifier les événements susceptibles d'avoir une forte incidence, constituent un **élément-clé** de l'évaluation du niveau des risques.
2. Elles doivent couvrir toute la gamme des facteurs, y compris les événements à probabilité réduite. Elles doivent aussi rendre compte de l'impact de ces événements sur les produits linéaires et non linéaires.
3. Les simulations de crise doivent revêtir un caractère quantitatif et qualitatif. En outre, l'établissement doit dresser l'inventaire des mesures à prendre pour réduire ses risques et préserver son capital. Leurs conclusions doivent être communiquées systématiquement à la direction générale, et périodiquement, au conseil d'administration.
4. L'exercice prudentiel consiste à tester sur le portefeuille courant des situations passées de perturbations majeures, en tenant compte des fortes variations de prix et de la vive réduction de la liquidité associées à ces événements et/ou à évaluer la sensibilité des positions de marché aux modifications des hypothèses de volatilité et corrélations, ce qui nécessite une mesure des marges de fluctuations de ces valeurs dans le passé et un calcul sur la base des chiffres **extrêmes**.
5. Ces scénarios doivent notamment comprendre les situations que l'établissement identifie comme étant les plus défavorables, sur la base des caractéristiques de son portefeuille.
6. La Commission Bancaire peut demander à l'établissement d'évaluer l'impact de scénarios qu'elle a définis et de lui communiquer l'ensemble des conclusions.
7. Les résultats doivent être revus à intervalles régulier par la Direction Générale et être pris en compte dans la définition des limites et stratégies fixées. En outre, si la simulation

fait apparaître une vulnérabilité particulière à un ensemble donné de circonstances, l'établissement doit prendre rapidement les mesures nécessaires à une gestion adéquate de ces risques.»

Nous voyons ici l'importance de la direction générale dans le système de gestion des risques. Celle-ci doit être continuellement informée. Il est intéressant de noter que le cœur du modèle interne doit être basé sur les événements extrêmes. Le modèle doit donc bien mesurer **une perte potentielle, un risque extrême**. Enfin, nous devons aussi remarquer l'importance de la Commission Bancaire qui, si elle le désire, peut intervenir et demander à l'établissement de chiffrer des scénarios.

A.1.5 Dispositif prudentiel de contrôle ex post

Les contrôles ex post visent à s'assurer que le degré de couverture observé correspond bien au niveau de confiance de 99%. Voici quelques éléments pour mener à bien ces contrôles :

1. Ils sont réalisés à partir des résultats réels et/ou hypothétiques.
2. Ils sont réalisés au moins trimestriellement et les données des douze derniers mois glissants doivent être utilisées.

Ces contrôles permettent notamment de calculer les exceptions. Une exception correspond à une date où la perte dépasse le risque calculé par le modèle. La Commission Bancaire utilise le nombre d'exceptions pour valider le modèle et pour déterminer le coefficient multiplicateur $(3 + \xi)$. Elle définit le concept de probabilité cumulée des exceptions comme «la probabilité d'obtenir au maximum le nombre d'exceptions indiqué avec un taux de couverture effectif de 99%.» Voyons de façon concrète comment le calcul est effectué. Si \varkappa désigne la variable qui prend la valeur 1 dans le cas d'une exception, alors \varkappa est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{100}$ (nous avons une chance sur 100 pour que \varkappa corresponde à une exception lorsque le taux effectif de couverture est de 99%). Si on considère une période $[t_1, t_2]$ comprenant N jours ouvrés. Pendant cette période, et sous l'hypothèse que les événements sont indépendants, la probabilité d'avoir n exceptions est égale à

$$\Pr(X = n) = C_N^n p^n (1 - p)^{N-n}$$

avec X la variable aléatoire correspondant au nombre d'exceptions pour la période $[t_1, t_2]$. X correspond bien sûr à une variable aléatoire Binomiale \mathcal{B}_p^N . La probabilité cumulée d'avoir n exceptions a donc pour expression

$$\Pr(X \leq n) = \sum_{i=1}^n C_N^i p^i (1 - p)^{N-i}$$

La Commission Bancaire définit alors trois zones pour évaluer les résultats des contrôles ex post et pour appliquer le complément éventuel au coefficient multiplicateur 3 :

Zone	Définition de la zone	Valeur de ξ
Verte	$\Pr(X \leq n) < 95\%$	0
Orange	$\Pr(X \leq n) < 99.99\%$	0 - 1
Rouge	$\Pr(X \leq n) \geq 99.99\%$	1

A titre d'illustration, nous reproduisons le tableau de la Commission Bancaire pour N égal à 250 jours ouvrés.

Zone	Nombre n d'exceptions	Probabilité (en %)	Probabilité cumulée	Majoration du facteur de multiplication
		$\Pr(X = n)$	$\Pr(X \leq n)$	
Verte	0	8.1059	8.1059	0.00
	1	20.469	28.575	0.00
	2	25.742	54.317	0.00
	3	21.495	75.812	0.00
	4	13.407	89.219	0.00
Orange	5	6.663	95.882	0.40
	6	2.748	98.630	0.50
	7	0.968	99.597	0.65
	8	0.297	99.894	0.75
	9	0.081	99.975	0.85
Rouge	10+	0.020	99.995	1.00

Le graphique (27) représente le nombre critique d'exceptions pour la détermination des frontières des zones verte, orange et rouge. La lecture du graphique est la suivante : Par exemple, pour 500 jours ouvrés, la zone verte est défini pour un nombre d'exceptions inférieur ou égal à 8, la zone orange va de 9 à 14 exceptions et la zone rouge commence à 15 exceptions.

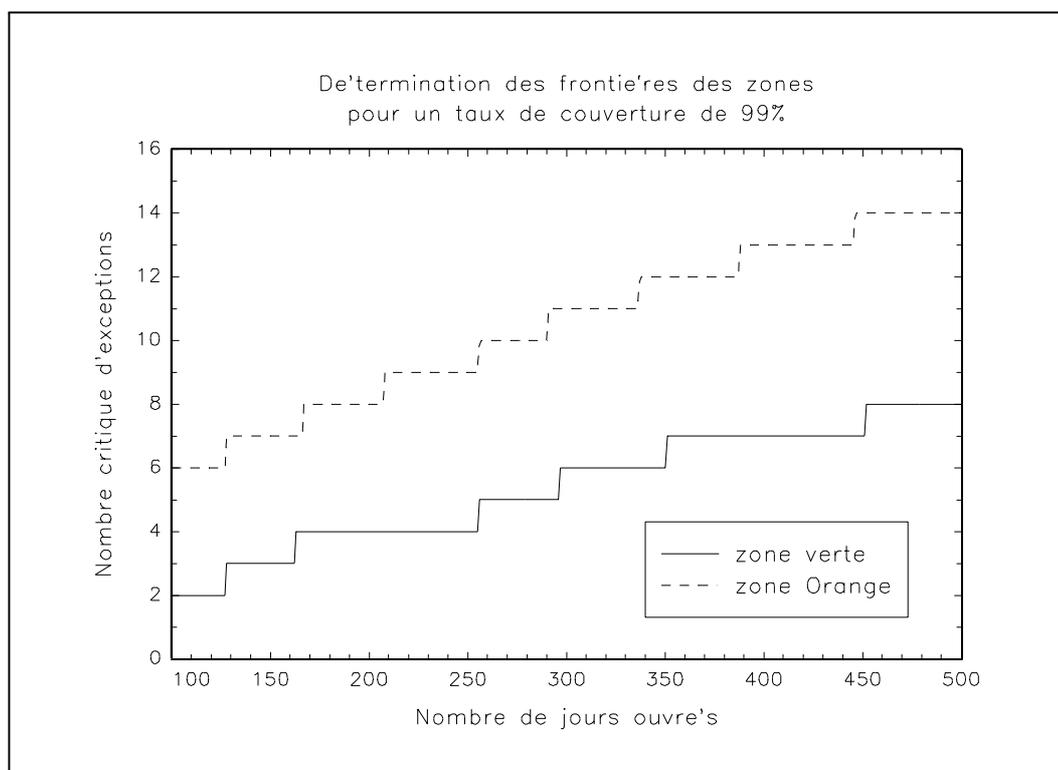


FIG. 27:

Toutefois, la Commission Bancaire ne précise pas comment est calculé la majoration du facteur multiplicatif dans la zone orange. Elle précise néanmoins que celles-ci «ne sont toutefois pas destinées à être appliquées **de façon purement automatique**, plusieurs éléments d'information pouvant être pris en compte pour compléter l'évaluation.»

Remarque 8 *La position de la Commission Bancaire n'est pas très claire sur le facteur multiplicateur. Nous avons vu dans le paragraphe consacré aux critères qualitatifs que le degré de conformité à ces critères peut conditionner le niveau de multiplicateur. Ici, nous avons l'impression que ce niveau est presque entièrement déterminé par la procédure de backtesting.*

L'actualisation du 31 décembre 1998 permet de préciser et de modifier certains points. En premier lieu, le backtesting porte sur la *Valeur en Risque sur un jour*, et non sur la *Valeur en Risque* pour une période de détention de 10 jours. Ensuite, les contrôles doivent porter **sur les 250 derniers jours ouvrables**. Cela est important, car si nous supposons que les "douze derniers mois" correspondent à 260 jours, les zones sont définies différemment à cause du caractère *escalier* de la loi Binomiale :

Zone	$N = 250$	$N = 260$
Verte	moins de 5 exceptions	moins de 6 exceptions
Orange	entre 5 et 9 exceptions	entre 6 et 10 exceptions
Rouge	plus de 10 exceptions	plus de 11 exceptions

Enfin, les exceptions doivent être communiquées à la Commission Bancaire :

*Afin de permettre à la Commission Bancaire de vérifier en permanence l'adéquation du facteur complémentaire, l'établissement informe sans délai et, en tout état de cause, **dans les cinq jours ouvrables**, le Secrétariat Général de la Commission Bancaire, des dépassements révélés par leur programme de contrôle ex-post qui, en fonction du tableau ci-dessus, impliqueraient un relèvement du facteur complémentaire.*

A.2 La réglementation de l'Union Européenne ou CAD (Capital Adequacy Directive)

Celle-ci correspond à la directive 93/6/CEE du 15 mars 1993 (référence [2]). Elle a été transposée en droit français et correspond dans ce cas au règlement 95-02 du Comité de Réglementation Bancaire et Financière (référence [5]). C'est un règlement très important puisqu'**il autorise les établissements à utiliser leurs modèles internes**. La plupart des articles qui composent ce règlement ont été repris dans le texte [15] de la Commission Bancaire. Nous présenterons donc dans cette sous-section les points qui complètent vraiment ceux abordés dans la sous-section précédente.

Ce dispositif réglementaire prévoit des exigences de fonds propres au titre des risques résultant des opérations de marché suivantes :

1. le risque de taux d'intérêt,
2. les risques liés à la variation des prix des titres de propriété,
3. le risque de règlement-contrepartie,
4. et le risque de change.

Le risque optionnel n'est pas oublié et fait l'objet d'un développement important dans les annexes consacrées aux risques de type 1 et 2. Il est intéressant de noter que «les exigences de fonds propres s'appliquent, pour les trois premiers types de risque au seul portefeuille de négociation, alors que le risque de change a pour assiette l'ensemble des éléments de bilan et hors bilan» (page 3, référence [9]).

La directive 93/6/CEE précise que les «établissements évaluent quotidiennement leur portefeuille de négociation au prix de marché.» Elle ajoute que

Lorsqu'il n'existe pas de prix de marché aisément disponibles, par exemple dans le cas d'opérations portant sur de nouvelles émissions sur les marchés primaires, les autorités compétentes peuvent ne pas appliquer la règle précédente et exiger que les établissements utilisent d'autres méthodes d'évaluation, pour autant que celles-ci soient suffisamment prudentes et qu'elles aient été approuvées par les autorités compétentes.

Ce paragraphe est intéressant, puisque c'est l'une des rares fois où la question des **marchés de gré à gré** est vraiment posée. On retrouve cette idée dans la réglementation [15] lorsque celle-ci évoque la fiabilité des données. Nous pouvons supposer que les réglementations futures aborderont ce problème de façon plus complète.

La directive met aussi l'accent sur la **communication d'informations**. Le paragraphe 1 de l'Article 8 indique les dispositions suivantes :

Les États membres exigent que les entreprises d'investissement et les établissements de crédit communiquent aux autorités compétentes de l'État membre d'origine toutes les informations nécessaires pour pouvoir vérifier que les règles adoptées en conformité avec la présente directive sont respectées. Ils veillent également à ce que les mécanismes de contrôle interne et les procédures administratives et comptables des établissements permettent de contrôler à tout moment le respect de ces règles.

Nous devons aussi préciser que ces textes ont été complétés et revus, notamment par les arrêtés portant homologation de règlements du Comité de la réglementation bancaire et financière paru au *Journal Officiel de la République Française* des 25 mars 1997 et 4 août 1999. Et de nouveaux textes réglementaires devraient voir le jour très rapidement comme le note La Tribune du 5 Août 1999 :

*On faisait remarquer hier à la Commission Bancaire que le présent règlement s'inscrivait dans **un vaste chantier de révision du ratio de solvabilité**, ou ratio Cooke. Le Comité de Bâle, réunissant les gouverneurs des banques centrales du G10, a publié en juin dernier un projet de refonte du ratio de solvabilité en s'attelant aux risques de crédit, après avoir déjà traité la question des risques de marché dès 1996. Un nouveau projet de directive, portant sur le traitement des risques de crédit, est attendu pour l'an prochain.*

A.3 Les autres textes relatifs à la mesure des risques de marché

Les textes mentionnés dans les deux sous-sections précédentes sont les textes réglementaires auxquels sont soumis les établissements financiers français. Il convient de ne pas perdre de vue que ceux-ci s'inspirent fortement d'autres textes et travaux. Il est donc nécessaire de suivre leur évolution afin de bien anticiper les futures réglementations, qui auront un impact important sur

le système de gestion des risques des établissements financiers. En premier lieu, il convient de bien suivre les travaux du Comité de Bâle.

A.3.1 Les travaux du Comité de Bâle

Le Comité de Bâle a été institué en 1975 par les gouverneurs des banques centrales des pays du G7. Actuellement, c'est un forum de coopération régulière en matière de contrôle bancaire rattaché à la Banque des Règlements Internationaux (ou BIS, Bank of International Settlements), qui tente d'établir des normes **minimales** de contrôle bancaire communes à tous les pays. Même s'il n'a aucun pouvoir réglementaire, ce groupe de travail a une influence énorme sur les normes réglementaires nationales. Pour être plus précis, le Comité de Bâle comprend plusieurs groupes. Celui qui nous intéresse ici concerne la composante "*Basle Committee on Banking Supervision*".

Le comité de Bâle a produit de nombreux documents concernant les risques de marché (voir par exemple les références [3], [4], [6], [7], [8], [12], [13], [17] ou [22]). Parmi ceux-ci, les plus intéressants pour la gestion des risques de marché sont ceux intitulés "Amendment to the capital accord to incorporate market risks" de janvier 1996 et "A new capital adequacy framework" de juin 1999. Le texte de 1996 a fortement inspiré le texte réglementaire de la Commission Bancaire. Il existe cependant une différence notable concernant le risque sur matières premières. Dans le texte du Comité de Bâle, celui-ci occupe une section entière. Voici quelques extraits qui montrent l'importance du sujet :

This section establishes a minimum capital standard to cover risk of holding or taking positions in commodities, including precious metals, but excluding gold (which is treated as a foreign currency). A security is defined as a physical product which is or can be treated on a secondary market, e.g., agricultural products, minerals (including oil) and precious metals.

*The price risk in commodities is **often more complex and volatile** than that associated with currencies and interest rates. Commodity market may also be less liquid than those for interest rates. These market characteristics can make price transparency and the effective hedging of commodity risk **more difficult**.*

D'autres différences existent, mais elles sont relativement mineures. Voici par exemple un point qui n'est pas repris *complètement* dans le texte de la Commission Bancaire :

...ensuring that the formulae used in the calculation process as well as for the pricing of options and other complex instruments are validated by a qualified unit, which in all cases should be independent from the trading area.

Le texte de 1999 n'est pas centré sur les risques de marché. Il est cependant fort intéressant, car il annonce clairement la mise en place de nouveaux travaux. Des modifications **importantes** sont donc à attendre dans le futur.

A.3.2 La note d'information n° 108 de la Banque de France

En octobre 1997, c'est-à-dire au moment de la parution des modalités de calcul du ratio international de solvabilité de la Commission Bancaire, la Banque de France produit une note d'information concernant les marchés dérivés. Dans cette note, elle rappelle l'utilité et l'importance des marchés des actifs conditionnels, mais aussi explique leur incidence sur les risques du

système financier. Une partie des économistes s'accordent d'ailleurs à considérer que ces marchés peuvent accroître fortement les risques du système financier. Et chaque nouvelle crise financière conduit certains économistes à redemander une réforme des systèmes bancaires et financiers (voir par exemple, l'article de Patrice Geoffron et Dominique Plihon. La peur d'un risque de système dû aux marchés dérivés conduira certainement à un renforcement des règles prudentielles dans ce domaine.

Cette note se focalise sur les marchés dérivés et sur leur régulation. Outre les risques individuels, ils font courir aussi **un risque systémique**. Sont visés en particulier les marchés de gré à gré :

*...les marchés de gré à gré sont dépourvus des mécanismes institutionnels de protection qui existent sur les marchés organisés. **Aucun mécanisme ne peut bloquer le développement d'une crise sur un marché et sa propagation aux autres marchés auxquels il est relié.***

La régulation passe alors par un renforcement de la réglementation prudentielle et une amélioration de la transparence (quantité et qualité de l'information). Ceci est à rapprocher des recommandations récentes du Comité de Bâle et du Comité Technique IOSCO (références [19] et [21]). Les mots d'ordre sont clairs :

- **Transparence**
- **Communication publique**
- **Information**

A titre d'illustration, voici un extrait de l'introduction du document de novembre 1998 :

*...to encourage financial institutions to enhance transparency of their trading and derivatives activities. **Transparency though public disclosure is crucial to effective market discipline** and can reinforce supervisory efforts **to promote high standards in risk management**. The two Committees consider transparency of banks' and securities firms' activities and risks to be a key element of an effective supervised financial system.*

Institutions should consider the quantitative and qualitative disclosures recommended by the two Committees in 1995, disclosure standards and recommendations issued by other national and recommendations issued by their peers at the international level.

A.3.3 Les travaux de la Federal Reserve Board

Comme le souligne DARIPA et VAROTTO [1997], l'utilisation de la *VaR* a un coût pour le régulateur, puisque celui-ci doit s'assurer que le modèle interne est conforme. Cela a conduit un groupe de chercheurs de la Federal Reserve Board (voir les références [81] et [82]) à proposer une autre approche de la régulation connue sous le nom de PCA (*Pre-commitment Approach*). Dans cette approche, l'établissement financier annonce un niveau pré-défini de perte potentielle \bar{P} . Ce niveau supérieur est le *pre-commitment capital*. Chaque fois que la perte **réelle** dépasse \bar{P} , l'établissement paye des pénalités au régulateur. C'est donc un mécanisme de vérification ex post et non plus ex ante comme pour la *VaR*. Pour le régulateur, ce système a un double avantage :

1. Le *pre-commitment capital* représente le risque de marché que l'établissement financier s'engage à ne pas dépasser. Il est alors tout à fait possible de classer les différents établissements financiers.
2. L'autorité de régulation contrôle en fait le niveau de risque des établissements financiers en "facturant", par des pénalités, les dépassements.

L'instauration du PCA a une conséquence importante pour l'établissement financier. Car si le *pre-commitment capital* est public, l'établissement qui dépasse le niveau de perte pré-défini est également "puni" (outre les pénalités) par la mauvaise réputation qu'il acquiert à cette occasion.

A.4 Conclusion

La réglementation sur la gestion des risques de marché couvre un champ assez large et apparaît relativement complète et précise. Le système de gestion des risques n'est plus considérée comme une unité à l'intérieur de l'établissement financier, mais s'intègre plus dans une vision stratégique tout comme le ROE – return on equity – (BAKER, TATTERSALL et WILSON [1996]). Ce système doit donc s'intégrer à toutes les composantes de l'établissement financier et à tous les niveaux hiérarchiques, de façon efficace. Cela suppose bien sûr que les équipes, si cela n'est déjà fait, acquièrent une compétence sur ce domaine. Cela suppose aussi que les hiérarchies supérieures (conseil d'administration, direction générale, etc.) soient activement associées au processus de contrôle des risques (et pas seulement des risques de marché).

Même si elle s'avère relativement contraignante, la réglementation actuelle sur les risques de marchés va évoluer dans le futur. Il convient d'anticiper ces évolutions et de mettre en place un comité de veille technologique sur ces évolutions probables qui concerneront certainement :

- Les produits dérivés et les actifs conditionnels exotiques ;
- Les matières premières ;
- La production des informations adéquates sur le système de gestion, sur les modèles et les méthodes ;
- Le problème général des marchés de gré à gré.

B Biais de l'estimation de la matrice de covariance sur la *VaR*

B.1 Maximisation du Risque avec poids homogène

B.1.1 moyenne du biais

Moyenne du ratio <i>VaR</i> estimée/ <i>VaR</i> Maximale										
N \ K	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100	0.7286	0.5873	0.4817	0.3940	0.3149	0.2456	0.1817	0.1207	0.0634	0.0065
150	0.7796	0.6640	0.5787	0.5070	0.4439	0.3867	0.3349	0.2866	0.2405	0.1973
200	0.8085	0.7098	0.6368	0.5731	0.5197	0.4701	0.4257	0.3833	0.3435	0.3066
250	0.8299	0.7403	0.6739	0.6193	0.5708	0.5266	0.4863	0.4491	0.4134	0.3811
300	0.8441	0.7644	0.7032	0.6527	0.6086	0.5686	0.5319	0.4980	0.4660	0.4352
350	0.8558	0.7811	0.7254	0.6793	0.6381	0.6007	0.5667	0.5350	0.5054	0.4781
400	0.8657	0.7960	0.7438	0.7000	0.6618	0.6269	0.5951	0.5659	0.5383	0.5120
450	0.8732	0.8075	0.7584	0.7166	0.6818	0.6483	0.6185	0.5906	0.5645	0.5401
500	0.8797	0.8177	0.7706	0.7315	0.6974	0.6668	0.6381	0.6119	0.5871	0.5641

B.1.2 Ecart-type du biais

Ecart type du ratio <i>VaR</i> estimée/ <i>VaR</i> Maximale										
N \ K	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100	0.0405	0.0316	0.0277	0.0256	0.0227	0.0204	0.0176	0.0149	0.0119	0.0051
150	0.0336	0.0272	0.0232	0.0223	0.0201	0.0190	0.0173	0.0160	0.0155	0.0139
200	0.0294	0.0243	0.0223	0.0202	0.0185	0.0175	0.0169	0.0153	0.0154	0.0141
250	0.0254	0.0220	0.0203	0.0188	0.0176	0.0161	0.0160	0.0153	0.0142	0.0135
300	0.0243	0.0202	0.0182	0.0172	0.0157	0.0155	0.0143	0.0136	0.0132	0.0133
350	0.0223	0.0191	0.0171	0.0163	0.0154	0.0143	0.0142	0.0131	0.0126	0.0126
400	0.0211	0.0178	0.0163	0.0152	0.0145	0.0136	0.0131	0.0125	0.0122	0.0117
450	0.0194	0.0169	0.0153	0.0148	0.0135	0.0129	0.0127	0.0120	0.0116	0.0112
500	0.0185	0.0159	0.0146	0.0138	0.0130	0.0127	0.0118	0.0118	0.0113	0.0110

B.2 Maximisation du Rendement avec poids homogènes

B.2.1 moyenne du biais

Risques de Marché : Les aspects méthodologiques

Moyenne du ratio VaR estimée/ VaR Max qui maximise le Rendement										
N \ K	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100	0.9109	0.8093	0.7105	0.6109	0.5083	0.4096	0.3111	0.2098	0.1096	0.0099
150	0.9406	0.8740	0.8042	0.7382	0.6718	0.6056	0.5380	0.4727	0.4046	0.3392
200	0.9518	0.9050	0.8557	0.8028	0.7552	0.7037	0.6555	0.6043	0.5546	0.5039
250	0.9635	0.9232	0.8822	0.8432	0.8034	0.7635	0.7228	0.6833	0.6429	0.6031
300	0.9692	0.9360	0.9042	0.8691	0.8363	0.8022	0.7695	0.7368	0.7027	0.6691
350	0.9734	0.9441	0.9154	0.8868	0.8588	0.8314	0.8026	0.7731	0.7457	0.7165
400	0.9758	0.9520	0.9264	0.9029	0.8768	0.8524	0.8267	0.8029	0.7778	0.7516
450	0.9803	0.9576	0.9352	0.9123	0.8910	0.8678	0.8469	0.8228	0.8000	0.7795
500	0.9823	0.9628	0.9417	0.9212	0.9003	0.8825	0.8615	0.8405	0.8219	0.8003

B.2.2 Ecart-type du biais

Ecart type du ratio VaR estimée/ VaR qui maximise le Rendement										
N \ K	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100	0.0708	0.0684	0.0691	0.0645	0.0617	0.0570	0.0503	0.0426	0.0305	0.0101
150	0.0574	0.0570	0.0567	0.0542	0.0528	0.0525	0.0509	0.0491	0.0469	0.0433
200	0.0503	0.0502	0.0488	0.0479	0.0488	0.0470	0.0471	0.0461	0.0451	0.0433
250	0.0445	0.0447	0.0450	0.0450	0.0440	0.0436	0.0429	0.0424	0.0413	0.0422
300	0.0403	0.0409	0.0404	0.0405	0.0393	0.0396	0.0399	0.0388	0.0393	0.0390
350	0.0373	0.0374	0.0375	0.0384	0.0383	0.0369	0.0369	0.0372	0.0367	0.0360
400	0.0350	0.0348	0.0350	0.0353	0.0352	0.0358	0.0346	0.0346	0.0338	0.0340
450	0.0341	0.0328	0.0333	0.0344	0.0342	0.0332	0.0341	0.0335	0.0324	0.0329
500	0.0325	0.0307	0.0317	0.0313	0.0313	0.0310	0.0318	0.0311	0.0311	0.0302

B.3 Maximisation du Risque avec poids exponentiels

B.3.1 moyenne du biais

Moyenne du ratio VaR estimée/ VaR Maximale										
N \ K	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100	0.5416	0.3651	0.2571	0.1834	0.1299	0.0908	0.0612	0.0376	0.0183	0.0018
150	0.5417	0.3680	0.2608	0.1890	0.1372	0.1002	0.0729	0.0531	0.0384	0.0276
200	0.5402	0.3683	0.2611	0.1884	0.1376	0.1003	0.0735	0.0539	0.0394	0.0289
250	0.5428	0.3676	0.2619	0.1892	0.1377	0.1004	0.0735	0.0540	0.0395	0.0290
300	0.5428	0.3712	0.2621	0.1898	0.1377	0.1000	0.0737	0.0540	0.0396	0.0289
350	0.5405	0.3690	0.2615	0.1881	0.1376	0.1008	0.0736	0.0539	0.0395	0.0291
400	0.5422	0.3673	0.2610	0.1887	0.1370	0.1002	0.0736	0.0537	0.0397	0.0290
450	0.5415	0.3697	0.2613	0.1888	0.1371	0.1006	0.0734	0.0539	0.0392	0.0290
500	0.5414	0.3682	0.2611	0.1876	0.1375	0.1001	0.0735	0.0539	0.0395	0.0290

B.3.2 Ecart-type du biais

Risques de Marché : Les aspects méthodologiques

Ecart type du ratio VaR estimée/ VaR Maximale										
N \ K	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100	0.0466	0.0279	0.0209	0.0150	0.0112	0.0080	0.0066	0.0048	0.0035	0.0014
150	0.0457	0.0293	0.0207	0.0144	0.0107	0.0075	0.0056	0.0042	0.0032	0.0023
200	0.0469	0.0290	0.0206	0.0145	0.0101	0.0076	0.0055	0.0041	0.0030	0.0024
250	0.0456	0.0289	0.0203	0.0145	0.0105	0.0078	0.0056	0.0041	0.0030	0.0023
300	0.0493	0.0297	0.0197	0.0147	0.0106	0.0075	0.0055	0.0041	0.0031	0.0021
350	0.0449	0.0292	0.0203	0.0141	0.0105	0.0080	0.0056	0.0042	0.0031	0.0023
400	0.0469	0.0299	0.0210	0.0146	0.0106	0.0078	0.0056	0.0041	0.0030	0.0022
450	0.0451	0.0296	0.0201	0.0146	0.0109	0.0075	0.0056	0.0041	0.0031	0.0022
500	0.0449	0.0295	0.0197	0.0149	0.0104	0.0079	0.0057	0.0039	0.0030	0.0024

B.4 Maximisation du Rendement avec poids exponentiels

B.4.1 moyenne du biais

Moyenne du ratio VaR estimée/ VaR Max qui maximise le Rendement										
N \ K	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100	0.7269	0.5357	0.3910	0.2827	0.2038	0.1446	0.0980	0.0617	0.0302	0.0027
150	0.7323	0.5383	0.3942	0.2890	0.2119	0.1554	0.1138	0.0820	0.0604	0.0437
200	0.7253	0.5393	0.3964	0.2896	0.2117	0.1560	0.1142	0.0839	0.0613	0.0456
250	0.7346	0.5360	0.3960	0.2912	0.2123	0.1558	0.1148	0.0845	0.0615	0.0455
300	0.7330	0.5393	0.3909	0.2920	0.2126	0.1557	0.1150	0.0842	0.0620	0.0452
350	0.7305	0.5380	0.3956	0.2901	0.2115	0.1569	0.1149	0.0847	0.0616	0.0457
400	0.7296	0.5330	0.3931	0.2902	0.2126	0.1561	0.1150	0.0841	0.0618	0.0451
450	0.7294	0.5382	0.3966	0.2893	0.2137	0.1562	0.1151	0.0840	0.0607	0.0454
500	0.7287	0.5411	0.3991	0.2905	0.2134	0.1553	0.1139	0.0843	0.0619	0.0450

B.4.2 Ecart-type du biais

Ecart type du ratio VaR estimée/ VaR qui maximise le Rendement										
N \ K	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100	0.0945	0.0707	0.0573	0.0427	0.0307	0.0226	0.0169	0.0126	0.0086	0.0027
150	0.0971	0.0723	0.0552	0.0420	0.0308	0.0225	0.0164	0.0121	0.0089	0.0069
200	0.0961	0.0737	0.0567	0.0424	0.0297	0.0222	0.0164	0.0120	0.0090	0.0069
250	0.0959	0.0712	0.0539	0.0429	0.0307	0.0221	0.0162	0.0122	0.0089	0.0067
300	0.1011	0.0727	0.0540	0.0437	0.0301	0.0224	0.0164	0.0121	0.0090	0.0066
350	0.0949	0.0749	0.0552	0.0410	0.0299	0.0219	0.0161	0.0128	0.0092	0.0067
400	0.0971	0.0748	0.0562	0.0411	0.0304	0.0232	0.0168	0.0123	0.0086	0.0066
450	0.1000	0.0749	0.0557	0.0419	0.0310	0.0229	0.0167	0.0127	0.0085	0.0065
500	0.0942	0.0756	0.0578	0.0415	0.0314	0.0224	0.0159	0.0122	0.0092	0.0064

C Exemples numériques d'agrégation de *VaRs*

Nous considérons un marché \mathfrak{M} de dimension 5. Nous avons $\dim(\mathfrak{M}_1) = 2$ et $\dim(\mathfrak{M}_2) = 3$. Nous supposons que la structure de la matrice de corrélation Σ est la suivante

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cc|ccc} 16 & 18 & & & \\ 18 & 25 & & & \\ \hline & & \Sigma_{12} & & \\ \hline & \Sigma_{12}^\top & 4 & 2.4 & 6 \\ & & 2.4 & 9 & 4.5 \\ & & 6 & 4.5 & 36 \end{array} \right]$$

avec $\Sigma_{12} = \rho \sigma_1 \sigma_2^\top$. Nous nous plaçons donc dans le cas $\text{rang}(\Sigma_{12}) = 1$. Nous formons différents portefeuilles

$$\mathbf{a}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^3 = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \\ 10 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}^4 = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -10 \\ 18 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Pour chacun de ces portefeuilles, nous calculons la *VaR* globale $\mathfrak{R} = VaR(\mathfrak{M})$, la *VaR* de chacun des sous-portefeilles $\mathfrak{R}_1 = VaR(\mathfrak{M}_1)$ et $\mathfrak{R}_2 = VaR(\mathfrak{M}_2)$, ainsi que les quantités $\mathfrak{R}_a = \sqrt{[VaR(\mathfrak{M}_1)]^2 + [VaR(\mathfrak{M}_2)]^2}$ et $\mathfrak{R}_b = VaR(\mathfrak{M}_1) + VaR(\mathfrak{M}_2)$. Nous déterminons aussi les valeurs prises par $\hat{\rho}$, $\bar{\rho}$ et $\dot{\rho}$. Les résultats sont présentés dans les tableaux suivants. Nous vérifions bien que $\dot{\rho} = \rho$.

$\rho = -0.75$	\mathfrak{R}	\mathfrak{R}_1	\mathfrak{R}_2	\mathfrak{R}_a	\mathfrak{R}_b	$\hat{\rho}$	$\bar{\rho}$	$\dot{\rho}$
\mathbf{a}^1	4.226	20.414	20.120	28.662	40.534	-0.978	-0.978	-0.750
\mathbf{a}^2	40.314	20.414	20.120	28.662	40.534	0.978	-0.978	-0.750
\mathbf{a}^3	141.411	90.847	84.840	124.302	175.687	0.295	-0.978	-0.750
\mathbf{a}^4	219.295	77.156	185.321	200.741	262.477	0.273	-0.978	-0.750

$\rho = -0.50$	\mathfrak{R}	\mathfrak{R}_1	\mathfrak{R}_2	\mathfrak{R}_a	\mathfrak{R}_b	$\hat{\rho}$	$\bar{\rho}$	$\dot{\rho}$
\mathbf{a}^1	16.904	20.414	20.120	28.662	40.534	-0.652	-0.652	-0.500
\mathbf{a}^2	36.842	20.414	20.120	28.662	40.534	0.652	-0.652	-0.500
\mathbf{a}^3	135.947	90.847	84.840	124.302	175.687	0.197	-0.652	-0.500
\mathbf{a}^4	213.289	77.156	185.321	200.741	262.477	0.182	-0.652	-0.500

$\rho = -0.25$	\mathfrak{R}	\mathfrak{R}_1	\mathfrak{R}_2	\mathfrak{R}_a	\mathfrak{R}_b	$\hat{\rho}$	$\bar{\rho}$	$\dot{\rho}$
\mathbf{a}^1	23.529	20.414	20.120	28.662	40.534	-0.326	-0.326	-0.250
\mathbf{a}^2	33.006	20.414	20.120	28.662	40.534	0.326	-0.326	-0.250
\mathbf{a}^3	130.255	90.847	84.840	124.302	175.687	0.098	-0.326	-0.250
\mathbf{a}^4	207.110	77.156	185.321	200.741	262.477	0.091	-0.326	-0.250

$\rho = 0$	\mathfrak{R}	\mathfrak{R}_1	\mathfrak{R}_2	\mathfrak{R}_a	\mathfrak{R}_b	$\hat{\rho}$	$\bar{\rho}$	$\dot{\rho}$
\mathbf{a}^1	28.662	20.414	20.120	28.662	40.534	0	0	0
\mathbf{a}^2	28.662	20.414	20.120	28.662	40.534	0	0	0
\mathbf{a}^3	124.302	90.847	84.840	124.302	175.687	0	0	0
\mathbf{a}^4	200.741	77.156	185.321	200.741	262.477	0	0	0

Risques de Marché : Les aspects méthodologiques

$\rho = 0.25$	\mathfrak{R}	\mathfrak{R}_1	\mathfrak{R}_2	\mathfrak{R}_a	\mathfrak{R}_b	$\dot{\rho}$	$\bar{\rho}$	$\dot{\rho}$
\mathbf{a}^1	33.006	20.414	20.120	28.662	40.534	0.326	0.326	0.250
\mathbf{a}^2	23.529	20.414	20.120	28.662	40.534	-0.326	0.326	0.250
\mathbf{a}^3	118.049	90.847	84.840	124.302	175.687	-0.098	0.326	0.250
\mathbf{a}^4	194.163	77.156	185.321	200.741	262.477	-0.091	0.326	0.250

$\rho = 0.50$	\mathfrak{R}	\mathfrak{R}_1	\mathfrak{R}_2	\mathfrak{R}_a	\mathfrak{R}_b	$\dot{\rho}$	$\bar{\rho}$	$\dot{\rho}$
\mathbf{a}^1	36.842	20.414	20.120	28.662	40.534	0.652	0.652	0.500
\mathbf{a}^2	16.904	20.414	20.120	28.662	40.534	-0.652	0.652	0.500
\mathbf{a}^3	111.446	90.847	84.840	124.302	175.687	-0.197	0.652	0.500
\mathbf{a}^4	187.354	77.156	185.321	200.741	262.477	-0.182	0.652	0.500

$\rho = 0.75$	\mathfrak{R}	\mathfrak{R}_1	\mathfrak{R}_2	\mathfrak{R}_a	\mathfrak{R}_b	$\dot{\rho}$	$\bar{\rho}$	$\dot{\rho}$
\mathbf{a}^1	40.314	20.414	20.120	28.662	40.534	0.978	0.978	0.750
\mathbf{a}^2	4.226	20.414	20.120	28.662	40.534	-0.978	0.978	0.750
\mathbf{a}^3	104.427	90.847	84.840	124.302	175.687	-0.295	0.978	0.750
\mathbf{a}^4	180.288	77.156	185.321	200.741	262.477	-0.273	0.978	0.750

Le lien entre $\dot{\rho}$ et Σ_{12} devient plus difficile à appréhender lorsque Σ_{12} a une structure quelconque. Considérons la matrice de covariance

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cc|ccc} 16 & -10 & -2 & 0 & 8.4 \\ -10 & 25 & 2.5 & 8.4 & -15 \\ \hline -2 & 2.5 & 4 & -1.2 & 3 \\ 0 & 8.4 & -1.2 & 9 & -4.5 \\ 8.4 & -15 & 3 & -4.5 & 36 \end{array} \right]$$

Nous obtenons alors les résultats suivants :

	\mathfrak{R}	\mathfrak{R}_1	\mathfrak{R}_2	\mathfrak{R}_a	\mathfrak{R}_b	$\dot{\rho}$	$\bar{\rho}$	$\dot{\rho}$
\mathbf{a}^1	19.352	10.661	15.361	18.698	26.022	0.076	0.076	0.023
\mathbf{a}^2	18.020	10.661	15.361	18.698	26.022	-0.076	0.076	0.023
\mathbf{a}^3	142.478	176.020	100.276	202.579	276.296	-0.587	0.076	3.421
\mathbf{a}^4	337.072	145.280	238.901	279.607	384.182	0.511	0.076	-3.410

Avec la matrice de covariance

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cc|ccc} 16 & -10 & -0.4 & 0.6 & 1.2 \\ -10 & 25 & 0.5 & 0.75 & -1.5 \\ \hline -0.4 & 0.5 & 4 & -1.2 & 3 \\ 0.6 & 0.75 & -1.2 & 9 & -4.5 \\ 1.2 & -1.5 & 3 & -4.5 & 36 \end{array} \right]$$

les résultats deviennent

	\mathfrak{R}	\mathfrak{R}_1	\mathfrak{R}_2	\mathfrak{R}_a	\mathfrak{R}_b	$\hat{\rho}$	$\bar{\rho}$	$\dot{\rho}$
\mathbf{a}^1	19.028	10.661	15.361	18.698	26.022	0.038	0.038	0.012
\mathbf{a}^2	18.362	10.661	15.361	18.698	26.022	-0.038	0.038	0.012
\mathbf{a}^3	195.704	176.020	100.276	202.579	276.296	-0.078	0.038	0.452
\mathbf{a}^4	284.253	145.280	238.901	279.607	384.182	0.038	0.038	-0.252

Dans le premier cas, nous obtenons parfois des corrélations implicites $\hat{\rho}$ supérieures à 1. Dans le deuxième cas, les éléments de corrélation entre les actifs des marchés \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 sont tous inférieurs à 5% en valeur absolue. Pourtant, nous observons encore des corrélations implicites qui peuvent être élevées (près de 50% pour le portefeuille \mathbf{a}^3). L'utilisation de la règle (3) en employant une corrélation implicite pose donc des difficultés, d'autant plus qu'il est nécessaire de connaître la composition des sous-portefeuilles. En revanche, l'utilisation de la règle (4) semble plus intéressante. Tout d'abord, elle utilise seulement les valeurs des différentes *VaRs*. Elle est donc relativement simple à mettre en place. Ensuite, nous remarquons que la corrélation ρ_{12} (qui correspond pour cet exemple à $\hat{\rho}$) est faible pour la deuxième matrice de covariance. **Une étude plus approfondie pourrait confirmer ce fait.** Dans ce cas, si les marchés sont effectivement segmentés, nous pourrions agréger les *VaRs* avec la règle (4) en supposant des corrélations ρ_{12} relativement faibles.

D Annexe de la section 4.2

D.1 Forme générale d'une loi d'extrêmes

Nous pouvons montrer que la forme générale d'une loi d'extrêmes est $\exp(h(x))$. Nous avons $\mathbf{G}_N(x) = \mathbf{F}(x)^N$ et

$$d\mathbf{G}_N(x) = \mathbf{F}(x)^N \ln \mathbf{F}(x) dN + N\mathbf{F}(x)^{N-1} f(x) dx \quad (91)$$

Nous en déduisons que

$$d \ln \mathbf{G}_N(x) = \ln \mathbf{F}(x) dN + N \frac{f(x)}{\mathbf{F}(x)} dx := h_N(x) \quad (92)$$

Il est alors facile de montrer que sous certaines conditions de régularité, $h_N(x) = h(x)$ lorsque $N \rightarrow \infty$ et $\mathbf{F}(x) \rightarrow 1^-$. En introduisant une contrainte de stabilité (la distribution des extrema d'un sous-échantillon doit être la même que celle de l'échantillon original), BOULIER, BRABANT, DALAUD et DIEU [1997] montrent que h est la solution d'une équation fonctionnelle qui ne possède que trois solutions.

D.2 Jacobien analytique de la fonction de log-vraisemblance

Nous avons

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \ell(\chi_n^+; \theta) &= \frac{1 + \xi - \omega^{-\frac{1}{\xi}}}{\sigma \omega} \\ \partial_{\sigma} \ell(\chi_n^+; \theta) &= \frac{\left((1 + \xi) - \omega^{-\frac{1}{\xi}} \right) (\chi_n^+ - \mu) - \sigma \omega}{\sigma^2 \omega} \\ \partial_{\xi} \ell(\chi_n^+; \theta) &= \left(1 - \omega^{-\frac{1}{\xi}} \right) \left(\frac{1}{\xi^2} \ln \omega - \frac{(\chi_n^+ - \mu)}{\xi \sigma \omega} \right) - \frac{(\chi_n^+ - \mu)}{\sigma \omega} \end{aligned} \quad (93)$$

avec

$$\omega = 1 + \xi \left(\frac{\chi_n^+ - \mu}{\sigma} \right) \quad (94)$$