

Value at Risk

(mesure de capital économique)

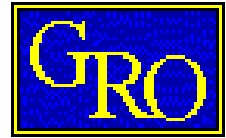
les risques de crédit

Gaël Riboulet & Thierry Roncalli

Groupe de Recherche Opérationnelle

Crédit Lyonnais

email : gael.riboulet@creditlyonnais.fr,
thierry.roncalli@creditlyonnais.fr



Finance et Assurance Appliquées

Présentation du Risque de Crédit

Gaël Riboulet et Thierry Roncalli

Crédit Lyonnais - Groupe de Recherche Opérationnelle

Décembre 1999

1 Introduction

Les établissements financiers sont exposés de par leurs activités à de nombreux types de risques. L'évaluation et la couverture de ces risques nécessitent la plupart du temps de faire appel aux mathématiques pour la formalisation et la quantification des problèmes posés. Ainsi, depuis le début des années 1970 a-t-on vu se développer de nombreux outils dans le domaine des probabilités et du calcul stochastique afin de répondre à la demande croissante des marchés financiers. Les travaux réalisés jusqu'ici se sont surtout concentrés sur les méthodologies d'évaluation et de couverture de produits comportant des risques de marché. La tendance actuelle est à l'élaboration de méthodes équivalentes pour le traitement du risque de crédit. L'état de l'art dans ce domaine distingue pour le moment trois approches.

La première, connue sous le nom d'approche structurelle ou modèle de valeur de la firme, date de 1974 avec R. MERTON. Sa philosophie est proche de celle de la théorie des options. Elle repose entre autre sur l'idée que les prix des actifs contiennent l'ensemble de l'information accessible. Sous cette hypothèse, les actions et les obligations risquées émises par une société apparaissent comme des options dont on peut évaluer le prix.

La seconde approche se base sur les statistiques d'agences de rating telles que Moody's et Standard & Poor's. C'est la méthodologie la plus fréquemment utilisée aujourd'hui dans les banques pour mesurer le risque de crédit. Elle fut introduite pour la première fois en 1994 par JP Morgan dans un document technique intitulé CreditMetricsTM.

Enfin la troisième et dernière approche, dite approche par intensité, est beaucoup plus récente. Elle est le sujet de nombreux travaux actuellement et offre de nombreuses perspectives tant pour la construction de courbe de taux risqués que pour le pricing de produits dérivés. Les résultats principaux de cette approche sont notamment dûs à Darrell DUFFIE, Kenneth J. SINGLETON, D. LANDO, R. JARROW, R. TURNBULL, et plus récemment à Monique JEANBLANC et Marek RUTKOWSKI. Le défaut d'une firme dans cette approche est vu comme un événement qui ne peut pas être lu dans les prix. Il est donc modélisé comme un processus ayant une intensité, c'est à dire un taux instantané d'occurrence.

Ce document aborde les modèles de référence de chacune des approches rencontrées sur le risque de crédit. Aussi, d'un point de vue chronologique, il semble légitime de présenter le modèle de la firme de Merton et les modèles qu'il a engendrés. Dans un second temps nous présentons l'approche plus opérationnelle de CreditMetrics et finalement l'approche par intensité surtout développée ces deux dernières années.

2 *Structural Approach*

Le premier article sur le risque de crédit apparu dans la littérature est celui de Merton, paru en 1974 dans *The Journal of Finance* sous le titre "On the Pricing of Corporate Debt : The Risk Structure of Interest Rates". Pour la première fois, un modèle de valorisation était proposé pour des obligations émises par des firmes dont le risque de défaillance n'était pas négligeable. Ainsi, Merton s'inscrit comme le précurseur des travaux menés sur le risque de crédit. Cette approche fut ensuite prolongée et certaines hypothèses faites par Merton ont pu être relaxées.

2.1 Le modèle de Merton [1974]

Merton a développé un modèle de valorisation du type Black-Schole sous les hypothèses suivantes :

1. Il n'y a ni coûts de transaction, ni taxes, ni problèmes d'indivisibilité des actifs.
2. Il existe un marché où l'on peut prêter et emprunter au même taux d'intérêt.
3. La vente à découvert des actifs est permise.
4. Le théorème de Modigliani-Miller, selon lequel la valeur de la firme est indépendante de sa structure financière s'applique. Si V désigne la valeur de la firme, E la valeur de marché des actions et B la valeur de marché des obligations :

$$V = E + B$$

5. La courbe des taux est plate et connue avec certitude.
6. La dynamique de la valeur de la firme, V , est décrite par une diffusion satisfaisant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dV_t = (\alpha V_t - C) dt + \sigma V_t dW_t$$

où α est le taux de rendement instantané de la firme par unité de temps, C le versement de la firme par unité de temps à ses porteurs d'obligations ou à ses actionnaires (e.g. des paiements d'intérêts ou des dividendes), σ^2 la variance instantanée des rendements de la firme par unité de temps et z un mouvement brownien standard.

Supposons qu'il existe un actif dont la valeur de marché, Y , peut s'écrire comme une fonction de la valeur de la firme et du temps, i.e. $Y = H(V, t)$. Alors, le prix de cet actif satisfaisait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\sigma^2}{2} V^2 H_{VV} + (rV - C) H_V - rH + H_t + C_y = 0$$

où C_y est le coupon ou le dividende du titre Y par unité de temps, et $H_x = \frac{\partial H}{\partial x}$. Comme application de la formule précédente, Merton a étudié la valorisation de la dette d'une entreprise sous certaines hypothèses. Le passif de la firme se compose uniquement de deux sortes d'engagements : la dette et les actions. Il impose en outre certaines restrictions sur la dette : la firme promet de payer la somme B à ses créanciers à un instant spécifié T , et dans le cas d'un non-paiement à T , les créanciers reprennent immédiatement l'entreprise (et les détenteurs d'actions ne reçoivent rien). Enfin, on suppose que la firme ne peut pas émettre de nouvelles obligations ni payer des dividendes durant la période. Si on note par F la valeur de cette obligation, on a :

$$\frac{\sigma^2}{2} V^2 F_{VV} + rV F_V - rF - F_\tau = 0$$

où $\tau = T - t$ le temps restant avant la maturité de l'obligation et donc $F_t = -F_\tau$. La condition initiale à $\tau = 0$ est

$$F(V, 0) = \min[V, B]$$

En effet, si à T , la valeur V de la firme est inférieure au montant B de sa dette, la firme est en situation de défaut, les créanciers se partagent V et les actionnaires ne reçoivent rien. Dans le cas contraire, ils reçoivent B .

On pourrait résoudre cette équation différentielle, mais Merton a remarqué que l'on pouvait éviter de nombreuses difficultés en se ramenant à un problème déjà étudié. En effet, si l'on cherche à résoudre le problème complémentaire, à savoir déterminer la valeur de l'action $f(V, \tau)$. On a $f(V, \tau) = V - F(V, \tau)$ et on obtient comme équation différentielle vérifiée par f :

$$\frac{\sigma^2}{2} V^2 f_{VV} + rV f_V - rf - f_\tau = 0$$

avec comme condition initiale :

$$f(V, 0) = \max[0, V - B]$$

Cette remarque permet alors de résoudre de manière aisée les équations différentielles donnant $f(V, \tau)$ et $F(V, \tau)$. Ainsi, la détention des actions est-elle équivalente à celle d'un Call sur la valeur de la firme, de prix d'exercice B et de même maturité que la dette ; la détention des obligations est elle équivalente à la celle de la firme elle-même et d'une position courte sur le Call.

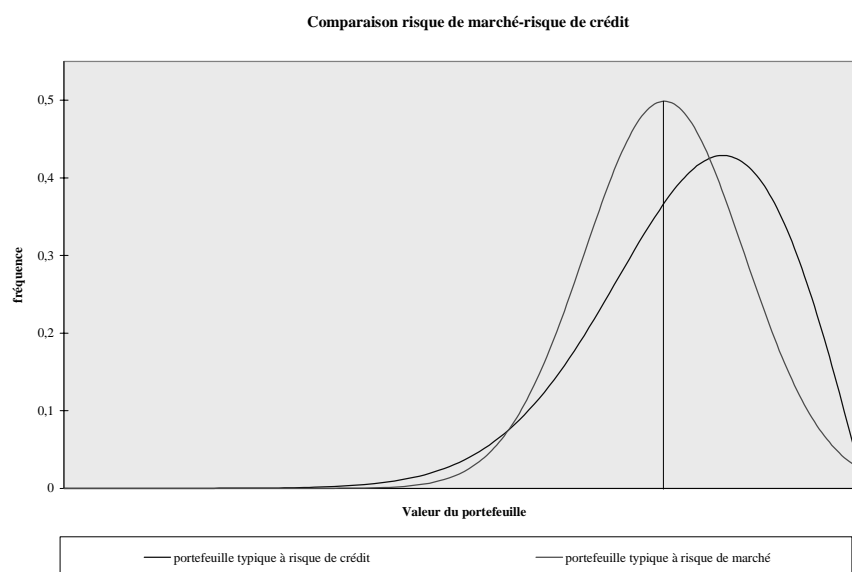
L'article de Merton a constitué la base de toute la littérature sur le risque de crédit. Néanmoins, l'approche semble quelque peu irréaliste. Elle suppose en effet que la banqueroute n'est constatée qu'à l'échéance de la dette, et que la firme est éventuellement liquidée pour permettre son remboursement. Il apparaît donc plus raisonnable de supposer qu'il existe un seuil pour la valeur de la firme au dessous duquel elle se déclare en faillite. Cette hypothèse, que l'on trouve pour la première fois dans l'article de Black et Cox (1976), nécessite cependant une spécification du seuil de faillite. On peut par ailleurs douter que ce seuil soit constant au cours du temps, comme on le verra plus tard dans Longstaff et Schwartz, et ne dépende pas de l'évolution de la structure des taux.

3 CreditMetricsTM

3.1 Evaluation du risque de crédit : méthodologie

3.1.1 Mesure du risque

L'objectif recherché est de mesurer la variation de la valeur future d'un portefeuille liée à la modification de la qualité de crédit des contreparties des instruments en portefeuille. Les variations de la valeur future sont représentées statistiquement par la distribution de probabilités des valeurs à l'horizon. Cette distribution a approximativement la forme représentée ci-dessous, pour un portefeuille diversifié de bonne qualité. On peut alors comparer cette distribution à celle d'un portefeuille uniquement soumis à un risque de marché. On s'aperçoit alors de la spécificité du problème posé et de la nécessité d'une nouvelle approche pour quantifier le risque crédit.



La distribution n'est pas normale ; elle est asymétrique, et la queue de distribution est épaisse du côté gauche. Il existe une faible probabilité de perdre beaucoup d'argent, et une forte probabilité d'avoir des gains relativement faibles. Dans ces conditions, l'écart-type de la distribution est une mesure de risque assez mal adaptée, car symétrique. Une mesure plus adaptée est celle des quantiles, c'est à dire la mesure d'une VaR à 1% par exemple.

3.1.2 Méthode de valorisation

Dans un univers déterministe, la valeur d'un portefeuille à une date donnée est égale à la valeur actualisée de ses flux futurs. Dans un univers incertain, elle est égale à l'espérance de la valeur des flux futurs actualisés au taux sans risque. On suppose dans un premier temps que la courbe des taux sans risque reste constante. L'aléa est alors intégralement représenté par la distribution de probabilité des flux futurs.

Plaçons-nous à l'horizon. Nous allons discrétiser la distribution des valeurs du portefeuille, en supposant qu'il existe un nombre fini d'états possibles, qui sont entièrement caractérisés par les « ratings » des émetteurs à l'horizon, ainsi que par les types de créances (senior, subordonnée ...). Le rating est une mesure de la qualité de crédit de l'émetteur, et est supposé discret.

3.1.2.1 Cas d'un titre isolé Prenons l'exemple de l'échelle de notation Standard & Poor's à 7 gradations. Soit un titre émis par un émetteur dont le rating actuel est A. Choisissons un horizon d'un an. Dans un an, le rating de l'émetteur peut prendre les valeurs suivantes : AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, ou l'émetteur peut avoir fait défaut. Il s'agit alors de calculer la valeur de l'obligation correspondant à chacun

de ces états. Plaçons-nous dans un des états de rating possible, excepté l'état de défaut. Considérons un flux de 1F versé dans T années. La valeur actuelle de ce flux est égale à l'espérance de ce flux actualisée au taux sans risque r_T :

$$V = \sum_i p_i \frac{\alpha_i}{(1 + r_T)^T}$$

i est un indice de l'état futur de la créance : à chaque état correspond un pourcentage de paiement de la créance, α_i , et une probabilité de se trouver dans cet état, p_i . Nous avons supposé que chaque état à l'horizon était entièrement caractérisé par le rating de l'émetteur et le type de dette. On peut alors écrire V sous la forme :

$$V = \frac{1}{(1 + r'_T)^T}$$

où r'_T est un taux d'actualisation « risqué ». Ce taux ne dépend que du rating de l'émetteur à l'horizon et de la maturité de la créance. On définit ainsi un ensemble de facteurs d'actualisation $f(T, j)$ qui s'appliqueront aux flux de maturité T et de rating j à l'horizon. Dans le cas où l'émetteur fait défaut, la valeur du flux est égale au taux de recouvrement correspondant à la notation initiale. Notons CF(t) le flux contractuel versé à la date t. La valeur du titre à l'horizon, dans l'état j (excepté l'état de défaut) est égale à :

$$V(j) = \sum_{t=1}^T CF(t) \times f(t, j)$$

3.1.2.2 Cas d'un portefeuille de titres Dans le cas d'un portefeuille, il y a m^N états possibles, m représentant le nombre d'états possibles par émetteur et N le nombre de titres en portefeuille. On note $j_1 j_2 j_3 \dots j_N$ l'état du portefeuille à l'horizon pour lequel le rating de chacun des titres i est j_i . On calcule pour chaque titre i et pour chacun des états j_i la valeur $V(i, j_i)$ de ce titre à l'horizon. Soit $Nom(i)$ le montant nominal investi sur le titre i . La valeur du portefeuille dans l'état $j_1 j_2 j_3 \dots j_N$ est égale à :

$$V(j_1 j_2 j_3 \dots j_N) = \sum_i^N Nom(i) V(i, j_i)$$

3.1.3 Calcul des probabilités

Nous n'avons jusqu'ici abordé que le calcul des valeurs à l'horizon. Pour obtenir la distribution de ces valeurs, il nous manque les probabilités associées à chacun des états.

3.1.3.1 Cas d'un titre isolé A partir d'historiques de changements d'états, il est possible de construire une matrice de transition représentant la probabilité du passage de l'état initial i à l'état à l'horizon j . Ainsi, Standard & Poor's fournit le type de matrice de transition suivant :

Rating initial	Rating à l'horizon							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Défaut
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0	0	0
AA	0,7	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,3	1,17	0,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1	1,06
B	0	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,2
CCC	0,22	0	0,22	1,3	2,38	11,24	64,86	19,79

Matrice de transition à un an de S&P

La probabilité qu'un émetteur AA devienne A à un horizon de 1 an est de 7.79%.

3.1.3.2 Cas d'un portefeuille de titres Etant donné deux émetteurs de rating connu, il existe, dans le cas d'une échelle de notation à 7 notes (plus l'état de défaut) $8 \times 8 = 64$ états possibles à l'horizon. Il semble alors légitime d'étudier les corrélations entre les migrations de ratings. Une première tâche a été de mettre en évidence cette corrélation, qui n'est pas forcément très intuitive. En effet, on pourrait prétendre que chaque firme est unique et que ses changements de qualité de crédit ne sont donc dûs qu'à des événements spécifiques. Cela semble encore plus vrai pour les petites entreprises, nettement moins dépendantes les unes envers les autres que des grands groupes qui sont la plupart du temps amenés à avoir des relations commerciales. Cela reviendrait donc à considérer que la corrélation des transitions de deux firmes est quasi nulle et que son impact sur le risque de défaillance est négligeable.

Pour mettre en évidence cette corrélation, nous avons eu recours aux données fournies par les agences de rating (Moody's principalement). Il suffit de calculer les probabilités de défaillances simultanées des deux firmes et de les comparer aux données empiriques. Considérons deux firmes, notées toutes les deux Baa. S'il n'y a pas de corrélation, la probabilité de défaillance conjointe à un an est le produit des probabilités individuelles (ici, 0.28%). En estimant empiriquement cette valeur grâce à la base de données Moody's, on constate que cette valeur vaut 0.16%. En utilisant la même méthode pour les 64 autres états possibles de ce couple de firme au bout d'un an, on met donc facilement en lumière l'existence d'une corrélation de transition.

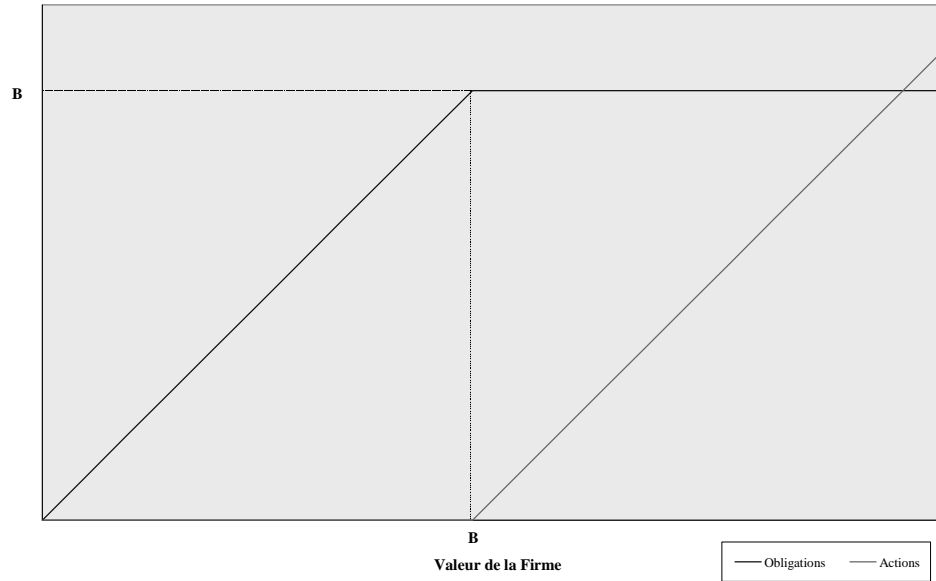
Estimation directe Considérons 8 états possibles, y compris l'état de défaut. Du fait de la symétrie des couples de rating possibles, il existe $\frac{7 \times (7+1)}{2} = 28$ possibilités de coupler les émetteurs selon leur rating initial. Pour chaque couple, il existe une matrice de transition de taille $8 \times 8 = 64$.

On peut ainsi, à partir de données historiques, calculer ces 28 matrices de transition.

L'avantage de cette méthode est sa simplicité. Elle a deux inconvénients. Le premier est lié à la disponibilité des données. Le second inconvénient est qu'elle traite deux émetteurs de ratings initiaux identiques de la même manière, quel que soit leur secteur d'activité. Nous sommes donc tentés d'utiliser une approche indirecte.

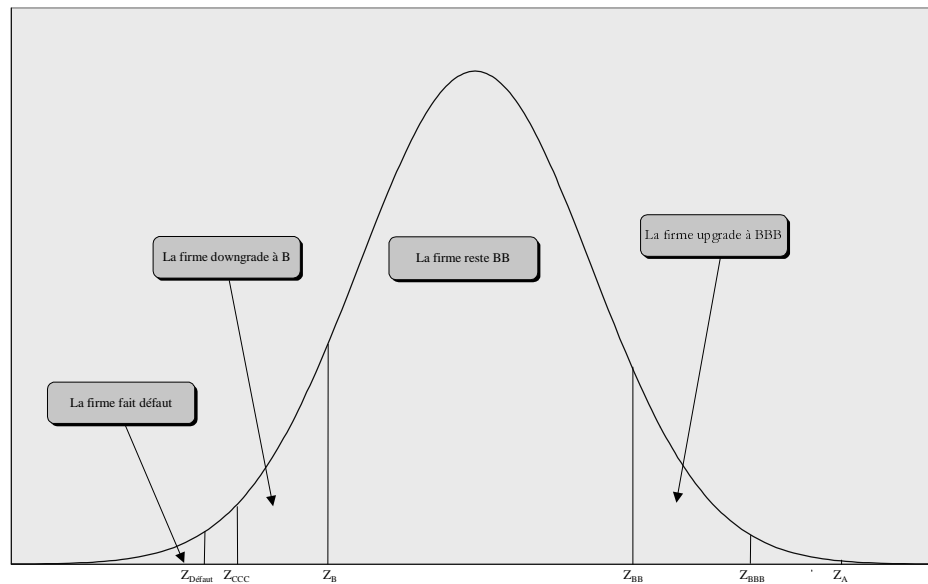
Estimation indirecte : « asset value model » Cette méthode nécessite la définition d'un processus sous-jacent qui dirige les changements de rating. Le processus que l'on souhaite décrire, c'est-à-dire les distributions de probabilités jointes de migration de rating, n'est pas observable mais on peut l'approcher au travers d'un processus que l'on comprend et que l'on peut observer.

L'« asset value model » est inspiré des travaux de Merton sur la dette « corporate » présentés plus haut. Le principe est simple. Considérons un émetteur. La valeur de la firme est égale à la somme de la valeur de sa dette et de la valeur de ses actions. La valeur de la firme suit un processus aléatoire. Dans son article initial, Merton considère un zéro-coupon. A l'échéance de la dette, soit la valeur de la firme est supérieure ou égale à la valeur nominale de la dette, et les porteurs obligataires reçoivent ce montant nominal, soit elle est inférieure et les porteurs reçoivent un montant égal à la valeur résiduelle de la firme. On peut donc représenter la valeur des obligations comme la valeur de la firme plus la vente d'une option d'achat sur la valeur de la firme, le prix d'exercice étant égal à B, le nominal de la dette. De la même manière, les actions sont des options d'achat sur la valeur de la firme à un prix d'exercice égal au montant de la dette B. On résume la situation par le graphique suivant.



Modélisation de la valeur des obligations et des actions selon Merton

Ce qui nous intéresse ici, c'est non seulement le risque de défaut mais aussi le risque d'un changement de rating. Il s'agit de construire une sorte de bijection entre la valeur de la firme et le rating. On peut représenter une bijection de ce type sous forme du graphique ci-dessous où on considère une firme initialement notée BB et dont le rating à l'horizon va être déduit de la valeur de ses actifs.



Distribution de la valeur de la firme et rating correspondant

Il s'agit alors de calculer les valeurs de la firme correspondant aux états de transition. On appelle rendement à l'horizon de la firme, et on note R , la variation de la valeur de la firme entre la date d'observation et l'horizon. Notons Z_i le rendement de la firme correspondant à la transition du rating i au rating $i + 1$. Les Z_i sont appelés rendements de transition. Par exemple, si la variation normalisée de la valeur de la firme se trouve entre Z_B et Z_{BB} , cela signifie que le rating de la firme est égal à B. Connaissant la distribution de probabilités des rendements de la firme, il est alors possible à partir des probabilités de transition observées historiquement d'en déduire les rendements de transition.

Notons p_i la probabilité du rating i . Par exemple :

$$P(i = \text{défaut}) = P(R < Z_{\text{défaut}}) = p_{\text{défaut}}$$

$$P(i = CCC) = P(Z_{défaut} < R < Z_{CCC}) = p_{CCC}$$

etc...

Supposons que les rendements de la firme suivent une loi normale. Notons $N(x)$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Alors :

$$p_i = P(Z_i < R < Z_{i+1}) = N\left(\frac{Z_{i+1} - \mu}{\sigma}\right) - N\left(\frac{Z_i - \mu}{\sigma}\right)$$

Dans le cas d'un titre isolé, cette méthode ne nous apporte rien car la distribution des probabilités de transition est connue. Dans le cas d'un portefeuille de titres, la bijection établie entre la valeur de la firme et le rating va nous permettre de déduire les probabilités jointes à partir de la distribution jointe des rentabilités des firmes. Considérons deux émetteurs. Supposons que la rentabilité des valeurs d'actifs suive une loi normale bivariée de moyenne nulle (rendements centrés) et de covariance Σ .

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma\sigma' \\ \rho\sigma\sigma' & \sigma'^2 \end{bmatrix}$$

On calcule alors les probabilités de transition conjointes par la formule :

$$P\left\{Z_i < R < Z_{i+1}, Z'_j < R' < Z'_{j+1}\right\} = \int_{Z_i}^{Z_{i+1}} \int_{Z'_j}^{Z'_{j+1}} f(r, r', \Sigma) dr' dr$$

où f est la densité de la loi normale bivariée. Sous cette écriture, cette formule semble encore dépendre des volatilités, mais un calcul assez simple permet de montrer qu'elle ne dépend ni de σ ni de σ' . Ceci revient à prendre Σ de la forme :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Cela permet de calculer les matrices de transition communes. La seule inconnue restant à estimer est ρ , la corrélation entre les rendements des actifs de deux firmes.

3.1.4 Estimation des corrélations entre rendements d'actifs

Supposons que nous ayons à étudier N émetteurs distincts. La modélisation proposée précédemment suppose l'estimation et le stockage de $\frac{N(N-1)}{2}$ corrélations. Ce nombre peut rapidement devenir important. Pour simplifier le problème, nous allons adopter une modélisation des rendements des actifs individuels couramment utilisée en finance. On suppose que la rentabilité de l'actif i est entièrement déterminée par des composantes β_{ik} et $\sigma_i \varepsilon_i$ telles que :

$$R_i = \sum_{k=1}^K \beta_{ik} f_k + \sigma_i \varepsilon_i$$

On parle de modèle factoriel. La rentabilité des actifs peut être expliquée par K facteurs communs ou facteurs systématiques notés f_k et un facteur spécifique au titre. Les facteurs communs peuvent soit être identifiés, taux d'intérêt, taux de change, secteurs industriels, soit être des facteurs statistiques résultant par exemple d'une analyse factorielle. On suppose de plus que :

$\forall k$	$E(f_k) = 0$	facteurs communs centrés
$\forall k$	$\sigma(f_k) = 1$	facteurs communs normés
$\forall k, l$	$E(f_k f_l) = \rho_{k,l}$	facteurs communs corrélés entre eux
$\forall i$	$E(\varepsilon_i) = 0$	facteurs spécifiques centrés
$\forall i, j$	$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \delta_{ij}$	facteurs spécifiques normés et non corrélés entre eux
$\forall i, k$	$E(f_k \varepsilon_i) = 0$	facteurs spécifiques non corrélés aux facteurs communs

On obtient ainsi la corrélation entre deux actifs grâce à l'expression suivante :

$$Corr(R_i, R_j) = \sum_k \sum_l \beta_{ik} \beta_{jl} \rho_{k,l} + \sigma_i \sigma_j \delta_{ij}$$

Il suffit de connaître les corrélations entre les facteurs communs, ainsi que le risque spécifique de chacun des émetteurs pour construire la matrice de corrélations des rendements des actifs. Si nous notons Λ cette matrice, on a :

$$\Lambda = BC^t B$$

où C est la matrice de corrélation des facteurs de la forme suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{array}{cccc} \rho_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \rho_{k,l} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \end{array}}^{K \text{ secteurs}} & \overbrace{\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{K,1} & \cdots & \cdots & \rho_{K,K} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array}}^{N \text{ firmes}} \end{array} \right)$$

Si les facteurs sont déterminés par une analyse factorielle, les K premiers axes retenus sont orthogonaux entre eux ; on en déduit alors que C est la matrice identité et que la matrice de corrélation Λ est égale à $B^t B$.

3.2 Mise en oeuvre de la méthodologie

3.2.1 Matrice de transition

La matrice de transition représente la probabilité de transition d'un rating initial vers un rating à l'horizon. A priori, pour un horizon donné, une seule matrice de transition est nécessaire. En effet, nous avons supposé que le seul facteur discriminant entre émetteurs était le rating.

Nous pouvons utiliser une échelle de notation « classique » du type de celle proposée par Standard & Poor's ou Moody's. Nous pouvons aussi développer notre propre échelle de notation, en utilisant par exemple une méthode d'évaluation proche de celle proposée par KMV. Cette méthode est cependant plus coûteuse, dans le sens où nous avons besoin d'estimer les ratings sur une longue période afin de calculer les probabilités de transition.

3.2.2 Rendements de transition

Les rendements de transition permettent d'établir une bijection entre le rendement de l'actif de chaque émetteur et sa notation à l'horizon. Le rendement de la valeur de l'actif de chaque émetteur est supposée suivre une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ . Dans CreditMetricsTM, les paramètres du rendement de la valeur de l'actif sont confondus avec les paramètres du rendement de l'action.

Connaissant les paramètres de la loi normale, les rendements de transition sont définis de la manière suivante :

$$Z_{défaut} = N^{-1}(p_{défaut}) \times \sigma + \mu$$

$$Z_{CCC} = N^{-1}(p_{CCC} - p_{défaut}) \times \sigma + \mu$$

etc...

Les probabilités de transition ne dépendant que du rating de l'émetteur, les rendements de transition sont fonction du rating, de l'espérance et de la volatilité du rendement de l'actif. Nous pouvons dès à présent faire correspondre à la matrice de transition une matrice des rendements de transition Z , les $Z_{i,j}$ étant défini par les formules analytiques ci-dessus. Nous n'avons pas besoin à cette étape du détail des espérances et des volatilités des rendements des actifs.

3.2.3 Modélisation des corrélations entre rendements d'actifs

Le rendement de l'actif i peut être décomposé de la manière suivante :

$$R_i = \sum_{k=1}^K \beta_{ik} f_k + \sigma_i \varepsilon_i$$

CreditMetricsTM propose la méthodologie suivante : on suppose que les principaux facteurs de corrélations entre émetteurs sont des facteurs sectoriels. L'activité de chaque émetteur est décomposée par secteurs, et la proportion risque systématique (ou risque sectoriel) / risque spécifique est définie. Les sensibilités à chaque facteur sont ensuite calibrées afin de retrouver une volatilité totale en accord avec la volatilité mesurée. Cette méthode est cependant assez délicate à implémenter : sur quelle base fait-on reposer la décomposition sectorielle ? La base du chiffre d'affaires est biaisée, car elle ne tient pas compte du rapport de marge entre divers secteurs d'activité. Les chiffres de répartition des résultats par secteur sont plus difficiles à obtenir.

Une alternative à ceci serait par exemple l'analyse factorielle des rendements. Cette méthode a plusieurs avantages : elle a, en général, un pouvoir explicatif plus important, et elle permet d'obtenir des facteurs orthogonaux. Afin d'obtenir une meilleure précision, on pourra adopter une distinction géographique entre les gestions, et réaliser une analyse factorielle pour chacune de ces régions.

3.2.4 Simulation des rendements des actifs

Nous devons construire des scénarii représentant l'évolution de la valeur de l'actif de chacun des émetteurs présents dans le portefeuille. Pour N émetteurs, il est nécessaire de simuler une loi normale multivariée à N dimensions, dont la matrice de covariance est très rarement diagonale. La méthode généralement suivie est de simuler tout d'abord une loi normale multivariée à N dimensions dont la matrice de covariance est égale à l'identité. On multiplie alors cette loi par la matrice de Cholesky A définie par :

$$A^t A = \Lambda$$

où Λ est la matrice de corrélation définie plus haut. L'algorithme pour obtenir A à partir de Λ est très classique et disponible dans de nombreux ouvrages d'analyse numérique. Si l'on utilise un modèle factoriel à m facteurs orthogonaux, il suffit de simuler N (facteurs spécifiques) + m (facteurs systématiques) lois normales indépendantes, ce qui est beaucoup plus simple. On construit ainsi quelques milliers de scénarii. Connaissant les sensibilités de chacun des émetteurs, on reconstruit alors pour chaque scénario et pour chaque émetteur le rendement à l'horizon.

3.2.5 Reconstitution des notations à l'horizon

Nous disposons maintenant de quelques milliers de scénarii obtenus par Monte Carlo. A chaque scénario correspond un vecteur de N rendements, N étant le nombre d'émetteurs. Pour chaque émetteur de chaque scénario on va comparer le rendement tiré aux rendements de transition Z_i définis plus haut. Ainsi, à l'aide de ces rendements de transition, on reconstitue le rating de chaque émetteur à l'horizon et ce pour chaque scénario. A ce stade, nous disposons de l'ensemble des informations nécessaires pour évaluer la distribution de la valeur de notre portefeuille à l'horizon. Reste à faire correspondre à chaque rating de chaque émetteur la valeur du titre dans cet état de la nature.

3.2.6 Calcul des facteurs d'actualisation

Nous avons besoin, pour chaque rating à l'horizon, d'une courbe des taux à l'horizon, ainsi qu'une courbe des spreads. CreditMetricsTM suggère d'utiliser des courbes standard, fournies par Bridge. Ces courbes ne sont cependant disponibles initialement que pour les USA. Il semble dangereux d'utiliser une seule courbe de spreads par type de rating. En effet, le spread évolue en fonction du niveau absolu des taux d'intérêt, qui peut être différent d'un pays à l'autre. Ceci pose un nouveau problème : même en supposant les taux à l'horizon inchangés, nous ne disposons pas de suffisamment de données dans chacun des pays pour tracer une courbe par rating, particulièrement pour les ratings les plus faibles.

3.2.7 Calcul de la valeur du portefeuille à l'horizon

Chaque titre du portefeuille est décomposé en flux. Chacun de ces flux est valorisé à l'horizon, dans chaque scénario et pour chaque rating selon la méthode expliquée plus haut. La valeur du portefeuille à l'horizon est ensuite calculée par aggrégation des valeurs des titres individuels. On obtient ainsi la distribution des valeurs du portefeuille à l'horizon. On est alors en mesure de quantifier le risque crédit du portefeuille et de calculer les contributions à ce risque de chacune des émissions qui le composent.

4 La Méthodologie CREDITRISK⁺

Ce modèle proposé par Credit Suisse Financial Product (CSFP) apparaît comme une alternative aux deux principales méthodologies rencontrées sur le marché, à savoir celles de J.P.Morgan et de KMV. Ce modèle est fondé sur une approche probabiliste du processus de défaut de paiement d'une contrepartie sans faire aucune hypothèse sur la cause du défaut. Le Modèle CREDITRISK⁺ considère le taux de défaut comme une variable aléatoire continue. La prise en compte d'une volatilité du taux de défaut associée à une analyse par secteur permettront de rendre compte à la fois de l'incertitude du niveau de défaut et des éventuelles corrélations existant entre plusieurs obligations. Ce choix s'explique d'après CSFP par l'instabilité des corrélations de défaut et par le manque de données empiriques pour suivre la démarche proposée par CREDITMETRICSTM.

En appliquant des techniques mathématiques plus souvent rencontrées dans le domaine de l'assurance que dans celui de la finance, ce modèle cerne les caractéristiques essentielles de l'occurrence de défauts de paiement et permet un calcul explicite de la distribution des pertes d'un portefeuille comportant un risque de crédit.

4.1 La démarche

les concepts clés qui sont à la base de CREDITRISK⁺ sont les suivants :

- Les taux de défaut sont stochastiques.
- Le niveau du taux de défaut à une incidence sur l'occurrence du défaut, mais il n'y a pas de relations causales entre ces occurrences.

Le modèle est alors structuré selon le schéma de la figure ci-dessous. La démarche suivie focalise tout d'abord son étude sur un modèle simplifié dans lequel la volatilité des taux de défaut n'est pas prise en compte. Une fois la distribution des pertes obtenue dans un cas simple, on intègre cette volatilité dans le processus, ce qui au vu des résultats correspond à une dimension aléatoire supplémentaire et donc à une simple composition de lois de probabilités. On montre alors l'existence de cas où le modèle à volatilité converge vers le cas simple. Finalement, on étend la première approche sectorielle à un cas plus complet. On est alors en mesure d'exploiter les résultats, notamment pour déterminer les différentes contributions au risque d'un portefeuille des émetteurs qui le composent ou les corrélations des taux de défaut entre ces mêmes émetteurs.

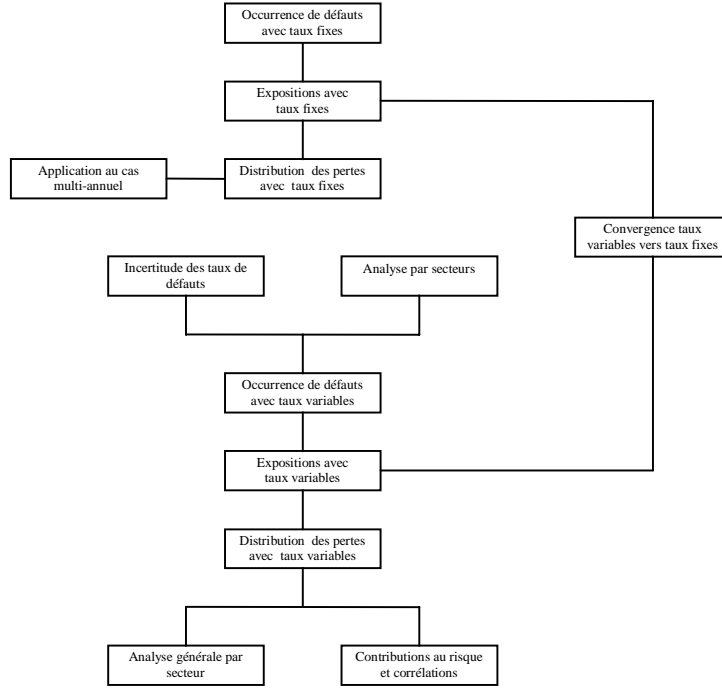


FIG. 1: Organigramme de la démarche suivie par CREDITRISK⁺

4.2 Modélisation à taux de défaut fixes

4.2.1 Occurrence de défauts

Les défauts de crédits ne peuvent pas être prévus ni dans leur date, ni dans leur nombre, si bien que CREDITRISK⁺ tente de modéliser globalement le risque crédit d'un portefeuille.

On considère un portefeuille composé de N obligations. Nous supposons dans cette partie que chacun de ces titres est sujet à une probabilité de défaut à un horizon de un an connue. Ainsi,

$$P_A = \text{Probabilité Annuelle de Défaut pour } A \quad (1)$$

On introduit alors la fonction génératrice associée au nombre D de défauts survenus parmi les obligations du portefeuille

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(D = n) z^n \quad (2)$$

Or, chaque émetteur fait ou ne fait pas défaut ; la fonction génératrice d'un portefeuille composé d'une unique obligation s'obtient donc facilement :

$$F_A(z) = 1 - P_A + P_A z = 1 + P_A(z - 1) \quad (3)$$

De plus, les événements sont supposés indépendants, ce qui induit

$$F(z) = \prod_A F_A(z) = \prod_A (1 + P_A(z - 1)) \quad (4)$$

ce qui revient à écrire

$$\text{Log}(F(z)) = \sum_A \text{Log}(1 + P_A(z-1)) \quad (5)$$

Or, nous pouvons raisonnablement penser que les probabilités sont suffisamment faibles pour approximer cette dernière expression par un développement limité au premier ordre, ce qui se traduit par :

$$F(z) = e^{\sum_A P_A(z-1)} = e^{\mu(z-1)} \quad (6)$$

avec

$$\mu = \sum_A P_A \quad (7)$$

μ représente en fait le nombre moyen de défauts attendus en un an parmi les émissions du portefeuille considéré. On remarque de plus que la dernière expression peut s'écrire sous une autre forme, grâce aux séries entières, ce qui donne une formule explicite de la répartition de la variable aléatoire D :

$$F(z) = e^{\mu(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} z^n \quad (8)$$

d'où

$$P(D = n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} \quad (9)$$

Finalement, sous les hypothèses faites plus haut, le nombre de défaut à survenir suit une loi de Poisson de paramètre μ . Ce paramètre est l'unique inconnue du modèle, il ne dépend ni du nombre de titres présents dans le portefeuille ni des probabilités individuelles de défaut de chaque obligation, pourvu qu'elles soient suffisamment petites pour valider les approximations effectuées. Reste à noter, pour la suite, qu'une loi de poisson de paramètre μ a pour moyenne μ et pour écart-type $\sqrt{\mu}$.

Evidemment, les hypothèses faites ne sont pas satisfaisantes et ne cadrent pas avec la réalité. Toutefois, ces résultats seront utiles pour la suite, notamment pour le passage à des taux variables et à l'introduction de volatilité des taux de défauts.

4.2.2 Pertes de défaut

L'objectif principal est de quantifier le risque de perte d'un portefeuille. Or, un même niveau de perte peut être obtenu par un seul "gros" défaut aussi bien que pour de nombreux "petits" défauts. Cette constatation a incité CSFP à regrouper les émissions contenues dans un portefeuille par tranche d'exposition. Ceci a pour effet de réduire considérablement le nombre de données à l'entrée pour l'implémentation. Cette approximation sera d'autant plus légitime que les tranches d'expositions seront nombreuses et étroites en comparaison avec l'exposition moyenne du portefeuille. Ainsi, ces approximations seront utiles sans pour autant modifier les résultats significativement.

On adopte alors les notations suivantes :

Référence	Notation
Emetteur	A
Exposition	L_A
Probabilité de défaut	P_A
Pertes attendues	λ_A

L'exposition et les pertes attendues sont exprimées en L , qui représente une unité arbitraire choisie, si bien que pour chaque émetteur A , on définit ε_A et ν_A de la manière suivante :

$$L_A = \nu_A \times L \text{ et } \lambda_A = \varepsilon_A \times L$$

Le passage important est d'arrondir chaque ν_A à l'entier le plus proche. Ainsi, pour un gros portefeuille, un choix adapté de L permettra de réduire à un nombre relativement petit les valeurs ν_A partagées par plusieurs émissions. Le portefeuille se retrouve alors divisé en m tranches d'exposition, indexée par j , ce qui revient à ne retenir que les notations suivantes.

Référence	Notation
Exposition commune dans la tranche j en L	ν_j
Pertes attendues dans la tranche j en L	ε_j
Nombre de défaut attendu dans la tranche j	μ_j

De plus, ces trois variables sont reliées par la relation suivante

$$\varepsilon_j = \mu_j \times \nu_j \quad (10)$$

donc

$$\mu_j = \frac{\varepsilon_j}{\nu_j} = \sum_{A|\nu_A=\nu_j} \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \quad (11)$$

de plus, nous utiliserons par la suite

$$\mu = \sum_{j=1}^m \mu_j = \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{\nu_j} \quad (12)$$

4.2.3 Procédure de calcul et distribution des pertes

On adopte ici le même point de vue que pour le nombre de défauts ; on définit la distribution des pertes agrégées à travers sa fonction génératrice

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{Pertes agrégées} = n \times L) z^n \quad (13)$$

Nous faisons alors intervenir le fait que les titres ont été regroupés par niveau d'exposition, et que les tranches sont indépendantes entre elles, ce qui s'écrit de manière plus formalisée

$$G(z) = \prod_{j=1}^m G_j(z) \quad (14)$$

on considère alors chaque tranche comme un portefeuille à part entière, et on applique le résultat obtenu en (8) où on note D_j la variable aléatoire rendant compte du nombre de défaut à survenir dans la tranche j

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(D_j = n) z^{n\nu_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!} z^{n\nu_j} = e^{-\mu_j + \mu_j z^{\nu_j}} \quad (15)$$

et donc, en revenant au portefeuille global

$$G(z) = e^{-\sum_{j=1}^m \mu_j + \sum_{j=1}^m \mu_j z^{\nu_j}} \quad (16)$$

C'est la formule désirée qui nous renseigne sur la distribution des risques crédits du portefeuille, on remarque que si on pose $P(z)$ le polynôme

$$P(z) = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^m \mu_j z^{\nu_j} = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon_j}{\nu_j}\right) z^{\nu_j}}{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon_j}{\nu_j}\right)} \quad (17)$$

La fonction génératrice des pertes agrégées se présente alors sous la forme

$$G(z) = e^{\mu(P(z)-1)} = F(P(z)) \quad (18)$$

$G(z)$ s'exprime alors comme la composée de deux sources d'incertitude : la loi de poisson du nombre de défauts et la variabilité des montants d'exposition.

On remarque également qu'elle ne dépend que de deux types de données ν et ε . Ainsi, les seules entrées nécessaires à la mesure du risque crédit d'un portefeuille sont la connaissance des différentes tailles d'exposition et les pertes attendues pour chaque taille. CSFP estime que cela représente peu d'efforts, même pour un portefeuille assez important.

Toutefois, la dernière expression de la fonction génératrice n'est pas très maniable et ne nous renseigne pas explicitement sur la distribution des pertes. Aussi, on est amené à déterminer les probabilités associées à une perte de $n \times L$ par un autre algorithme, en effet d'après l'expression (13) on a :

$$P(\text{Pertes agrégées} = n \times L) = \frac{1}{n!} \frac{d^n G}{dz^n}(0) = A_n \quad (19)$$

On applique alors successivement la formule de Leibnitz pour obtenir une formule de récurrence nous permettant de calculer A_n à peu de frais ; finalement on obtient

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{j|\nu_j \leq n} \frac{\varepsilon_j}{n} A_{n-\nu_j} \\ A_0 &= G(0) = e^{-\mu} = e^{-\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{\nu_j}} \end{aligned} \quad (20)$$

4.2.4 Application au cas multi-annuel

Il peut sembler plus intéressant de considérer l'étude du risque de crédit d'un portefeuille sur une période plus longue qu'une année. en effet, la maturité d'un portefeuille pourrait sembler être un horizon légitime. Dans cet optique, il faut être capable d'adapter les expressions précédentes à ce cas multi-annuel, moyennant la définition de notations plus adaptées.

Référence	Notation
Exposition commune dans la tranche j en L pendant l'année t	$\nu_j^{(t)}$
Pertes attendues dans la tranche j en L pendant l'année t	$\varepsilon_j^{(t)}$
Nombre de défaut attendu dans la tranche j pendant l'année t	$\mu_j^{(t)}$

Alors, en supposant les événements de différentes années indépendants, on applique les résultats obtenus précédemment, d'où

$$G(z) = e^{\sum_{t,j} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{\nu_j^{(t)}} (z^{\nu_j^{(t)}} - 1) - \mu} \quad (21)$$

ce qui implique une relation de récurrence semblable à la précédente,

$$A_n = \sum_{j,t|\nu_j^{(t)} \leq n} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{n} A_{n-\nu_j^{(t)}} \quad (22)$$

$$A_0 = G(0) = e^{-\sum_{j,t} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{\nu_j^{(t)}}}$$

4.3 Passage à des taux de défaut aléatoires

4.3.1 Incertitude des taux de défaut

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des portefeuilles composés d'obligations dont le taux de défaut était connu et fixe. CREDITRISK⁺ prend en compte le fait que ces taux sont difficiles à déterminer et sont sujets à une variabilité non négligeable pour des titres semblables. De plus, les statistiques publiées sur la fréquence des défauts montrent des variations assez importantes d'une année sur l'autre. La situation se résume alors en trois points :

- Les probabilités de défaut sont volatiles dans le temps, même pour des émetteurs de qualité crédit comparable.
- La variabilité des probabilités de défaut peut être expliquée par des variabilités sous-jacentes d'un petit nombre de variables liées à l'environnement économique.
- Un changement dans l'économie ou d'un autre facteur ayant de l'influence sur la variabilité des taux de défaut ne doit pas nécessairement induire un défaut. Le défaut d'une contrepartie est un événement rare.

4.3.2 Analyse par secteur

Le second point énoncé souligne l'existence de facteurs susceptibles d'agir sur la qualité crédit de plusieurs émissions à la fois. Pour mesurer cet effet, et donc être en mesure de quantifier l'impact des volatilités des taux de défaut individuelles au niveau du portefeuille, CSFP a eu recours à une analyse par secteur. L'économie est alors divisée en K secteurs, et CREDITRISK⁺ suppose que chaque secteur peut être modélisé par un unique facteur sous-jacent. C'est ce facteur qui nous permettra d'expliquer la variabilité dans le temps du nombre total de défaut mesuré pour ce secteur.

Donc, pour chaque secteur k nous introduisons une variable aléatoire x_k qui représente le nombre moyen de défauts dans ce secteur. L'espérance de x_k sera notée μ_k , et l'écart-type σ_k .

Variante par secteur	Notation
Unité d'exposition au risque	L
Tranche d'exposition	$L_j^{(k)} = \nu_j^{(k)} \times L$ $1 \leq k \leq K$ et $1 \leq j \leq m(k)$
Pertes attendues dans chaque tranche d'exposition	$\lambda_j^{(k)} = \varepsilon_j^{(k)} \times L$ $1 \leq k \leq K$ et $1 \leq j \leq m(k)$

Sous ces nouvelles notations, on a donc :

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} = \sum_{A \in k} \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \quad (23)$$

où $\frac{\varepsilon_A}{\nu_A}$ est la probabilité de défaut sur la période de A . Pour obtenir une estimation semblable de l'écart-type du taux de défaut pour chaque secteur, on est contraint d'assigner un écart-type pour le taux de défaut de chaque émetteur du secteur considéré. Une manière pratique de faire cela revient à supposer que cet écart-type dépend de la qualité crédit de l'émetteur. On obtient donc σ_k à partir des σ_A , sachant que la probabilité de défaut de chaque émetteur appartenant au secteur k sera considérée comme proportionnelle à la variable aléatoire x_k , ce qui s'écrit :

$$x_A = \frac{\varepsilon_A x_k}{\nu_A \mu_k} \quad (24)$$

On peut noter que l'espérance de x_A vaut $\frac{\varepsilon_A}{\nu_A} = P_A$. Nous sommes alors en mesure de lier les σ_A à σ_k selon l'équation suivante :

$$\sum_{A \in k} \sigma_A = \sum_{A \in k} \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \frac{\sigma_k}{\mu_k} = \sigma_k \quad (25)$$

Les statistiques montrent que le ratio $\frac{\sigma_A}{P_A}$ est de l'ordre de 1, si bien que l'écart-type du nombre de défauts parmi les émetteurs d'un même groupe de qualité crédit est du même ordre que le nombre moyen annuel de défauts. C'est la même chose à l'échelle du secteur, comme le montre :

$$\frac{\sigma_k}{\mu_k} = \frac{\sum_{A \in k} \sigma_A}{\sum_{A \in k} P_A} = \frac{\sum_{A \in k} P_A \left(\frac{\sigma_A}{P_A} \right)}{\sum_{A \in k} P_A} \quad (26)$$

Ainsi, en l'absence de données suffisamment détaillées, les estimations caractéristiques de chaque émetteur $\frac{\sigma_A}{P_A}$ peuvent être remplacés par un unique ratio ϖ_k pour le secteur, ce qui induit alors :

$$\sigma_k = \varpi_k \times \mu_k \quad (27)$$

Chercher à estimer σ_k est alors équivalent à estimer ϖ_k .

4.3.3 Occurrence de défauts

En suivant la même démarche qu'en 3.1.1, et en incluant la volatilité du taux de défaut dans le modèle, on obtient une fonction génératrice du nombre de défauts du type :

$$F(z) = \prod_{k=1}^K F_k(z) = \prod_{k=1}^K \int_{x=0}^{\infty} e^{x(z-1)} f_k(x) dx \quad (28)$$

où $f_k(x)$ est la densité de la variable x_k . Pour prolonger les calculs, il est alors nécessaire de donner une loi de distribution à x_k . CREDITRISK⁺ conseille de choisir une loi Gamma de moyenne μ_k et d'écart-type σ_k . Sous ces hypothèses $f_k(x)$ est alors défini de la manière suivante :

$$P(x \leq x_k \leq x + dx) = f_k(x) dx = \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)} e^{-\frac{x}{\beta_k}} x^{\alpha_k-1} dx \quad (29)$$

où

$$\alpha_k = \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2} \text{ et } \beta_k = \frac{\sigma_k^2}{\mu_k} \quad (30)$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (31)$$

après simplification, on obtient l'expression suivante dans laquelle on note $p_k = \frac{\beta_k}{1+\beta_k}$

$$F_k(z) = \left(\frac{1-p_k}{1-p_k z} \right)^{\alpha_k} = (1-p_k)^{\alpha_k} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+\alpha_k-1}{n} p_k^n z^n \quad (32)$$

on en déduit

$$P(D_k = n) = (1-p_k)^{\alpha_k} \binom{n+\alpha_k-1}{n} p_k^n \quad (33)$$

D_k qui est le nombre de défaut dans le secteur k suit donc une Loi Binomiale Négative.

4.3.4 Distribution des pertes de défaut

4.3.4.1 Pertes de défaut Nous reprenons l'approche définie dans le cas où les taux de défaut étaient fixes, et nous généralisons ce procédé en y incorporant la volatilité de ces taux de défauts. On obtient alors des expressions semblables à celles rencontrées plus haut :

$$G(z) = \prod_{k=1}^K G_k(z) = \prod_{k=1}^K F_k(P_k(z)) = \prod_{k=1}^K \int_{x=0}^{\infty} e^{x(P_k(z)-1)} f_k(x) dx \quad (34)$$

où

$$P_k(z) = \frac{\sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right) z^{\nu_j^{(k)}}}{\sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right)} = \frac{1}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right) z^{\nu_j^{(k)}} \quad (35)$$

Et là encore les intégrales peuvent être calculées, ce qui aboutit à l'expression analytique suivante.

$$G(z) = \prod_{k=1}^K \left(\frac{1-p_k}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right) z^{\nu_j^{(k)}}} \right)^{\alpha_k} \quad (36)$$

4.3.4.2 Relation de récurrence Pour être suffisamment exploitable, la fonction génératrice doit être mise sous forme de série entière où les probabilités associées aux pertes sont lues sans aucun effort. Or, pour arriver à cette forme, on est amené à traiter la dernière expression obtenue de $G(z)$ et mettre en évidence les coefficients A_n définis de la même manière que ceux rencontrés plus haut. Le fait que $G(z)$ se présente sous la forme de fractions rationnelles nous facilite la tâche. en effet, il existe de nombreuses méthodes pour transformer une fraction rationnelle et la présenter sous forme de polynôme de degré infini. Ces algorithmes sont plutôt techniques et ne méritent pas d'être détaillés ici. Ils semblent, en outre, ne pas poser de difficultés particulières. Il est en effet préférable de livrer le type de raisonnement suivi et la relation de récurrence à laquelle on aboutit après la mise en oeuvre d'un de ces algorithmes. Ainsi, on cherche les A_n tels que :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \quad (37)$$

Or, si $G(z)$ vérifie une relation du type :

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} \quad (38)$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont respectivement deux polynômes de la forme suivante :

$$\begin{aligned} A(z) &= a_0 + \dots + a_r z^r \\ B(z) &= b_0 + \dots + b_s z^s \end{aligned} \quad (39)$$

Alors, les coefficients A_n vérifient la relation de récurrence

$$A_{n+1} = \frac{1}{b_0(n+1)} \left(\sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{l=0}^{\min(s-1,n-1)} b_{l+1}(n-l) A_{n-l} \right) \quad (40)$$

On applique alors cette relation, sachant que $G(z)$ vérifie la condition sur sa dérivé logarithmique. En effet,

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{k=1}^K \frac{\frac{p_k \alpha_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \varepsilon_j^{(k)} z^{\nu_j^{(k)} - 1}}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right) z^{\nu_j^{(k)}}} \quad (41)$$

On applique alors la relation de récurrence, après avoir réduit au même dénominateur la dernière expression. Evidemment, un choix judicieux de L , unité d'exposition, permettrait de réduire le degré du polynôme $B(z)$ de telle sorte que les calculs soient plus faciles à traiter. On se retrouve alors en possession de la forme explicite de la distribution des pertes du portefeuille.

4.4 Conclusion

Tout d'abord, notons que cette approche peut être généralisée en considérant l'éventuelle appartenance d'un émetteur à plusieurs secteurs. On fait alors intervenir des coefficients $\theta_{A,k}$ qui pour chaque émission A donne la proportion de l'influence de son taux de défaut par la variable x_k . En généralisant de la sorte, on accorde à tous les titres d'être dépendants de plusieurs secteurs. Cette hypothèse est traitée dans CREDITRISK⁺, qui donne alors le processus et la nouvelle distribution des pertes encourus.

Remarquons, de plus, que la notion de corrélation n'apparaît pas explicitement dans le modèle, mais est pris en compte indirectement dans les volatilités de chaque secteur et éventuellement dans le profil des coefficients $\theta_{A,k}$. On peut toutefois calculer les contributions marginales de chacun des titres ainsi que les corrélations entre ces mêmes titres a posteriori. Les étapes nécessaires pour aboutir à ces corrélations et à ces contributions ne sont pas présentées ici mais le sont dans CREDITRISK⁺.

Le principal reproche adressé à CSFP réside dans le fait que leur modèle ignore la possibilité d'un changement de spread des titres composant le portefeuille sans pour autant observer un quelconque défaut. Par analogie avec CREDITMETRICSTM, ce modèle ne tient pas compte de la perte ou du gain de valeur du portefeuille provoqués par des changements de rating. Ce modèle semble, en fait, s'adapter au cas de banques accordant des crédits, et cherchant à se couvrir contre un certain niveau de risque dû au défaut de paiement d'une contrepartie. Mais cet outil ne convient pas à une gestion de portefeuille qui a pour vocation d'être assez liquide et qui tire son rendement des spreads des titres qui le composent.

5 Approche par Intensité

Dans cette approche l'instant de défaut est un temps aléatoire presque sûrement positif. On lui associe le processus de comptage N défini par

$$N_t = \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$$

C'est un processus croissant, continu à droite et limité à gauche, valant 0 avant le défaut et 1 après. L'intensité du défaut λ est définie comme un processus adapté non-négatif tel que

$$M_t = N_t - \int_0^{t \wedge \tau} \lambda_u du$$

soit une \mathcal{J} -martingale, c'est à dire une martingale dans le marché avec défaut.

On est alors à même de définir un bien risqué par un couple (h, Y) adapté à la sous-filtration $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}$ dont le processus de valeur S se déduit de

$$S_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[h_{\tau} \exp\left(-\int_t^{\tau} r_s ds\right) 1_{\{t < \tau \leq T\}} + Y \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) 1_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{J}_t \right] \quad (42)$$

où r_s est le taux court en s , Y est le payoff terminal s'il n'y pas eu défaut et h est le recouvrement en cas de défaut. Cette dernière expression nécessite l'existence d'une probabilité risque neutre dans le monde adapté à la filtration \mathcal{J} . Ceci revient en fait à supposer l'absence d'opportunité d'arbitrage dans le marché avec défaut. En supposant, en outre la complétude de ce marché, c'est à dire l'unicité de cette probabilité et sous l'hypothèse (D) que l'intensité λ admet au moins une extension à l'infini notée λ^* telle que le processus V défini par

$$V_t = \mathbb{E} \left[Y \exp\left(-\int_t^T \lambda_s^* ds\right) \mid \mathcal{J}_t \right]$$

est continu en τ (où Y est \mathcal{J}_T mesurable), Darrel Duffie obtient le résultat très utile suivant :

Proposition 1 *Pour une maturité T et un payoff Y \mathcal{J}_T mesurable et sous l'hypothèse (D), on a pour tout $t < T$*

$$\mathbb{E} [1_{\{T < \tau\}} Y \mid \mathcal{J}_t] = 1_{\{t < \tau\}} \mathbb{E} \left[Y \exp\left(-\int_t^T \lambda_s^* ds\right) \mid \mathcal{J}_t \right] \quad (43)$$

Ce résultat permet de présenter l'intensité de défaut sous forme de taux d'intérêt. En effet, si on essaye de valoriser un zéro-coupon risqué en suivant l'approche de Duffie, l'intensité apparaît comme un terme correctif appelé spread de défaut à rajouter au taux court dans le coefficient d'actualisation. Toutefois, cette approche nécessite la continuité de V à l'instant de défaut.

Pour étudier cette condition $\Delta V_{\tau} = 0$, il est utile de spécifier certaines hypothèses complémentaires sur les filtrations introduites. Cette restriction connue sous l'appellation d'hypothèse (H) peut revêtir plusieurs formes équivalentes. nous l'énoncerons de la manière suivante :

Pour tout t , F_{∞} et J_t conditionnées par F_t sont indépendantes.

Ceci équivaut au fait que toute \mathcal{F} -Martingale est une \mathcal{J} -Martingale. Cette hypothèse traduit le fait que le défaut en t est indépendant de l'évolution des prix connaissant le prix d'aujourd'hui. Elle permet, dans l'expression précédente, de remplacer le conditionnement par \mathcal{J} par un conditionnement par \mathcal{F} , et donc

$$\mathbb{E} [1_{\{T < \tau\}} Y \mid \mathcal{J}_t] = 1_{\{t < \tau\}} \mathbb{E} \left[Y \exp\left(-\int_t^T \lambda_s^* ds\right) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Dans le cas général, il est plus pratique de déduire cette dernière expression en utilisant des résultats sur l'intensité de temps aléatoires (JEANBLANC - RUTKOWSKI). en effet sous l'hypothèse (H), nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $u \leq t$

$$F_t := \mathbb{P}(\tau \leq u \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\tau \leq u \mid \mathcal{F}_{\infty})$$

Ainsi, le \mathcal{F} - processus de hasard de τ noté Γ défini par la formule $\Gamma_t = -\ln(1 - F_t)$ est relié à l'intensité de défaut par

$$\Gamma_t = \int_0^t \lambda_u du$$

c'est-à-dire

$$\lambda_t dt = \frac{dF_t}{1 - F_{t-}}$$

6 Conclusion

La mesure du risque de crédit et l'évaluation des produits dérivés liés à ce risque occupent aujourd'hui une importance capitale aussi bien dans les travaux de recherche académiques que dans les cellules de recherche des établissements financiers. Il s'agit aujourd'hui de mettre en place une méthodologie de référence pour l'obtention d'une courbe de taux risqués, le pricing de produits dérivés liés à cette courbe, et la mesure des risques encourus liés à la qualité de crédit des émetteurs. En ce qui concerne le pricing des dérivés de crédit, la tendance actuelle privilégie une approche par intensité plutôt que l'approche structurelle introduite par Merton. Cette approche est certainement plus simple à calibrer sur des données de marché et est plus simple d'utilisation pour des agents financiers. Toutefois, aucun consensus n'est encore trouvé sur les hypothèses d'arbitrage et de complétude à faire dans un monde avec défaut. De manière plus générale, c'est l'information disponible sur les marchés qu'il est délicat de modéliser.

D'énormes travaux sont donc encore à réaliser pour aboutir à une méthodologie globale qui permette une mesure des fonds propres nécessaires pour couvrir le risque crédit encouru et l'évaluation de produits dérivés relatifs à ces risques.