Théorie et pratique des instruments financiers

Antoine Frachot

Ecole Polytechnique Janvier 2001

Table des matières

1
Les produits

1.1 Introduction

Les instruments financiers sont très divers et leur complexité s'accroît de jour en jour. Il est donc de plus en plus difficile de dresser une typologie des produits. Pour faire simple, on discutera ici des actifs de base : action, obligation, matières premières, devises. Dans le chapitre suivant, on commencera à parler produits dérivés, c'est-à-dire des contrats dont les flux financiers associés dépendent (i.e dérivent) des actifs de base discutés ici.

S'agissant des actifs de base, nous donnons ici leur définition et développons les mathématiques élémentaires qu'il est nécessaire de maîtriser avant de poursuivre.

Rappelons qu'un actif ou instrument financier est un moyen d'effectuer des transferts intertemporels de richesse. Lorsque ces transferts de richesse sont parfaitement connus, on parlera d'actifs à revenu fixe (fixed-income securities) et, concrètement, cela désignera typiquement les obligations. Dans ce cas, la question essentielle de savoir combien vaut en euro d'aujourd'hui la promesse (certaine) de recevoir un euro à une date future donnée (i.e. le prix du temps). Les actions, les devises, les matières premières sont, à l'inverse, des exemples d'actifs permettant des transferts de richesse non parfaitement connus aujourd'hui. Ainsi, une action d'une entreprise donne droit à une part des bénéfices futurs de cette entreprise mais ce profit n'est pas connu aujourd'hui. Dans ce cas, il y a deux dimensions : une dimension prix du temps et une dimension prix du risque. En effet, ces derniers actifs impliquent également des transferts de risque entre individus.

L'ouvrage présent est une introduction à ces questions en essayant de marier les considérations pratiques sur l'utilisation de ces produits et les repères théoriques (valorisation et couverture). Le parti pris est de ne pas faire de théorie ‹‹ dure ››, celle-ci étant traitée de façon complète dans les cours de Mathématiques Appliquées.

1.2 Les actions

1.2.1 Généralités

Une **action** (equity, stock, share) est un titre de propriété d'une entreprise donnée. Elle génère donc pour ses détenteurs (les actionnaires ou shareholders) un certain nombre de droits, notamment le droit de recevoir une partie des bénéfices futurs et un droit de vote sur les décisions stratégiques de l'entreprise. On s'intéresse ici aux actions comme actif financier, c'est-à-dire un actif qui génère des flux futurs appelés

dividendes. Les dividendes représentent tout ou partie des bénéfices selon que les actionnaires décident de retenir ou non une partie des bénéfices dans l'entreprise. Les dividendes sont versés périodiquement.

On ne regarde pas ici les raisons qui poussent une entreprise à émettre des actions ou à s'endetter. Pour faire simple, disons qu'une entreprise dispose à sa création d'un capital apporté par ses actionnaires. Ce capital n'est pas forcément coté sous forme d'actions sur les marchés de capitaux. Toutefois, si l'entreprise est suffisamment importante, elle peut faire appel à l'épargne publique et les actions de l'entreprise peuvent être cotées sur un marché d'actions. Enfin, pour financer ses investissements, l'entreprise peut soit émettre de nouvelles actions, soit s'endetter (auprès d'une banque ou en émettant des titres de dette, i.e. des obligations). La question des avantages comparés des deux modes de financement ne seront pas abordées ici et relèvent d'un cours de finance d'entreprise.

Nous adoptons donc ici le point de vue des marchés plutôt que celui de l'entreprise qui cherche à financer ses investissements. La variable à cerner est le prix de l'action. Ce prix est fonction des anticipations des intervenants sur le niveau des dividendes futurs et sur la valeur de revente de l'action. En effet, une action n'a pas de terme défini autre que la faillite de l'entreprise (ou sa disparition pour d'autres raisons comme une fusion). Par conséquent, la valeur de revente de l'action dans 5, 10 ou 15 ans n'est pas plus connue aujourd'hui que les dividendes futurs. Par exemple, les valeurs dites de la Nouvelle Economie ont coté à des prix élevés une partie de l'année 2000, malgré des dividendes courants égaux à 0 et, pour certaines, nuls à l'horizon de deux ans. Dans ce cas, la faiblesse des dividendes fut largement compensée par l'anticipation d'une importante valeur de revente de l'action.

Le prix d'une action suit donc un processus aléatoire qui reflète aussi bien les incertitudes futures (en particulier sur les profits de l'entreprise) que les appréciations qu'en ont les intervenants sur les marchés. De fait, le cours d'une action est très largement imprévisible à partir de l'information publiquement disponible. Si tel n'était pas le cas, on pourrait construire des stratégies majoritairement gagnantes, ce que démentent l'observation courante et les études économétriques.

1.2.2 Modélisation des prix d'actions

Les questions d'évaluation des produits dérivées nécessiteront de préciser la modélisation des prix d'actions. On peut toutefois d'ores et déjà donner une idée de la forme des modèles qu'on rencontrera. Supposons une seconde que le monde est déterministe, c'est-à-dire qu'on connait le prix demain de l'action ainsi que le dividende versé. Si on note S_1 le prix demain, S_0 le prix aujourd'hui et div_1 le dividende versé demain, alors investir S_0 euros aujourd'hui rapporte $S_1 + div_1$ demain. Parallèlement, on peut investir la même somme sur un actif sans risque (i.e. la caisse d'épargne) et obtenir demain $(1 + r).S_0$ si r est le taux d'intérêt. Dans un monde déterministe et en négligeant les coûts de transaction et les taxes, les deux placements doivent coïncider, soit :

$$S_1 + div_1 = (1 + r).S_0$$

ou encore :

$$S_0 = \frac{S_1 + div_1}{1 + r}$$

Si on prolongeait cette relation par récurrence, on aurait alors (en supposant que le monde est déterministe pour toujours et que le taux d'intérêt ne bouge pas) :

$$S_0 = \frac{div_1}{1 + r} + \frac{div_2}{(1 + r)^2} + ... + \frac{div_T + S_T}{(1 + r)^T} \tag{1.1}$$

Le monde n'étant pas déterministe, il est alors logique de postuler une dynamique des prix d'actions de la forme :

$$S_1 + div = (1 + r)\,.S_0 + \varepsilon_1$$

où ϵ_1 est un aléa dont la réalisation ne sera connue qu'à la date 1. La question essentielle est donc de savoir quel type de loi suit la variable ε_1. On partira de ce type de modélisation pour évaluer les produits dérivés sur actions.

Les **analystes financiers** - dont le rôle est d'évaluer la valeur d'une société - calculent des valeurs dites **fondamentales** en appliquant la formule (1.1) et en faisant des hypothèses sur les dividendes futurs (méthode dite DCF, Discounted Cash Flow). Ainsi, si on suppose que les dividendes croissent à un taux g constant (supposé inférieur à r), alors la valeur fondamentale s'écrit (avec $T \to +\infty$) :

$$S_0 = \frac{div}{r - g}$$

Cette façon d'évaluer donne des résultats qui peuvent être très éloignés des prix observés sur les marchés, ce qui est logique compte-tenu de toutes les hypothèses restrictives faites. Elle donne néanmoins un guide sur ce que devrait être le prix de l'action.

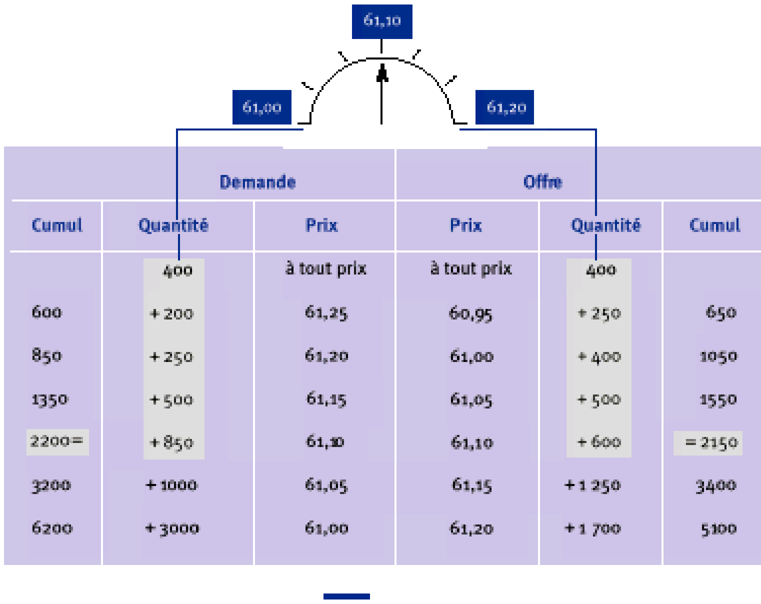
1.2.3 Cotation

En pratique, deux types de marché co-existent : les marchés dits réglementés et les marchés de ‹‹ gré à gré ››. Ce qui les distingue porte sur leur degré d'organisation : les marchés réglementés doivent satisfaire à des contraintes spécifiques d'organisation, de fonctionnement, d'admission des valeurs. Ils sont d'ailleurs en pratique sous la tutelle d'organisme de place (le Conseil des Marchés Financiers en France). Les marchés de gré à gré ont des contraintes plus souples. Dans la suite, on prendra l'exemple des marchés français (on pourra se référer aux documentations de www.bourse-de-paris.fr).

- Les **intervenants** (dits prestataires de services d'investissement) sont les établissements de crédits (banques, caisses d'épargne etc.) et les entreprises d'investissement (ex-sociétés de bourse, ex-sociétés de gestion). Cette organisation date d'une loi de 1996 visant à adapter une directive européenne sur les services d'investissement. Ce qui change par rapport à la situation précédente est la plus grande liberté pour les différents acteurs d'exercer les différentes activités (collecte et transmission des ordres, négociation, gestion de portefeuille etc.). En particulier, la négociation des valeurs mobilières n'est plus le monopole des sociétés de bourse.
- Les marchés réglementés français comprennent (en dehors des marchés d'options (MONEP) et à terme (MATIF) qu'on verra plus loin) : le Premier Marché, le Second Marché, et le Nouveau Marché. En gros, le **Premier Marché** est réservé aux valeurs des plus grandes sociétés (françaises ou étrangères), le **Second Marché** aux entreprises de taille plus faible ou à celles qui ont vocation à rentrer un jour sur le Premier Marché. Enfin, le **Nouveau Marché** est réservé aux valeurs à fort potentiel de croissance (comme les start-up).
- Les titres sont négociés soit au **comptant**, soit en **règlement différé** (ex-règlement mensuel). Au comptant, le paiement et la livraison des titres est immédiate. En règlement différé, le mécanisme est différent : lorsqu'un acheteur (individuel) passe un ordre d'achat (à sa banque par exemple), l'intermédiaire transmet l'ordre d'achat au négociateur qui achète les titres au comptant (donc paiement et livraison immédiate au négociateur). En revanche, l'acheteur final ne paie et n'est livré qu'au dernier jour de bourse du mois. Il y a donc un délai entre la conclusion de la vente et la livraison à l'acheteur final, l'intermédiaire assurant ainsi le portage des titres pendant quelques jours. Evidemment, vu du côté de l'acheteur, le négociateur rend un service puisque d'une certaine façon il avance pendant quelques jours les fonds qui permettront de payer les titres. Ce service génère donc logiquement une commission payée par l'acheteur final à l'intermédiaire. Le mécanisme est symétrique dans le cas d'une vente ; dans ce cas, le négociateur fait l'avance des titres. Tous les titres ne sont pas susceptibles d'entrer dans ce mécanisme : seuls les titres du SBF 120 (indice de marché comprenant les 120 plus grosses capitalisations du marché français) ou ayant une taille suffisante (1 Mds euros de capitalisation, 1 Mns euros traités quotidiennement) sont éligibles. Enfin, la position peut être reportée d'un mois à l'autre.
- Ce système de réglement différé dit SRD (service règlement différé) permet d'acheter à crédit ou de vendre sans avoir les titres. Plusieurs opérations peuvent être faites au cours du mois : il est donc possible d'acheter un ensemble de titres en début de mois et de les revendre au cours du mois sans avoir rien à débourser et en recevant simplement le profit ou la perte de cette combinaison d'opérations, auquel on retranche bien-sûr les commissions de portage.
- L'ordre standard est du type ‹‹ ordre avec limite ››, i.e. ‹‹ je veux acheter tel titre au prix maximum de x euros par titre ›› ou ‹‹ je veux vendre tel titre au prix minimum de x euros par titre ››. Lorsque $x = +\infty$ pour un ordre d'achat, et $x = 0$ pour un ordre de vente, l'ordre est dit ‹‹ à tout prix ››. Ces ordres seront prioritaires sur tous les autres. D'autres ordres existent également : l'ordre

‹‹ tout ou rien ›› porte sur une quantité non fractionnable à vendre ou à acheter avec une limite de prix donnée ; les ordres ‹‹ à seuil de déclenchement ›› comportent une limite en deça ou au-delà de laquelle ils se transforment en ordres à tout prix ; les ordres ‹‹ au prix de marché ›› ne comportent aucune indication de cours.

- Ces marchés sont **gouvernés par les ordres**. Plus précisément, les ordres sont classés par limite de prix et, pour chaque limite, chronologiquement au fur et à mesure de leur introduction. L'exécution des ordres se fait selon deux ordres de priorité : sont servis en priorité les ordres d'achat dont les limites sont les plus élevées et inversement pour les ordres de vente. En clair, on sert d'abord ceux qui sont prêts à acheter ‹‹ cher ›› et ceux qui sont prêts à vendre à un prix ‹‹ faible ››. A limite donnée, les premiers arrivés sont servis les premiers.
- Avant l'ouverture du marché (donc avant 9 h 00 le matin), les ordres de vente et d'achat sont mis en regard et un prix (i.e. le fixing) est calculé. Le prix est calculé de telle sorte que l'offre et la demande soit ‹‹ la plus équilibrée possible ››, c'est-à-dire le prix qui maximise la quantité de titres échangés.
- La négociation de valeurs mobilières - qui était avant 1996 le monopole des sociétés de bourse - est désormais possible pour tous les intervenants. Voici l'exemple donné dans la documentation SBF (www.bourse-de-paris.fr)



Demande			Offre		
Cumul	Quantité	Prix	Prix	Quantité	Cumul
	400	à tout prix	à tout prix	400	
600	+200	61,25	60,95	+250	650
850	+250	61,20	61,00	+400	1050
1350	+500	61,15	61,05	+500	1550
2200=	+850	61,10	61,10	+600	=2150
3200	+1000	61,05	61,15	+1 250	3400
6200	+3000	61,00	61,20	+1 700	5100

Graphique 1.1 – Exemples de carnet d'ordre

Si on note $a(l)$ (resp. $v(l)$) la quantité de titres demandés (resp. offerts) pour la limite l, c'est-à-dire les ordres d'achat (resp. vente) pour un prix ne devant pas dépasser (resp. être inférieur à) l, alors le premier fixing se fait au prix p tel que :

$$\underset{p}{Min} \quad \left|\sum_{l=p}^{+\infty} a(l) - \sum_{l=0}^{p} v(l)\right|$$

où $\sum_{l=p}^{+\infty} a(l)$ est la fonction de demande de titres (fonction décroissante de p) et $\sum_{l=0}^{p} v(l)$ la fonction d'offre de titres (fonction croissante de p). On voit dans cet exemple que l'offre et la demande ne coïncident pas parfaitement et donc seuls 800 des 850 titres demandés à 61.10 euros sont servis.

- Au cours de la journée, chaque introduction d'un nouvel ordre génère une transaction pour peu qu'il y ait une offre ou une demande compatible (en prix) en face. Suivant les cas, la confrontation des ordres est continue. Dans d'autres cas, seuls des fixings réguliers ont lieu.

1.2.4 Prix d'actions et théorie économique

Les prix des actions varient quasi-continûmment au cours du temps et de façon non prévisible, d'où l'idée d'introduire des modèles aléatoires. Ces variations de prix ont plusieurs origines qu'on peut voir à partir de la formule d'actualisation (1.1) : changement dans les anticipations de profit des entreprises, mouvements des taux d'intérêt, changement d'appréciation sur la bonne santé des entreprises etc. Le rôle des analystes financiers est justement d'intégrer tous ces paramètres dans une formule du type (1.1) pour en déduire ce que devrait être le ‹‹ vrai ›› prix de l'action (on parle de cours fondamental) afin de conseiller les investisseurs potentiels. En pratique, on constate souvent des écarts notables entre les évaluations des analystes et les prix de marché observés : tout l'art de l'analyste est de savoir s'il s'agit d'une erreur d'évaluation de sa part ou une erreur du marché qui sera donc tôt ou tard corrigée. Les prix des actions de sociétés Internet en 1999 et 2000 constituent un exemple typique de ce genre d'écart.

Il faut noter également que le prix de marché doit tenir compte de l'aversion au risque des intervenants du marché et plus généralement de leur fonction d'utilité, paramètre qu'il est évidemment difficile d'estimer. En pratique, les analystes rajoutent une prime de risque dans la formule d'évaluation (1.1), sous la forme d'un terme supplémentaire au dénominateur (i.e. r+prime). Cette prime (positive) réduit mécaniquement la valeur que l'on attribue à un euro aléatoire dans le futur et synthétise à la fois le niveau de risque ressenti par les intervenants du marché et leur aversion pour ce risque.

Du point de vue des produits dérivés, le cours de l'action est une donnée et son évolution est modélisée par un processus aléatoire dans lequel on ne cherche pas à introduire les préoccupations des analystes sur les variables susceptibles d'influencer les cours futurs. L'idée est d'une part qu'il est illusoire de prévoir les cours futurs et d'autre part qu'on n'a pas réellement besoin de faire ces prévisions : le cours d'une action est une source potentielle de risque - que le cours monte ou qu'il baisse - et la vraie question est de savoir comment il influe sur les prix des produits dérivés.

1.3 Les obligations

1.3.1 Généralités

Les **titres obligataires** sont des titres de dette et non de propriété comme les actions. Ces titres s'apparentent complètement à une opération de prêt / emprunt : une entreprise qui émet des obligations emprunte des fonds aux acheteurs des titres. La seule différence avec les opérations bancaires d'emprunt et de prêt réside dans le caractère négociable de ces titres. L'acheteur initial du titre[1] a la liberté de revendre son titre à un autre intervenant, ce dernier devenant le créancier de l'émetteur du titre.

Les émetteurs possibles peuvent être très divers : Etats, entreprises, collectivités locales, fonds de créances etc. Les flux générés par ces titres sont de nature très différente des titres d'action : dans le cas des actions, les flux sont des dividendes, c'est-à-dire des parts du bénéfice de l'entreprise. S'agissant des titres obligataires, les flux sont des flux d'intérêt et de remboursement du capital. Ces flux sont ‹‹ moins ›› aléatoires que pour les dividendes d'action (d'où le terme anglais de fixed-income securities). Plus précisément, l'émetteur du titre (i.e. l'emprunteur) n'a en général pas de levier pour modifier en cours de route le montant des flux versés aux détenteurs de titre. Il s'agit donc d'un contrat où l'emprunteur s'engage à rembourser le capital emprunté ainsi que des intérêts selon des modalités et une règle de fixation décidées initialement et intangibles par la suite (sauf défaut de l'emprunteur).

Enfin, lorsqu'il s'agit d'une entreprise en difficulté financière, les créanciers sont prioritaires devant les actionnaires.

1.3.2 Calcul des flux

Deux titres obligataires se dinstinguent par la règle de détermination des flux : obligation à taux variable, à taux fixe, obligation indexée etc. On note K le capital de chaque titre (encore appelé capital nominal, valeur faciale du titre, principal) : K représente la dette de l'émetteur vis-à-vis du détenteur du titre. On note également T la durée du titre, c'est-à-dire la durée au-delà laquelle les intérêts ont été payés et le capital a été remboursé. On pourrait imaginer une durée infinie ; on parle alors de rente perpétuelle.

[1] On parle de marché primaire pour désigner la mise en vente initiale des titres, puis de marché secondaire par la suite.

A l'émission du titre, sont stipulées les conditions de paiement des intérêts (i.e. les coupons) et de remboursement du capital (i.e. l'amortissement du capital). En notant m_t le flux versé au détenteur du titre à la date t, on a donc une mécanique du type :

$$\left\{\begin{array}{lcl} m_t & = & i_t + a_t \\ \text{avec} & & \\ i_t & = & \text{intérêts} \\ a_t & = & \begin{array}{c}\text{amortissement} \\ \text{du capital}\end{array} \end{array}\right.$$

L'amortissement du capital représente la quantité de capital remboursée à chaque période : l'amortissement en t est donc par définition égal au capital restant dû (noté C_{t-1}) en $t-1$ moins le capital restant dû en t :

$$a_t = K_{t-1} - K_t$$

Les intérêts sont très logiquement calculés comme l'application d'un taux d'intérêt sur le capital restant dû en début de période, soit :

$$i_t = c_t.K_{t-1}$$

où c_t est aussi appelé **taux de coupon**. Les modalités de calcul des flux sont connues au départ, ce qui signifie qu'on se donne les deux fonctions :

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_t & = & c(t, z_t) \\ & & \\ a_t & = & a\left(t, z_t\right) \end{array}\right.$$

et qui permet de calculer les flux générés par le titre. (z_t) est une variable de référence dont on verra des exemples par la suite (inflation, taux de marché etc.). Dans l'immense majorité des cas et à l'inverse des emprunts accordés par le système bancaire aux particuliers, la fonction $a(t)$ est nulle sauf en T où elle vaut K : en clair, le capital n'est remboursé qu'à la fin (**remboursement dit in-fine**) et seuls des flux d'intérêt sont versés avant T.

1.3.3 Quelques exemples

On peut donner quelques exemples en partant des plus classiques :

- **Titre à taux fixe et à remboursement in-fine**. C'est le cas où :

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_t & = & c \\ & & \\ a_t & = & 0 \text{ pour } t < T \text{ et } K \text{ pour } t = T \end{array}\right.$$

  Les flux sont donc constants égaux à $m_t = c.K$ et $m_T = (1+c).K$. Une majorité de titres d'obligation fonctionne sous ce schéma. Ainsi, la plupart des Obligations Assimilables du Trésor (OAT) - qui sont les titres de dette émis par l'Etat français - est à taux fixe et à remboursement in-fine.
- **Titre à taux variable et à remboursement in-fine**. La seule chose qui change est que c_t est désormais une fonction d'une référence variable :

$$c_t = c(z_t)$$

  A titre d'exemple, l'OAT TEC 10 ans est une obligation à taux variable c_t où la référence z_t est égale à un taux à 10 ans (on verra plus loin ce qu'on entend par là). Concrètement, elle se calcule comme ‹‹ l'interpolation linéaire des taux de rendement des deux OAT les plus proches de la maturité exacte de 10 ans et d'un encours supérieur à 20 Mds FRF (3 Mds euros) ›› (ce qu'on entend par taux de rendement sera clarifié par la suite). Le coupon est versé trimestriellement et vaut $c_t = (1+z_t)^{\frac{1}{4}} - 1$, avec z_t le taux TEC 10 (défini à l'instant) calculé (en gros) un trimestre avant versement du coupon (exactement 5 jours ouvrés avant la date de jouissance du coupon). On dit que le taux est préfixé[2].

[2] Pour plus d'informations sur le TEC 10 et l'OATi, voir www.francetresor.gouv.fr

- **Titre indexé et à remboursement in-fine - cas de l'OATi**. Par rapport à la situation précédente, (z_t) est le taux d'inflation des prix des biens et services (indice INSEE) et le capital remboursé est garanti contre l'inflation, soit :

$$a_t = 0 \text{ pour } t < T \text{ et } K.\max\left(I(T), 1\right) \text{ pour } t = T$$

où $I(t)$ désigne la hausse des prix entre la date d'émission (date 0) et la date t. En clair, la dette de l'émetteur vis-à-vis du détenteur est égale à un certain capital K revalorisé par l'inflation constatée entre la date d'émission et la date de remboursement du capital. Toutefois, s'il y a eu déflation (i.e. baisse des prix, $I(t) < 1$), alors le capital remboursé est égal au capital nominal K, ce qui est un avantage pour le détenteur du titre. Les intérêts ou les coupons sont calculés comme $i_t = c.K.I(t)$. Le calcul de la variable $I(t)$ se fait à partir de l'indice INSEE des prix de consommation (IPC), qui est l'indice des prix habituel de l'INSEE, avec toutefois une nuance : l'IPC du mois n n'étant connu qu'en fin de mois $n+1$, la référence $I(t)$ pour $t = j$ième jour du mois m est égale à : $IPC_{m-3} + \frac{j-1}{N_m}.\left(IPC_{m-2} - IPC_{m-3}\right)$, où N_m est le nombre du jour du mois m.
- **Titre zéro-coupon**. C'est un titre particulier qui ne verse aucun flux sauf en T. Ces titres ont une grande importance théorique car ils vont jouer le rôle d'une base canonique pour l'espace des titres à flux fixes. Dans le cas d'un zéro-coupon, on a donc :

$$m_t = 0 \text{ pour } t < T \text{ et } m_T = 1$$

En pratique, les zéro-coupon apparaissent par démembrement d'obligations existantes (on parle de Strips). En France, un grand nombre d'OAT sont démembrées depuis la première opération en juin 1991.

1.3.4 Modélisation des prix d'obligation

On s'intéresse ici à des titres obligataires dont les flux sont parfaitement connus à l'avance même si, dans les exemples précédents, on a vu que ce n'était pas toujours le cas (TEC 10, OATi etc.). Si on note m_1,..., m_T ces flux fixes, un titre obligataire peut se concevoir comme un portefeuille (i.e. une combinaison linéaire) de titres zéro-coupon. En définissant un titre zéro-coupon comme un titre qui verse 1 euro à une date t future, alors un titre obligataire est un portefeuille composé de m_1 titres zéro-coupon d'échéance 1, ..., m_T titres zéro-coupon d'échéance T.

Par conséquent, le prix d'une obligation s'écrit :

$$P = m_1.B(0,1) + .. + m_T.B(0,T)$$

où $B(0,t)$ est le prix d'un titre zéro-coupon aujourd'hui (date 0) qui verse un euro à la date t. On appelle aussi ces prix de zéro-coupon **Discount Factors**. Ils permettent dans un deuxième temps de définir la notion de taux d'intérêt. Il est important de noter que les différentes notions de taux d'intérêt qu'on rencontrera ne sont qu'une manière d'exprimer le prix. Ainsi, on définit différentes notions de taux d'intérêt comme :

$$B(t,T) = \frac{1}{\left[1 + r(t,T)\right]^{T-t}}$$

ou :

$$B(t,T) = \frac{1}{\left[1 + (T-t).r(t,T)\right]}$$

ou encore :

$$B(t,T) = 1 - (T-t).r(t,T)$$

Ces trois notions (respectivement **taux d'intérêt actuariel**, **post-compté**, **pré-compté**) sont certes équivalentes au premier ordre mais peuvent induire des écarts substantiels numériquement. Il est donc important de savoir, pour chaque marché, la convention de taux d'intérêt utilisée, la façon de compter les durées (en jours, mois, fraction d'années etc.).

Au total, en prenant la convention actuarielle, le prix d'une obligation aujourd'hui (date 0) s'écrit :

$$P = \frac{m_1}{\left[1 + r(0,1)\right]} + ... + \frac{m_T}{\left[1 + r(0,T)\right]^T} \tag{1.2}$$

formule dite **formule d'actualisation** qui est dans le même esprit que la formule de valorisation des actions (1.1).

Les marchés définissent également la notion de taux de rendement actuariel TRA (yield-to-maturity ou internal rate of return en anglais) d'une obligation par la formule :

$$P = \frac{m_1}{(1+TRA)} + ... + \frac{m_T}{[1+TRA]^T}$$

Si on compare cette formule avec la formule d'actualisation (1.2), on peut toujours considérer que le TRA est une sorte de moyenne pondérée des taux zéro-coupon. Une fois de plus, les différentes notions de taux d'intérêt ne sont qu'une façon d'exprimer la notion de prix, qui elle est non-ambigue.

Enfin, si on s'inspire de ce qui a été dit sur la modélisation des prix d'actions, on peut se placer dans un monde déterministe où un investisseur détient à la date 0 une somme $B(0,T)$ euros. Il peut soit la placer sur une période et il obtiendra :

$$B(0,T).\,[1+r(0,1)]$$

soit acheter un titre zéro-coupon d'échéance T (dont le prix aujourd'hui est justement $B(0,T)$) et qui vaudra $B(1,T)$ en 1. Si le monde est déterministe, ces deux stratégies doivent être équivalentes :

$$B(1,T) = B(0,T).(1+r(0,1))$$

ou encore :

$$B(1,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,1)}$$

Ainsi, le prix demain se déduit par récurrence des prix aujourd'hui. Comme le monde n'est pas déterministe, on modélisera l'évolution des prix en rajoutant un aléa ε_1 dans cette équation.

1.3.5 Taux d'intérêt et théorie économique

Les taux d'intérêt sont définis ici à partir des prix (des titres à flux fixes tels que les obligations). Il s'agit bien de la même notion intuitive habituelle : $r(t,t+1)$ par exemple désigne bien le taux de rendement d'un placement d'un euro sur la période $(t,t+1)$. Ce taux mesure la préférence des individus pour le présent. La préférence naturelle de tout individu est évidemment de consommer aujourd'hui plutôt que d'attendre demain, ne serait-ce que parce que l'individu a une probabilité non nulle d'être mort demain. Les prix des zéro-coupon qui mesurent exactement cette idée (i.e. le prix d'un euro demain vaut moins qu'un euro disponible aujourd'hui) doivent donc être inférieurs à 1. De façon équivalente, les taux d'intérêt doivent être positifs. Enfin, des taux d'intérêt élevés signalent une forte préférence pour le présent : les individus exigent un dédommagement élevé (i.e. des intérêts élevés) pour ne pas consommer aujourd'hui et reporter cette consommation à plus tard.

Lorsqu'on considère des taux d'intérêt sur un placement monétaire (i.e. on échange des euros d'aujourd'hui contre des euros demain), on parle alors de **taux nominal**. Lorsque le bien n'est pas la monnaie mais un autre bien, on parle de **taux réel**. L'or est un exemple : on peut imaginer un zéro-coupon qui verse un gramme d'or en T et donc le prix de ce titre exprimé en gramme d'or aujourd'hui permet de définir un taux d'intérêt réel. Les économistes appellent taux réel la quantité : taux nominal moins taux d'inflation (des prix de consommation des ménages, en général), ce qui est homogène à la notion précédente à condition de ne plus considérer l'or mais un panier représentatif de la consommation des ménages (à l'instar du panier de l'INSEE).

On parle de **courbe par terme des taux d'intérêt** ou plus simplement **courbe des taux d'intérê**t ou encore **gamme des taux d'intérêt**. Ces termes désignent la courbe observée à un instant t et qui donne le taux d'intérêt $r(t,t+h)$ pour h variant de 0 à l'infini (en pratique 30 ans).

Comme pour les actions, les prix des titres zéro-coupon (et donc les prix des obligations) varient constamment. Ainsi, chaque point de la courbe des taux bouge d'un instant à l'autre. A l'inverse des actions, on n'a pas affaire à un processus aléatoire de dimension 1 (i.e. le prix d'une action) mais à un processus de dimension infinie (i.e. les prix des zéro-coupon pour toutes les maturités). Nous verrons que les idées financières utilisées pour modéliser un point (cas des actions) ou une courbe (cas des taux d'intérêt) sont fondamentalement les mêmes. En revanche, le traitement mathématique sera différent encore que, dans l'écrasante majorité des modèles, on réduit la dimension infinie des mouvements de la courbe des taux à des dimensions finies. Ainsi, on considérera par exemple que, lorsque la courbe des taux d'intérêt bouge, on peut réduire ce mouvement - au 1er ordre - à un mouvement de translation, au 2ième ordre, à un mouvement de pentification ou d'aplatissement, au 3ème ordre à une variation de la concavité (dérivée seconde de la courbe) etc. Suivant l'ordre auquel on s'arrête, le problème aura une dimension plus ou moins grande mais toujours finie, ce qui simplifie grandement les choses...

A l'inverse des actions, il n'y a pas d'incertitude sur les flux futurs (hormis tous les cas d'obligations à taux variable, indexées sur l'inflation etc.) et les variations de prix sont donc essentiellement gouvernées par les variations des paramètres des individus, notamment la préférence pour le présent par rapport aux dates futures telle qu'elle se reflète dans l'équilibre offre - demande de titres. Toutefois, la situation est plus complexe que cela. Les taux d'intérêt ne reflètent pas uniquement la préférence pour le présent mais également la politique monétaire. En effet, la banque centrale d'un pays (la Banque Centrale Européenne pour la zone euro, la Federal Reserve pour les Etats-Unis) peut contrôler les taux d'intérêt courts (i.e. le taux d'intérêt pour un placement d'aujourd'hui à aujourd'hui plus quelques jours) car, étant capable de créer de la monnaie, elle peut prêter autant qu'elle veut et au taux d'intérêt qu'elle souhaite (avec des limites institutionnelles bien-sûr). Dans ces conditions, elle contrôle assez bien les taux courts mais moins les maturités plus élevées. Par conséquent, les mouvements de la courbe des taux d'intérêt reflète, pour les maturités longues, l'offre et la demande de titres et donc en dernière analyse la préférence pour le présent des individus, et, pour les maturités courtes, la politique monétaire.

Les choses sont encore plus compliquées quand on songe qu'il n'est pas possible de séparer les deux phénomènes. Ils seront de facto liés : en effet, un individu qui veut placer son argent sur par exemple 10 ans peut toujours acheter un titre zéro-coupon de maturité 10 ans, ou alternativement acheter un zéro-coupon de maturité un an avec l'idée de le revendre l'année prochaine pour en racheter un autre de maturité un an etc. Ces deux placements sont de maturité 10 ans mais sont très différents car on ne sait pas aujourd'hui combien vaudra dans un an le zéro-coupon de maturité un an. En clair, on ne connait pas la courbe des taux qui se réalisera dans un an. Toutefois, s'agissant de placements à 10 ans, il y a certainement un lien : en moyenne, les rendements ne doivent pas être trop différents. Dans le premier cas, le taux de rendement annuel est $r(0,10)$, dans le second cas, il est plutôt égal à $\frac{1}{10}\left[r(0,1)+r(1,2)+...+r(9,10)\right]$ (au premier ordre). Si tous les taux courts $r(t,t+1)$ sont plutôt gouvernés par la politique monétaire et les taux longs $r(0,10)$ par l'offre et la demande, et si en plus on ajoute l'idée que $r(0,10)$ ne doit pas être trop différent de l'espérance de $\frac{1}{10}\left[r(0,1)+r(1,2)+...+r(9,10)\right]$, alors on est forcé de constater que les deux phénomènes (préférence pour le présent et politique monétaire) interagissent.

L'idée que les taux longs doivent être proches d'une certaine espérance de la moyenne des taux courts intermédiaires est à la base des raisonnements des économistes et s'appelle **hypothèse de la théorie des anticipations**. En exploitant cette hypothèse, une hausse des taux d'intérêt révèle que les marchés anticipent des hausses des taux courts par la banque centrale (i.e. un resserrement de la politique monétaire), et inversement en cas de baisse (i.e. un assouplissement de la politique monétaire). De fait, cette grille d'analyse rend assez bien compte des tendances de fond des mouvements de taux d'intérêt.

Enfin, il faut remarquer que les taux d'intérêt comportent une dimension supplémentaire ‹‹ risque de contrepartie ››, c'est-à-dire un risque que l'émetteur du titre - l'emprunteur - fasse défaut et soit donc dans l'impossibilité de rembourser sa dette. Ce risque est négligeable pour les émissions de la plupart des Etats (on parle de risque souverain) mais il l'est moins pour d'autres acteurs comme les collectivités locales. Il l'est très nettement moins pour bon nombre d'entreprises émettrices : le taux d'intérêt que doivent payer ces émetteurs est alors une fonction croissante de leur risque de défaut. En effet, les acheteurs de titres exigent un taux d'intérêt d'autant plus élevé que l'émetteur du titre a un risque de ne jamais rembourser sa dette (à l'extrême, on parle de marché des ‹‹ high yields ››). On décompose alors les taux d'intérêt sur ce marché en une partie ‹‹ taux d'intérêt pur ›› et une partie ‹‹ risque de défaut ››.

1.3.6 Encore quelques notions pour finir

On donne ici en vrac quelques termes utilisées lorsqu'on parle d'obligations :

– la **duration** d'une obligation est définie comme :

$$D = \frac{\frac{m_1}{(1+TRA)} + \frac{2.m_2}{(1+TRA)^2} + ... + \frac{T.m_T}{[1+TRA]^T}}{P}$$

c'est-à-dire la moyenne pondérée des dates futures 1,..., T, la somme des pondérations étant égale à 1. Cette quantité est homogène à une durée et est exactement égale à T pour un zéro-coupon. Il est facile de vérifier que c'est aussi la dérivée du logarithme du prix d'une obligation par rapport au taux de rendement actuariel TRA (au signe près et à un facteur $1 + RA$ près). Par conséquent, D s'appelle aussi sensibilité du prix ; elle mesure de combien (en pourcentage) le prix du titre varie - au 1er ordre - lorsque TRA varie. Que cela signifie-t-il ? Supposons que la courbe des taux soit plate aujourd'hui, i.e. $r(0,t) = r =$ constante (pour tout t), alors $TRA = r$ et D mesure le pourcentage de variation du prix quand la courbe des taux d'intérêt a un mouvement de translation. D mesure donc la sensibilité au 1er ordre du prix du titre à un mouvement des taux d'intérêt. Cette grandeur est donc très utile pour un financier car elle permet de quantifier le risque lié à des mouvements de taux d'intérêt. En particulier, la sensibilité d'un zéro-coupon de maturité 10 ans est plus forte que pour une obligation (à coupons) de même maturité : le premier titre réagira donc plus à un mouvement des taux d'intérêt que le second.
– prix **pied de coupon** : le prix du titre obligataire en faisant abstraction du prochain coupon. Le prochain coupon s'appelle le coupon couru.
– conventions de date : en pratique, il est très important de savoir comment les durées sont mesurées. Elles le sont généralement en jours mais, comme les taux d'intérêt sont annuels, il faut convertir les jours en fraction d'années. Selon les marchés, on convient de considérer que l'année a 360 jours (et le mois 30 jours) ou 365 jours.

1.4 Les matières premières

Nous n'insisterons pas ici sur ces actifs qui recouvrent les métaux précieux (or, argent etc.), le pétrole et ses sous-produits, les matières premières agricoles, et, depuis récemment, l'électricité, la bande passante dans l'industrie des télécommunications, et bientôt les permis d'émission des gaz à effet de serre. En pratique, on met dans cette catégorie tout ce qui ne relève pas du marché des actions, des taux d'intérêt et des taux de change[3].

Les intervenants sur ces marchés ne souhaitent souvent pas prendre livraison des biens eux-même (assez peu de gens ont réellement besoin d'acheter une cargaison de pétrole...) : les transactions concernent surtout les produits dérivés (contrats à terme que nous verrons par la suite). Les intervenants cherchent soit à spéculer, soit - et c'est ce qui justifie l'existence de ces marchés dérivés - à se couvrir contre des variations de prix. Cela peut être par exemple un industriel gros consommateur d'énergie qui veut se couvrir contre une hausse des prix du pétrole, un producteur de maïs qui veut prendre une assurance contre une baisse du prix du maïs etc. Comme l'enseigne la théorie économique, l'introduction d'une assurance contre un aléa améliore le bien-être des individus : les marchés dérivés jouent ce rôle.

La spécificité des matières premières par rapport aux actions et aux obligations est qu'elles ne peuvent généralement pas être stockées, tout au moins sans coût : l'électricité n'est pas stockable, une cargaison de pétrole est coûteuse à stocker, etc. Le coût de stockage doit donc être intégré dans la modélisation et ne peut être négligé.

[3] On constate une tendance historique à ‹‹ marchéiser ›› toute sorte de biens entrant dans les processus de production. Ces nouveaux marchés apparaissent souvent lorsque le régulateur cherche à améliorer l'efficacité de l'économie en démantelant des monopoles, en internalisant des externalités telles que la pollution etc. Dans ces situations, la solution la plus simple est en effet d'introduire un marché organisé du bien, qui doit conduire - d'après les théorèmes fondamentaux de l'économie - à une situation Pareto améliorée.

1.5 Les taux de change

Les **taux de change** peuvent se concevoir comme une généralisation des actions : ainsi le prix en euro d'une action est le ‹‹ taux de change ›› de l'euro / action, c'est-à-dire le prix en euro pour acquérir un titre d'action. Devises et actions sont des numéraires, c'est-à-dire un étalon de valeur. Ainsi, comme les prix d'actions, les taux de change fluctuent au cours du temps. En outre, la modélisation sera similaire.

1.5.1 Modélisation des taux de change

En supposant que le monde est déterministe, et si on note S_1 (resp. S_0) le prix en euro d'1 dollar en date 1 (resp. date 0) (i.e. le taux de change euro / dollar), alors S_0 euros aujourd'hui investis dans l'achat d'un dollar rapportent $S_1(1 + r_1^f)$ euros demain, où r_1^f est le taux d'intérêt d'un placement en dollar sur la période $(0, 1)$ (f pour ‹‹ foreign ››). Parallèlement, on peut investir la même somme sur un actif sans risque en euro (i.e. la caisse d'épargne) et obtenir demain $(1+r^d).S_0$ si r^d est le taux d'intérêt domestique. Dans un monde déterministe et en négligeant les coûts de transaction et les taxes, les deux placement doivent coïncider, soit :

$$S_1 = \frac{1 + r^d}{1 + r^f}.S_0$$

ou encore :

$$S_0 = \frac{1 + r^f}{1 + r^d}.S_1$$

Si on prolongeait cette relation par récurrence, on aurait alors (en supposant que le monde est déterministe pour toujours) :

$$S_0 = . \left[\prod_{t=0}^{T-1} \frac{1 + r_t^f}{1 + r_t^d} \right] .S_T \tag{1.3}$$

Le monde n'étant pas déterministe, il est alors logique de postuler une dynamique des prix d'actions de la forme :

$$S_1 = \frac{1 + r^d}{1 + r^f}.S_0 + \varepsilon_1$$

où ϵ_1 est un aléa dont la réalisation ne sera connue qu'en 1. La question essentielle est donc de savoir quel type de loi suit la variable ε_1.

1.5.2 Interprétation économique

La relation (1.3) donne une grille de lecture des mouvements de change. Certes, cette relation ne tient que dans un monde déterministe : les économistes l'utilisent en disant qu'elle reste vraie dans le monde réel mais ‹‹ en moyenne ›› seulement. Ce genre d'hypothèse relève du même esprit que l'hypothèse de la théorie des anticipations évoquée ci-dessus à propos des taux d'intérêt. Les économistes parlent d'**hypothèse de parité non couverte des taux d'intérêt**. Ainsi, l'euro peut être faible vis-à-vis du dollar (S_0 élevé) soit parce que les marchés anticipent qu'il sera faible dans l'avenir, soit parce que les marchés anticipent que les américains auront une politique monétaire moins souple que les européens (i.e. $r_t^f > r_t^d$).

1.6 Quelques conclusions

Ce chapitre d'introduction a fait une présentation très informelle des différents actifs de base. Il est à noter qu'on a beaucoup utilisé de raisonnements où on compare deux placements et où on soutient qu'ils doivent avoir, sous certaines conditions, le même rendement. Ce type de raisonnement sera formalisé par la suite et sera systématisé à travers l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage. Un arbitrage est une opération qui permet de faire un gain toujours positif sans rien investir. Dit de cette façon, il paraît justifié de supposer que ce type d'opérations n'existe pas ou, lorsqu'elles existent, elles disparaissent rapidement au profit des premiers intervenants qui s'en sont aperçu. Cette hypothèse est donc d'autant plus justifiée que le marché fonctionne bien.

On verra par la suite que cette hypothèse est à la base de tous les modèles d'évaluation (actions, taux d'intérêt, change etc.) et a - au-delà de son apparence de trivialité - un contenu mathématique très puissant.

1.7 Références bibliographiques

On pourra utilement se reporter aux ouvrages suivants :

- M. Avellaneda et P. Laurence (2000), *Quantitative Modelling of Derivative Securities : From Theory to Practice*, Chapman & Hall.
- P. Chabardès et F. Delclaux (1996), *Les produits dérivés*, Gualino éditeur.
- M. Musiela et M. Rutkowski (1997), *Martingale Methods in Financial Modelling*, Applications of Mathematics, vol. 36, Springer-Verlag, Berlin.
- P. Wilmott (1998), *Derivatives : The Theory and Practice of Financial Engineering*, John Wiley & Sons.

et évidemment au cours de Nicole El Karoui dans la voie Mathématiques Appliquées.

2

Produits dérivés action

2.1 Introduction

Après avoir introduit les actifs de base au chapitre précédent, on aborde ici les actifs contingents, c'est-à-dire les actifs dont les flux générés sont des fonctions - pas nécessairement continus - des prix des actifs de base.

L'imagination des marchés étant sans limite, le nombre et la variété des produits contingents sont quasiment infinies et il est donc difficile d'en faire une présentation exhaustive. En outre, les produits dérivés mélangent couramment différents types d'actifs de base : action et obligation, taux de change et taux d'intérêt etc. Il est donc de plus en plus arbitraire de séparer produits dérivés action et produits dérivés taux d'intérêt, séparation que nous ferons tout de même.

Avant même de rentrer dans les détails, on peut se demander pourquoi les marchés de produits dérivés ont pris une telle place depuis la création du premier marché organisé en 1973 (Chicago Board Options Exchange). La réponse quelque peu tautologique est que cela doit répondre à un besoin. Fondamentalement, les produits dérivés permettent de se couvir contre certains risques, de la même façon qu'un contrat d'assurance automobile couvre contre les dégâts consécutifs à un accident automobile. En effet, un contrat d'assurance (resp. un actif dérivé) est un produit contingent qui génère un flux lorsqu'un évènement tel qu'un accident (resp. une variation du prix d'une action, une baisse des taux d'intérêt etc.) se réalise. Or, en environnement incertain, les économistes montrent que le bien-être d'un individu augmente lorsqu'on lui donne la possibilité de s'assurer.

Il faut noter que tous les agents ne sont pas exposés aux même risques et de la même façon. Une entreprise fortement importatrice (de pétrole par exemple) sera très exposée à une hausse du dollar (par rapport à la monnaie de son pays de résidence) alors qu'à l'inverse une entreprise exportatrice (vers les Etats-Unis) craindra une baisse du dollar. On peut également imaginer une entreprise qui consomme beaucoup de produits pétroliers dans son processus de production mais qui exporte vers les Etats-Unis : une baisse du dollar diminue ses coûts et simultanément ses recettes. Dans ce cas, elle est partiellement immunisée contre des variations du dollar. Dans ces exemples, on constate que des entreprises - exposées différemment à une variation du dollar - peuvent avoir intérêt à se rencontrer et à établir entre eux des contrats qui leur permettent de s'assurer mutuellement.

Les marchés de produits dérivés sont une réponse naturelle à ce besoin d'assurance : comme tout marché, ils permettent à des agents de se rencontrer pour faire des échanges mutuellement bénéfiques. Toutefois, ces échanges ne sont pas des biens physiques mais des ‹‹ quantités de risque ››.

2.2 Les options de base

2.2.1 *Définitions*

Définition 1 *Une* ***option standard d'achat*** *(i.e.* ***call****) est un droit d'acheter un actif donné à un prix convenu à l'avance, à une date future donnée.*

Il s'agit donc d'un droit et non d'une obligation : le détenteur de l'option a toujours le droit de ne pas exercer son option, par exemple et surtout si l'exercice ne lui est pas profitable. Le ‹‹ prix convenu à l'avance ›› s'appelle le **prix d'exercice** (i.e. le strike en anglais) : c'est le fait qu'il soit connu à l'avance qui donne de la valeur à l'option. En effet, une option qui donnerait le droit d'acheter une action demain au prix de marché demain n'a évidemment aucune valeur. La ‹‹ date future donnée ›› s'appelle la **date d'exercice.** L'‹‹ actif donné ›› s'appelle l'actif sous-jacent (i.e. underlying).

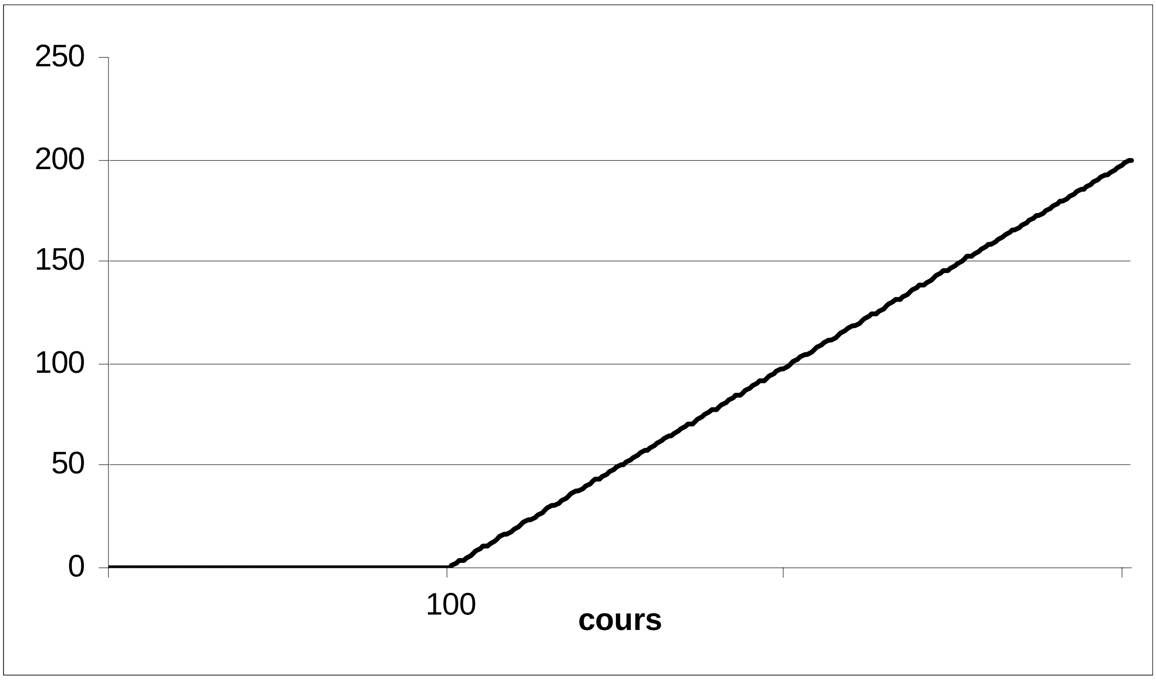
Lorsque l'option ne peut être exercée qu'à la date d'exercice, on dit que l'option est **européenne**, par opposition au cas **américain** où l'exercice peut se faire à tout moment précédant cette date d'exercice.

Si on suppose que l'acheteur de l'option est rationnel, il l'exercera s'il y a intérêt, c'est-à-dire si le prix de l'actif le jour de la date d'exercice est supérieur au prix d'exercice. Mathématiquement, le flux généré (i.e. le payoff) s'écrit :

$$\max(S_T - K, 0)$$

si S_T est le prix de marché de l'actif sous-jacent à la date d'exercice T. On note également ce gain sous la forme :

$$(S_T - K)^+$$



Option d'achat standard de prix d'exercice 100

Dans le cas contraire où le prix de l'actif est inférieur au prix d'exercice, le détenteur de l'option n'exerce pas son option, reçoit donc 0 euro, et constate ex post qu'il a dépensé en pure perte le prix d'achat de l'option, de même qu'un automobiliste peut avoir le sentiment d'avoir payé en pure perte sa prime d'assurance s'il n'a pas eu d'accident pendant la période.

Un intervenant achète une option d'achat s'il craint une hausse du cours de l'actif sous-jacent : l'option lui permet de se prémunir contre ce risque. A titre d'exemple, considérons un intervenant qui achète une option d'achat de prix d'exercice 35 euros et d'exercice dans un mois. Supposons que dans un mois le cours de l'action soit de 38 euros : l'acheteur de l'option décidera d'exercer son option et achètera l'action à 35 euros pour éventuellement la revendre immédiatement au prix de marché, soit 38 euros, empochant ainsi un gain de 38-35 = 3 euros par option achetée. Si au contraire le cours dans un mois est de 30 euros, le détenteur de l'option n'exerce pas, reçoit 0 euro et donc constate une perte totale égale au prix d'achat de ses options.

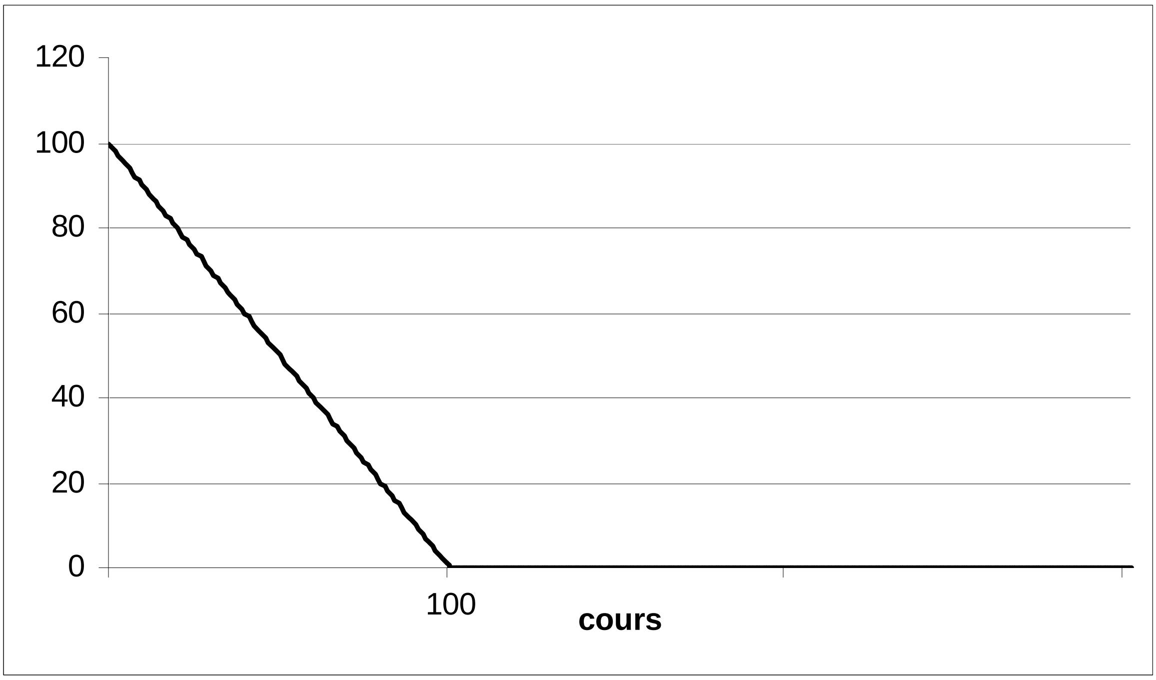
Il faut noter qu'à partir du moment où on détient une option d'achat, on peut souhaiter la revendre si les conditions de marché ou si l'exposition au risque du détenteur ont changé. Les options d'achat peuvent généralement se vendre ou s'acheter comme n'importe quel actif financier.

Symétriquement, on définit l'option de vente (i.e. put) de la façon suivante :

Définition 2 *Une **option standard de vente** (i.e. **put**) est le droit de vendre un actif donné à un prix convenu à l'avance, à une date future donnée.*

L'acheteur d'une option de vente anticipe ou craint une baisse de l'actif sous-jacent. Comme précemment, on peut acheter une option de vente ou la vendre quand on en détient. Mathématiquement, le profil de gain est évidemment le suivant :

$$\max(K - S_T, 0)$$



Option de vente standard de prix d'exercice 100

2.2.2 Exemples de contrat d'option - MONEP

Le Marché des Options Négociables de Paris est un marché organisé sur lequel sont traités notamment des options sur différents titres d'actions et également sur des indices. L'indice CAC 40 synthétise l'évolution des 40 plus grosses capitalisations de la Bourse de Paris et donc évolue au jour le jour comme le ferait n'importe quelle action. On peut donc considérer des options sur cet indice : ce type d'option permet donc de se couvrir ou de spéculer sur une hausse ou une baisse générale du marché des actions (tout au moins des 40 plus grosses capitalisations). A titre d'exemple, voici la notice explicative de cette option (www.monep.fr) :

Exemple : OPTIONS SUR L'INDICE CAC 40 (PXL)

Type de l'option : Option de type européen, c'est à dire exerçable uniquement à l'échéance.
Actif sous-jacent : L'indice CAC 40, composé des 40 valeurs les plus représentatives des différents secteurs d'activité représentés sur le premier marché de la Bourse de Paris. La gestion de l'échantillon des sociétés représentées dans l'indice CAC 40 est placée sous l'autorité d'un conseil scientifique d'experts indépendants qui en décide le renouvellement lorsque lévolution du marché ou les modifications intervenant dans le capital des sociétés le nécessitent.
L'indice CAC 40 est calculé en continu par Euronext Paris SA et diffusé toutes les 30 secondes. L'attention des donneurs d'ordres est appelée sur le fait que lorsque les valeurs représentant plus de 35 % de la capitalisation de l'indice CAC 40 ne sont momentanément pas susceptibles d'être cotées (soit du fait d'un incident technique, soit du fait de mesures de réservation de cotation affectant les valeurs de l'échantillon), un éclaireur de tendance est substitué à l'indice : l'information publiée dans ces circonstances exprime la variation de cours des seules valeurs qui font l'objet d'une cotation.
L'extrapolation de cette variation à celle de l'indice tout entier ne peut être effectuée qu'avec prudence et en fonction d'hypothèses qui sont de la seule responsabilité de leurs auteurs.
Unité de négociation : L'unité de négociation est constituée d'un contrat dans lequel chaque point d'indice est affecté d'une valeur de 1 euro. La taille du contrat est égale à la valeur de l'indice x 1 euro et sa valeur au cours de l'option x 1 euro.
Echelon de cotation : L'écart minimal entre deux cotations est fixé à 0,10 point d'indice, soit 0,1 euro par contrat.
Echéances des options : Les options peuvent être négociées jusqu'au dernier jour de bourse du mois d'échéance. Les négociations portent sur huit échéances glissantes : 3 mensuelles, 3 trimestrielles du cycle mars, juin, septembre, décembre et 2 semestrielles du cycle mars, septembre.
Prix d'exercice : Les prix d'exercice sont des valeurs standard fixées par ajout ou soustraction de 50 points d'indice sur les échéances mensuelles (échéances dites rapprochées), 100 points sur les échéances trimestrielles et 200 points sur les échéances semestrielles par rapport au prix d'exercice à parité. Les prix d'exercice sont différents pour les options d'achat et les options de vente. N.B. Pour les échéances ouvertes à la négociation avant le 1er février 1999, les intervalles restent fixés à 150 points jusquà ce qu'elles deviennent des échéances rapprochées. Lors de l'ouverture d'une échéance, des séries sont créées (options d'achat et options de vente) aux prix d'exercice les plus proches de la valeur de l'indice, un à parité et deux en-dehors des cours.
Exemple : pour un indice de valeur 3 952 et pour des séries avec des prix d'exercice créés à intervalles de 200 points d'indice, création d'options d'achat aux prix d'exercice 4 000, 4 200, 4 400 et d'options de vente aux prix d'exercice 4 000, 3 800, 3 600.
Lorsque la valeur de l'indice atteint ou dépasse le point central entre le prix d'exercice à parité et le premier prix d'exercice en dehors des cours (ex. : +/- 100 points pour les séries dont les prix d'exercice sont créées à intervalles de 200 points d'indice), de nouvelles séries sont créées afin qu'il y ait en permanence, et sur chaque échéance ouverte, au moins un prix d'exercice à parité et deux prix d'exercice en-dehors des cours sur chacun des types d'options (options dachat et options de vente).
Exercice des options : A l'échéance, les options dans les cours sont exercées automatiquement, sauf instruction contraire du donneur d'ordres. L'exercice d'une option achetée donne lieu à l'assignation aléatoire d'un vendeur et au règlement d'un montant en espèces égal à la différence entre le prix d'exercice de l'option exercée et la valeur de l'indice de liquidation, valorisée par le nombre de contrats exercés et l'unité de négociation (1 euro). L'indice de liquidation qui sert de référence à l'exercice automatique des contrats dans les cours est la moyenne arithmétique des valeurs de l'indice calculées et diffusées entre 15 h 40 et 16 h 00 le jour de l'échéance (y compris la première valeur de l'indice diffusée après 16 h 00).
Limites de variations quotidiennes des cours : La limite de variation quotidienne du contrat à terme ferme sur l'indice CAC 40 est fixée à +/- 275 points d'indice par rapport au cours de compensation de la veille. Lorsque cette limite est franchie sur une des deux échéances les plus proches, les cotations peuvent être momentanément suspendues sur les contrats d'options et les contrats à terme ferme cotés sur le MONEP et portant sur l'indice CAC 40. Il peut, par ailleurs, être procédé à un appel de garantie supplémentaire.
Exemple : si le cours de compensation de la veille est de 6 500 : le seuil de réservation potentielle à la hausse est 6 500 + 275= 6 775 ; le seuil de réservation potentielle à la baisse est 6 500 - 275 = 6 225. De même, ce dispositif de coupe-circuit peut trouver à s'appliquer en cas de déséquilibre du marché entraînant une réservation des cotations sur un échantillon de valeurs de lindice représentant ensemble plus de 75% de la capitalisation de l'indice CAC 40.

Dépôt de garantie : Le principe retenu consiste à globaliser les positions détenues par un même donneur d'ordres en options CAC 40 à maturité courte et longue (contrats de 1 euro et contrats de rompus) et à valoriser le portefeuille ainsi obtenu sur la base d'une seule et même hypothèse d'évolution de l'indice. Les donneurs d'ordres détenant une position globale nette vendeur se voient appeler un dépôt de garantie ajusté quotidiennement, d'un montant représentant la valeur liquidative la plus défavorable de leur position dans l'hypothèse d'une variation de la valeur de l'indice de +/- 300 points par rapport à l'indice de clôture du jour. L'ampleur de cette variation peut être ajustée par la chambre de compensation en fonction des conditions du marché.
La garantie peut être constituée d'espèces en euros ou en devises, de Bons du Trésor (BTF et BTAN), d'OAT, de T.Bills, de Bunds, de titres support ou de titres entrant dans la composition de l'indice CAC 40, des indices Dow Jones STOXXSM supports d'instruments financiers cotés sur le MONEP, d'actions de SICAV ou de parts de fonds communs dont la liste est arrêtée par CLEARNETSBF SA, et de tout autre actif agréé par CLEARNETSBF SA. Les actifs admis en garantie, autres que les espèces en euros, sont valorisés quotidiennement à leur contrevaleur en euros sagissant des devises, à leur valeur de marché ou à leur valeur nominale s'agissant des titres de créance, à leur valeur de marché sagissant des titres de capital, et à leur valeur liquidative s'agissant des OPCVM, avec application le cas échéant d'un taux d'abattement fixé par CLEARNETSBF SA en fonction de la nature et de la maturité des titres.
Organisation des transactions : Les cotations s'effectuent en continu de 9 h 02 à 17 h 30 (la cotation des séries arrivant à échéance cesse à 16 h 00 le jour de l'échéance).
Frais : Les négociations en options à long terme sur l'indice CAC 40 effectuées sur le MONEP donnent lieu à la perception par Euronext Paris SA d'une commission de négociation de 0,02 euro par contrat, et d'une commission de compensation d'un montant variable en fonction du montant des capitaux négociés. Les taux applicables au montant de chaque négociation sont les suivants :

- Jusqu'à 150 000 euros : 0,15 %
- de 150 000 euros à 750 000 euros : 0,10 %
- de 750 000 euros à 1 500 000 euros : 0,05 %
- au-delà de 1 500 000 euros : 0,025 %

Le montant de la commission de négociation perçue par opération ne peut être supérieur à 1 % des capitaux traités. Les commissions sont soumises à la TVA selon la réglementation en vigueur. Nota : les caractéristiques décrites dans la présente fiche sont celles qui s'appliquent à compter du 3 novembre 2000 et sont susceptibles d'être modifiées.

2.2.3 Formation des prix d'option

Les chapitres suivants s'intéresseront à l'évaluation des options. La question sera de savoir quel lien de cohérence il doit y avoir entre le prix d'une action et le prix d'une option dont le sous-jacent est cette action. Toutefois, on peut dès à présent faire la liste des variables et paramètres susceptibles d'influencer le prix :

- la valeur de l'action aujourd'hui ;
- la date d'exercice : si par exemple la date d'exercice est très proche, la valeur de l'option sera proche de son payoff ;
- le prix d'exercice : plus le prix d'exercice est élevé, moins une option d'achat à de chances d'être exerçable avec profit. Le prix d'une option d'achat est donc une fonction décroissante du prix d'exercice.
- la volatilité de l'action : ce paramètre se mesure grosso-modo comme l'écart-type des variations de cours de l'action. Il mesure l'incertitude sur la valeur de l'action. Plus cette volatilité est forte, plus le prix de l'action a de chances de passer au-dessus ou en-dessous du prix d'exercice.
- les dividendes dans le cas d'une action qui verse des dividendes.

Il existe une relation entre le prix d'une option d'achat et le prix d'une option de vente, dite **parité call-put**. En effet, considérons la stratégie consistant à acheter une option d'achat et à vendre une option de vente, ces deux options ayant même prix d'exercice et même date d'exercice. Le payoff reçu à la date d'exercice s'écrit donc :

$$\max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0)$$

soit, dans tous les cas :

$$S_T - K$$

Or, ce payoff peut être atteint en achetant l'action aujourd'hui (pour la revendre en T pour un prix S_T) et en émettant un zéro-coupon de nominal K. La valeur aujourd'hui (date t) de cette seconde stratégie est donc :

$$S_t - K.B(t,T)$$

Deux stratégies générant exactement les mêmes payoffs aux mêmes dates doivent avoir le même coût (absence d'opportunité d'arbitrage), et donc :

$$C(t,T,K) - P(t,T,K) = S_t - K.B(t,T)$$

où $C(t,T,K)$ (resp. $P(t,T,K)$) est le prix aujourd'hui (date t) d'une option d'achat (resp. de vente) de prix d'exercice K et de date d'exercice T.

Enfin, donnons un exemple de cotation. Il s'agit des options sur le titre Crédit Lyonnais cotées le 8 décembre 2000 où le cours de cloture du titre Crédit Lyonnais était de 39.30 euros.

Type	T	K (euro)	Prix (euro)
C	200012	38.00	2.02
C	200012	40.00	0.97
C	200012	45.00	0.04
C	200103	36.00	5.06
C	200103	45.00	1.02
C	200103	55.00	0.07
C	200106	38.00	4.76
C	200106	45.00	1.88
P	200012	30.00	0.01
P	200012	40.00	1.57
P	200012	50.00	10.70
P	200103	30.00	0.15
P	200103	32.00	0.34
P	200103	34.00	0.71

Ainsi, par exemple, une option d'achat de prix d'exercice 45.00 euros et de date d'exercice mars 2001 valait 1.02 euros le 8 décembre 2000.

2.3 D'autres options et stratégies

La section précédente a décrit le cas de base, c'est-à-dire celui de l'option standard d'achat ou de vente. On peut bien évidemment imaginer une infinité de payoff possibles. On s'intéresse ici à quelques exemples usuels.

2.3.1 Binary ou digital options

Une option d'achat (resp. de vente) binaire ou digital est une option qui verse 1 euro si le cours de l'action sous-jacente est au-dessus (resp. en dessous) d'un prix d'exercice donné à la date d'exercice. Mathématiquement, le payoff s'écrit :

$$1\,(S_T > K)$$

pour l'option d'achat et :

$$1\,(S_T < K)$$

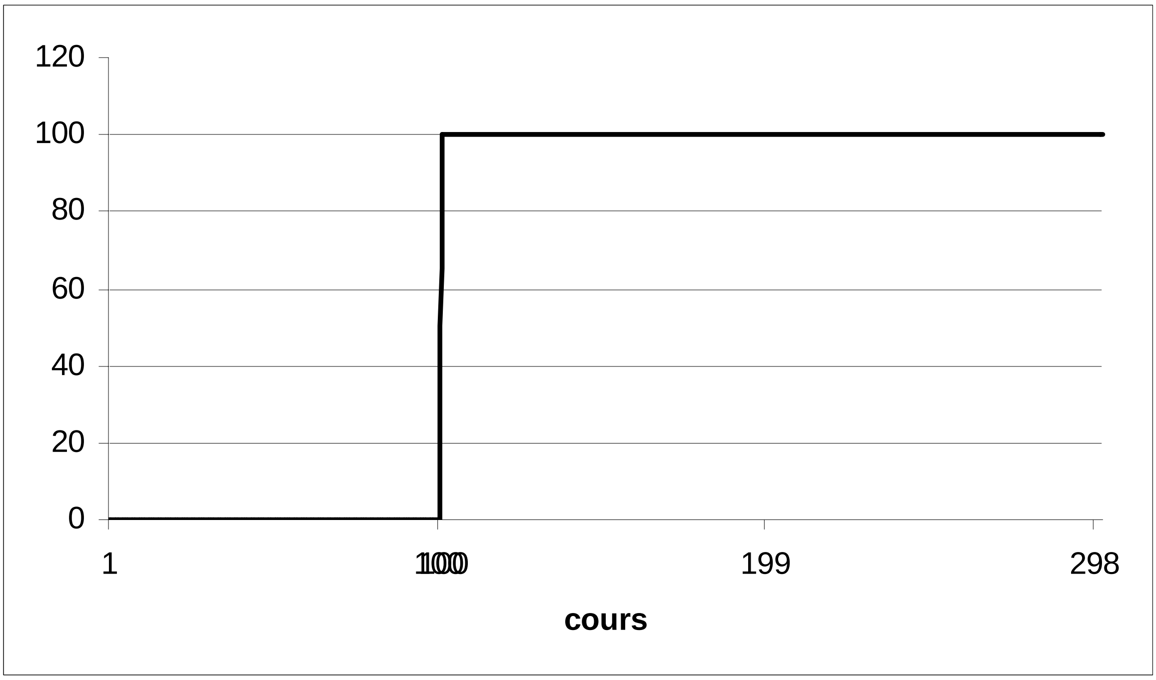
pour l'option de vente. En comparaison, l'option standard de la section précédente s'écrivait :

$$(S_T - K)\,.1\,(S_T > K)$$

Comme précédemment, il existe une relation de parité call-put qui s'écrit ici :

$$C(t,T,K) - P(t,T,K) = B(t,T)$$

en conservant les mêmes notations.



Option d'achat binaire

2.3.2 Bull et Bear spreads

Ces options sont des combinaisons d'options standards. Plus précisément, cette stratégie suppose d'acheter et de vendre deux options de même type et de même date d'exercice, mais de prix d'exercice différents. Le bull spread correspond à un achat et une vente d'une option d'achat, soit un payoff :

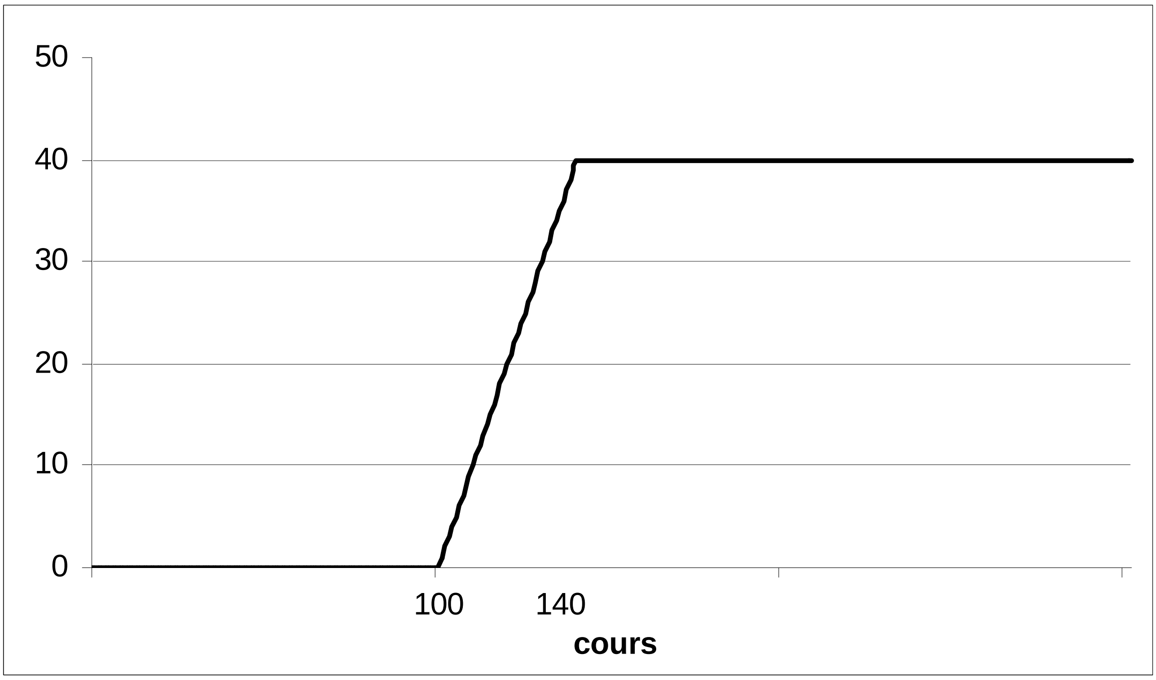
$$\max(S_T - K_1, 0) - \max(S_T - K_2, 0)$$

avec $K_2 > K_1$ et, pour le bear spread (émission d'une option de vente et achat d'une option de vente) :

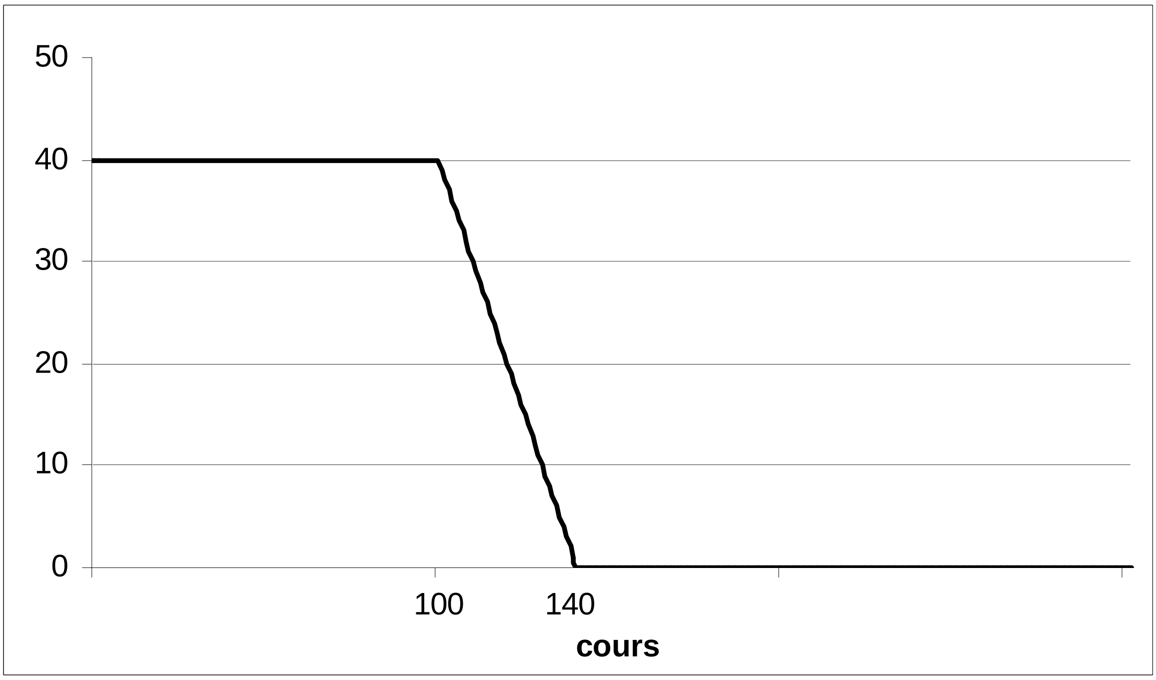
$$\max(K_1 - S_T, 0) - \max(K_2 - S_T, 0)$$

avec $K_2 < K_1$

Les graphiques de ces stratégies montrent que les payoff s'approchent des payoffs des options binaires. Dans le cas du bull spread, l'investisseur s'attend à une hausse du cours du titre sous-jacent (et inversement pour le bear spread).



Bull spread



Bear spread

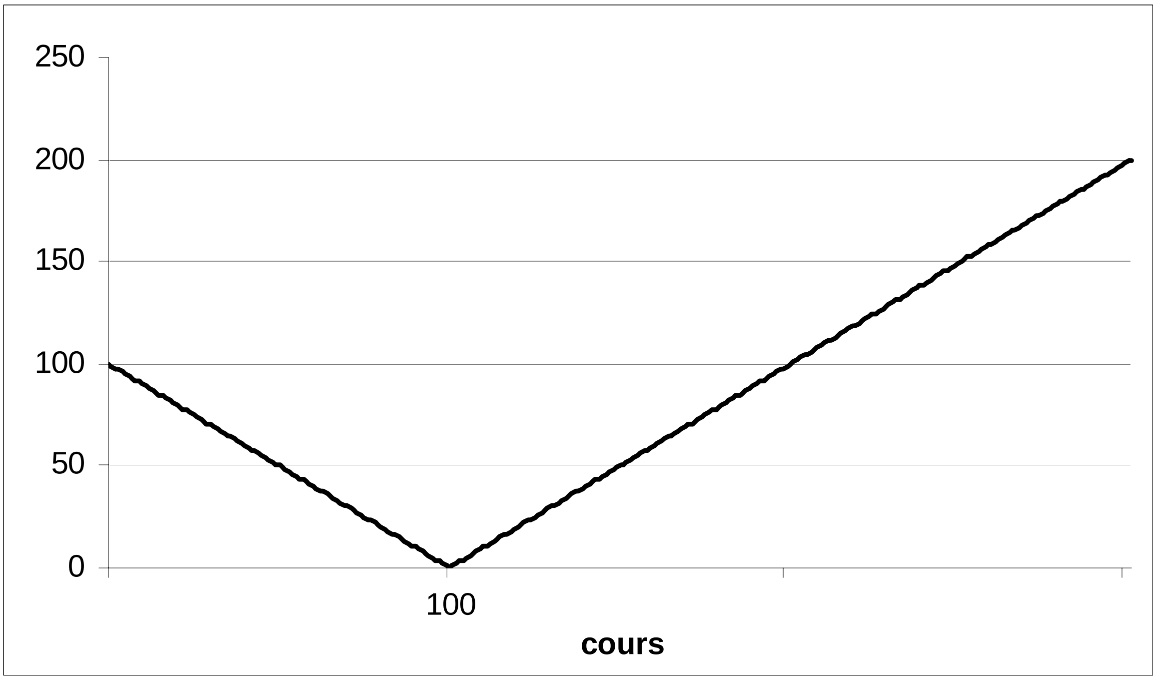
2.3.3 Straddles et Strangles

Le straddle est un portefeuille composé d'une option d'achat et d'une option de vente de même prix d'exercice, soit un payoff :

$$\max(S_T - K, 0) + \max(K - S_T, 0)$$

Comme on le constate sur le graphique qui représente ce payoff, cette stratégie sera choisie par un investisseur qui pense que le cours du sous-jacent va varier significativement sans savoir exactement dans

quel sens. A l'inverse, un investisseur qui anticipe que le cours restera stable autour de la valeur de K s'engagera dans la stratégie opposée.
Le strangle est exactement du même type mais les prix d'exercice de l'option d'achat et de l'option de vente sont différents.



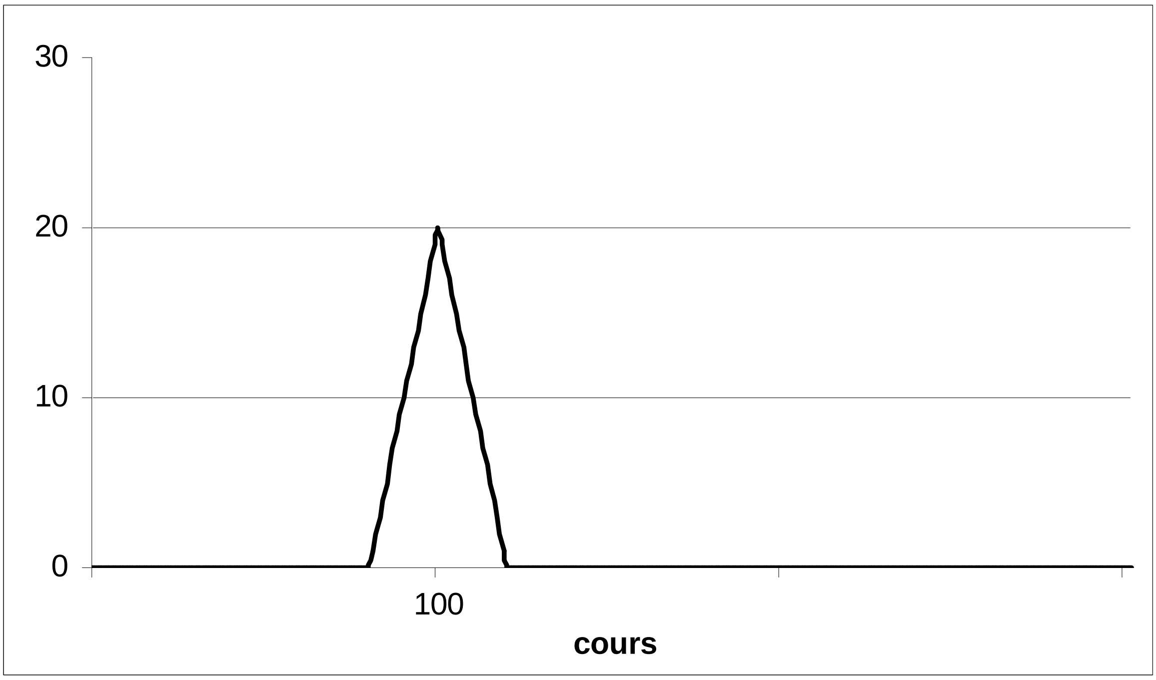
Straddle

2.3.4 *Butterfly et condors*

Le bull spread pouvait s'apparenter à une sorte de différenciation à l'ordre 1 de l'option européenne par rapport au prix d'exercice. On obtenait ainsi une fonction analogue à une fonction de Heaviside. Ici, on s'intéresse à l'ordre 2. Il s'agit d'une stratégie Butterfly dont le payoff est du type :

$$\max(S_T - (K + \delta K), 0) - 2\max(S_T - K, 0) + \max(S_T - (K - \delta K), 0)$$

c'est-à-dire l'achat de 2 options d'achat et l'émission d'une option d'achat. Très logiquement, le payoff a une forme de Dirac. Cette stratégie sera choisie par un investisseur qui anticipe que le cours du sous-jacent restera très proche de K et ,ne bougera pas ni dans un sens ni dans un autre.
Un condor est une stratégie Butterfly mais avec 4 prix d'exercice et non 3 comme précédemment.



Butterfly

2.3.5 Calendar spreads

Les calendar spreads sont des stratégies impliquant des options de différentes dates de maturités. Ces stratégies peuvent être utiles lorsque l'investisseur anticipe un mouvement du sous-jacent (et éventuellement le sens de ce mouvement) à un moment précis dans le futur, par exemple à l'occasion de la publication des résultats de l'entreprise, d'informations macro-économiques, de décisions etc.

2.3.6 Warrant, bon de souscription

Les warrants et les bons de souscription sont des actifs possédant une dimension optionnelle. Les warrants sont émis par un établissement financier alors que les bons de souscription sont émis par des sociétés. Les principales différences sont expliquées dans le document ci-dessous que la Société Générale donne à ses clients.

le banc d'essai

	Qui l'émet ?	Sens de l'opération	Support	Prix d'exercice
Warrant	Un Warrant est émis par un établissement financier qui s'engage à honorer l'exercice éventuel.	Pour le même support, il peut exister des calls Warrants et des puts Warrants.	Il porte sur un ensemble varié de supports : des actions (françaises ou étrangères), des indices, des paniers d'actions, des devises ou des taux d'intérêts.	Il est fixé au moment de l'émission du Warrant en fonction d'une moyenne récente des cours du support. Il peut exister une large gamme de prix à la monnaie, hors de la monnaie et dans la monnaie.
Bon de souscription	Un bon est émis par une société et sa souscription donne lieu à la création d'actions nouvelles.	Le bon permet dans la grande majorité des cas d'acheter le support. Il existe très rarement des bons pour vendre un support au prix d'exercice.	Il s'agit uniquement d'une action.	Généralement, le bon est émis avec un seul prix d'exercice à la monnaie ou en dehors, le but étant de faire souscrire le détenteur du bon à l'échéance pour créer de nouvelles actions émises au prix d'exercice (appelé prix de souscription en la circonstance).
Option	Les options sur actions et indices d'actions sont émises par la SCMC (Société de Compensation des Marchés Conditionnels), filiale de ParisBourse SA. Les options sur taux d'intérêt sont émises par Matif SA.	On ouvre systématiquement des séries de calls et de puts sur chaque support.	Il s'agit pour la SCMC d'un échantillon précis d'actions (une trentaine) et de l'indice CAC 40, et pour Matif d'emprunt fictif d'état.	Les prix d'exercice sont établis selon une grille précise (en fonction du cours du support) au moment de l'ouverture d'une classe d'options : un à la monnaie, deux en dehors, deux en dedans. Au gré des variations du support, de nouveaux prix d'exercice sont ouverts.

Durée	Négociation	Sur quelle cote ?	Opérations possibles
Elle varie d'un à cinq ans. Elle est fixée par l'émetteur du Warrant. Il peut donc exister plusieurs échéances pour un même support.	La quotité de négociation est fixée à 100, 1 000 (ou autres)	Les Warrants sont cotés à la Bourse de Paris, généralement en continu. Comme les autres valeurs mobilières, ils sont accessibles par leur code Sicovam.	Un Warrant peut seulement être acheté initialement. Il est impossible de vendre un Warrant à découvert.
Elle varie d'un à cinq ans. Elle est fixée par l'émetteur du bon. Celui-ci peut, dans certains cas, lancer plusieurs types de bons dans une émission dont les échéances sont plus ou moins lointaines.	Il n'existe aucune quotité.	Un bon est une valeur mobilière comme une autre accessible par code Sicovam.	On ne peut qu'acheter un bon de souscription.
Elle est fixée au moment de la création de la classe d'options, tous les trois mois. Sur les actions, les échéances s'étalent d'un à neuf mois, et, sur les indices à court terme, d'un à six mois. Il existe des options longues sur indices et sur actions : leur durée peut atteindre deux ans, mais elles sont uniquement de type européen. Les échéances s'établissent toujours selon une grille précise établie par les autorités.	Sur le Monep, la quotité est généralement de 100 ou 500 options sur les actions. Elle est de 200 ou 50 fois l'indice.	Les options sur actions et indices sont cotés sur le Monep (Marché des Options Négociables de Paris) et figurent dans une rubrique spéciale de la cote. Le Matif cote les options sur ses propres contrats de taux.	Une option peut être achetée ou vendue initialement. Dans le cas d'une vente en première opération, cela donne lieu à des appels de marges (dépôts de sommes de sécurité de l'intervenant). Ces appels de marge sont quotidiens.

2.3.7 Obligations convertibles et reverse convertibles

Les obligations convertibles sont des obligations à remboursement in-fine qui versent un coupon comme toute obligation mais qui peuvent être converties en actions avant la maturité de l'obligation. Lorsqu'il y a conversion en actions, le titre obligataire disparaît. Les payoff générés par ce titre sont donc :

$$\begin{cases} c & \text{en } t \text{ si } \tau > t, \text{ 0 sinon} \\ (1+c) & \text{en } T \text{ si } \tau > T, \text{ 0 sinon} \end{cases}$$

où τ est la date de conversion, c le coupon et T la date de maturité de l'obligation. A ces flux, il faut bien-sûr ajouter l'opération de conversion elle-même (si $\tau < T$) qui convertit ces obligations en titres d'actions de la société. La date de conversion est une variable de commande du détenteur de l'obligation convertible : il l'exerce lorsque le cours de l'action est suffisamment haut pour qu'il soit intéressant de convertir l'obligation en action.

Une obligation reverse convertible est, comme précédemment, une obligation à remboursement in-fine et qui verse un coupon. Toutefois, le remboursement est conditionné à l'évolution du sous-jacent. A maturité, si le cours du sous-jacent est supérieur à un prix de référence, le capital de l'obligation est entièrement remboursé en espèce. Dans le cas contraire, (i.e. l'action est inférieure au prix de référence), l'obligation est remboursée en actions, en pratique pour une valeur inférieure au capital de l'obligation (prix de référence $<$ nominal). Les coupons sont logiquement plus élevés que pour une obligation classique pour compenser le fait que le capital n'est pas garanti. Le risque pris par l'investisseur est donc que le cours de l'action baisse trop. L'investisseur choisira cette stratégie s'il anticipe une hausse du cours de l'action.

A titre d'exemple, on trouvera ci-dessous d'autres exemples plus sophistiqués tirés des offres Crédit Lyonnais (www.clwarrants.com).

Les Knock-in Reverse Convertibles

ou Sweet Reverse Convertibles

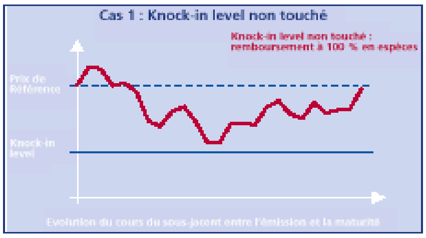
Une protection supplémentaire, pour un investissement plus défensif

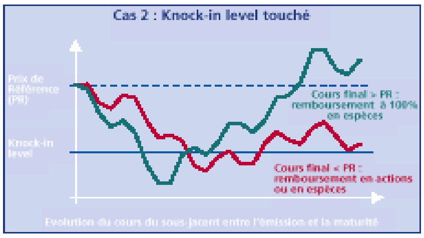
Les Knock-in Reverse Convertibles sont des Reverse convertibles de type défensif : elles distribuent un coupon plus faible que les Reverse Convertibles standards, mais en contrepartie, elles sont remboursées à hauteur du capital initial plus aisément. Pour le porteur, le risque d'une perte en capital (avec un remboursement effectué en actions ou en espèces pour une contre-valeur inférieure au nominal) est donc moindre.

Le remboursement d'une Knock-in Reverse Convertible n'est pas seulement lié au cours du sous-jacent à maturité (comme pour une Reverse Convertible standard), mais dépend également du cours minimal atteint par le sous-jacent, entre la date de fixing initial et la date de fixing final. Jusqu'à maturité, si le sous-jacent n'a jamais atteint le « Knock-in level » (fixé au moment de l'émission, et correspondant généralement à une baisse de l'action de 25 % ou 30 % par rapport à son cours initial), l'investisseur est certain d'être remboursé à 100 % du nominal, même si le cours de l'action à maturité est inférieur au Prix de Référence.

➜ ***Si le « Knock-in level » n'a jamais été touché entre le fixing initial et le fixing final :*** le remboursement est effectué en espèces, à 100 % du nominal, quel que soit le cours final du sous-jacent. Le capital est donc toujours garanti.

➜ ***Si le « Knock-in level » a été touché entre le fixing initial et le fixing final :*** le remboursement dépend alors du cours de l'action à maturité (ACTIONfinal). Il est effectué en espèces à 100 % du nominal, si ce cours est supérieur au Prix de référence de la Reverse Convertible (capital garanti), et sinon en actions ou son équivalent en espèces, au choix de l'émetteur (capital non garanti).





Pourquoi utiliser les Knock-in Reverse Convertibles ?

Comme toutes les Reverse Convertibles, les Knock-in Reverse Convertibles distribuent chaque année des coupons très élevés plusieurs fois supérieurs à ceux d'une obligation classique. Cependant, la marge de sécurité d'une Knock-in Reverse Convertible est bien plus importante que pour une Reverse Convertible standard, puisque si le « Knock-in level » n'est pas touché, le remboursement à hauteur de 100 % du nominal est garanti.

Comparaison du remboursement d'une Knock-in Reverse Convertible et d'une Reverse Convertible standard

Cours de l'action (en euros)	60	70	80	90	100	110
Reverse Convertible standard	Actions	Actions	Actions	Actions	100 %	100 %
Reverse Convertible Knock-in : Knock-in level non touché	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %
Reverse Convertible Knock-in : Knock-in level touché	Actions	Actions	Actions	Actions	100 %	100 %

Prix de Référence des Reverse Convertibles : 100 euros *Capital non garanti en rouge, et capital garanti en vert*

Exemples www.clwarrants.com

Exemple comparatif entre Reverse Convertible standard et Knock-in Reverse Convertible

Reverse Convertible standard

EUR 16,00 % Reverse Convertible sur Ericsson LM-B

Type	Reverse Convertible Standard
Forme	Euro Medium Term Note
Emetteur	Credit Lyonnais Financial Products (Guernsey) Ltd, garanti par Crédit Lyonnais SA
Sous-jacent	Ericsson LM-B coté en Bourse de Paris
Devise	EUR
Maturité	2 ans
Nominal	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Prix d'émission	100 % du nominal, soit 21,70 EUR par coupure
Coupon annuel	16,00 %, soit 3,47 EUR par coupure
Prix de Référence	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Parité de remboursement	1 action pour 1 coupure

Le remboursement dépend de $ERIC_{final}$, le cours de clôture du sous-jacent à la date de maturité :

- Si $ERIC_{final} \geq$ Prix de référence : remboursement en espèces, à 100 % du nominal, soit 21,70 EUR par coupure.
- Si $ERIC_{final} <$ Prix de référence : remboursement en actions avec livraison de 1 action par coupure (ou son équivalent en espèces, au choix de l'émetteur).

Knock-in Reverse Convertible

EUR 15,25 % Knock-in Reverse Convertible sur Ericsson LM-B

Type	Knock-in Reverse Convertible
Forme	Euro Medium Term Note
Emetteur	Credit Lyonnais Financial Products (Guernsey) Ltd, garanti par Crédit Lyonnais SA
Sous-jacent	Ericsson LM-B coté en Bourse de Paris
Devise	EUR
Maturité	2 ans
Nominal	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Prix d'émission	100 % du nominal, soit 21,70 EUR par coupure
Coupon annuel	15,25 %, soit 3,31 EUR par coupure
Prix de Référence	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Knock-in level	16,28 EUR, soit 75 % du cours initial de l'action
Parité de remboursement	1 action pour 1 coupure

Le remboursement dépend de $ERIC_{mini}$, le cours le plus bas du sous-jacent entre la date d'émission et la date de maturité, et de $ERIC_{final}$ le cours de clôture du sous-jacent à la date de maturité :

- Si $ERIC_{mini} >$ Knock-in level (i.e. Knock-in level non touché) : remboursement en espèces, à 100 % du nominal, soit 21,70 EUR par coupure.
- Si $ERIC_{mini} <$ Knock-in level (i.e. Knock-in level touché) : remboursement en fonction de $ERIC_{final}$:
  - si $ERIC_{final} \geq$ Prix de référence : remboursement en espèces, à 100 % du nominal, soit 21,70 EUR par coupure ;
  - si $ERIC_{final} <$ Prix de référence : remboursement en actions avec livraison de 1 action par coupure (ou son équivalent en espèces, au choix de l'émetteur).

Les exemples ci-dessus sont donnés à titre purement indicatif et les caractéristiques sont susceptibles de varier avec les conditions du marché.

Exemples www.clwarrants.com

Les Lock-up Reverse Convertibles
ou Knock-out Reverse Convertibles

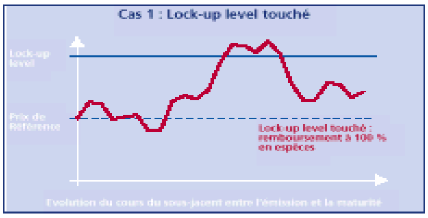
Une protection supplémentaire, pour un investissement plus défensif

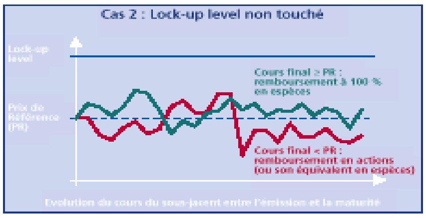
Les Lock-up Reverse Convertibles sont des Reverse Convertibles de type défensif : elles distribuent un coupon plus faible que les Reverse Convertibles standards, mais en contrepartie, elles sont remboursées à hauteur du capital initial plus aisément. Pour leur porteur, le risque d'une perte en capital (avec un remboursement effectué en actions ou son équivalent en espèces pour une contre-valeur inférieure au nominal) est donc moindre.

Le remboursement d'une Lock-up Reverse Convertible n'est pas seulement lié au cours du sous-jacent à maturité (comme pour une Reverse Convertible standard), mais dépend également du cours maximal atteint par le sous-jacent, entre la date de fixing initial et la date de fixing final. Si, entre ces deux dates, le sous-jacent atteint le « Lock-up level » (déterminé au moment de l'émission, et correspondant généralement à une hausse de l'action de 15 % ou 20 % par rapport à son cours initial), l'investisseur est certain d'être remboursé à 100 % du nominal, même si le cours de l'action à maturité est inférieur au Prix de Référence.

➜ ***Si le « Lock-up level » a été touché entre le fixing initial et le fixing final :*** le remboursement est effectué en numéraire, à 100 % du nominal, quel que soit le cours final du sous-jacent. Le capital est donc toujours garanti.

➜ ***Si le « Lock-up level » n'a jamais été touché entre le fixing initial et le fixing final :*** le remboursement dépend alors du cours de l'action à maturité ($ACTION_{final}$). Il est effectué en espèces à 100 % du capital, si ce cours est supérieur au prix de référence de la Reverse Convertible (capital garanti), et sinon en actions ou son équivalent en espèces, au choix de l'émetteur, (capital non garanti).





Pourquoi utiliser les Lock-up Reverse Convertibles ?

Les Lock-up Reverse Convertibles bénéficient d'une marge de sécurité plus importante que les Reverse Convertibles standard, puisque si le « Lock-up level » est touché d'ici à maturité, le remboursement à hauteur de 100 % du nominal est assuré. Ces Reverse Convertibles sont donc idéales pour profiter d'une hausse rapide d'une action (rumeur d'OPA, figure chartiste, rebond après « profit warning » ayant entraîné une chute excessive…).

Comparaison du remboursement d'une Lock-up Reverse Convertible et d'une Reverse Convertible standard

Cours de l'action (en euros)	70	80	90	100	110	120
Reverse Convertible standard	Actions	Actions	Actions	100 %	100 %	100 %
Reverse Convertible Lock-up : Lock-up level touché	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %
Reverse Convertible Lock-up : Lock-up level non touché	Actions	Actions	Actions	100 %	100 %	100 %

Prix de Référence des Reverse Convertibles : 100 euros — *Capital non garanti en rouge, et capital garanti en vert*

Exemples www.clwarrants.com

Exemple comparatif entre Reverse Convertible standard et Lock-up Reverse Convertible

Reverse Convertible standard

EUR 16,00 % Reverse Convertible sur Ericsson LM-B	
Type	Reverse Convertible Standard
Forme	Euro Medium Term Note
Emetteur	Credit Lyonnais Financial Products (Guernsey) Ltd, garanti par Crédit Lyonnais SA
Sous-jacent	Ericsson LM-B coté en Bourse de Paris
Devise	EUR
Maturité	2 ans
Nominal	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Prix d'émission	100 % du nominal, soit 21,70 EUR par coupure
Coupon annuel	16,00 %, soit 3,47 EUR par coupure
Prix de Référence	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Parité de remboursement	1 action pour 1 coupure

Le remboursement dépend de $ERIC_{final}$, le cours de clôture du sous-jacent à la date de maturité :

- Si $ERIC_{final} \geq$ Prix de référence : remboursement en espèces, à 100 % du nominal soit 21,70 EUR.
- Si $ERIC_{final} <$ Prix de référence : remboursement en actions avec livraison de 1 action par coupure (ou son équivalent en espèces, au choix de l'émetteur).

Lock-up Reverse Convertible

EUR 13,50 % Lock-up Reverse Convertible sur Ericsson LM-B	
Type	Lock-Up Reverse Convertible
Forme	Euro Medium Term Note
Emetteur	Credit Lyonnais Financial Products (Guernsey) Ltd, garanti par Crédit Lyonnais SA
Sous-jacent	Ericsson LM- B coté en Bourse de Paris
Devise	EUR
Maturité	2 ans
Nominal	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Prix d'émission	100 % du nominal, soit 21,70 EUR par coupure
Coupon annuel	13,50 %, soit 2,93 EUR par coupure
Prix de Référence	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Lock-up level	26,04 EUR, soit 120 % du cours initial de l'action
Parité de remboursement	1 action pour 1 coupure

Le remboursement dépend de $ERIC_{maxi}$, le cours le plus élevé du sous-jacent entre la date d'émission et la date de maturité, et de $ERIC_{final}$ le cours de clôture du sous-jacent à la date de maturité :

- Si $ERIC_{maxi} >$ Lock-up level (i.e. Lock-up level touché) : remboursement en numéraire, à 100 % du nominal, soit 21,70 EUR.
- Si $ERIC_{mini} <$ Lock-up level : remboursement en fonction de $ERIC_{final}$:
  - si $ERIC_{final} \geq$ Prix de référence : remboursement en espèces, à 100 % du nominal, soit 21,70 EUR par coupure ;
  - si $ERIC_{final} <$ Prix de référence : remboursement en actions, avec livraison de 1 action par coupure (ou son équivalent en espèces, au choix de l'émetteur.

Les exemples ci-dessus sont donnés à titre purement indicatif et les caractéristiques sont susceptibles de varier avec les conditions du marché.

Exemples www.clwarrants.com

Les Power Reverse Convertibles

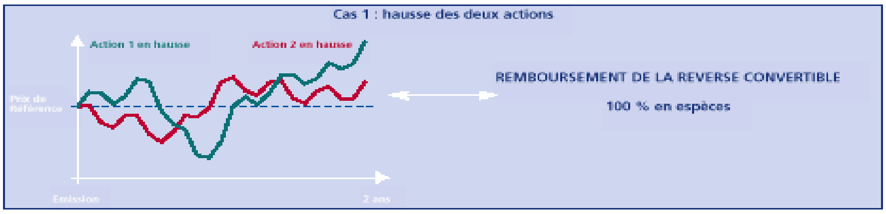
Un coupon majoré par une double exposition

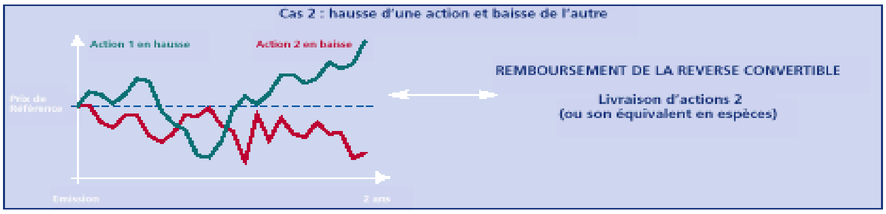
Les Power Reverse Convertibles sont des Reverse Convertibles de type offensif qui distribuent des coupons plus élevés que les Reverse Convertibles standard. En contrepartie, leur remboursement est lié à l'évolution des cours de deux actions (un Prix de Référence et une parité de remboursement sont définis pour chaque action) et pour être remboursé à hauteur du capital initial, les deux actions sous-jacentes doivent se trouver à maturité au-dessus de leur Prix de Référence respectif. Le risque d'être remboursé en actions, pour une contre-valeur plus faible que le capital initial, est donc plus important (il suffit que l'une des actions soit inférieure à son Prix de Référence). A maturité :

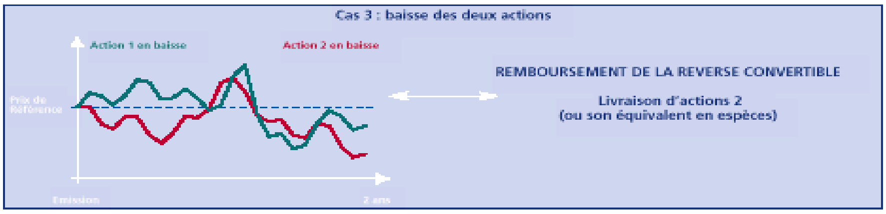
➔ ***Si les 2 actions se trouvent au-dessus de leur Prix de Référence :*** la Reverse Convertible est remboursée en espèces, à 100 % (capital garanti).

➔ ***Si l'une des actions se trouve au-dessus de son Prix de Référence, et l'autre en dessous :*** la Reverse Convertible est remboursée en actions ou son équivalent en espèces, au choix de l'émetteur (capital non garanti). Les actions livrées sont celles qui se trouvent sous leur Prix de Référence.

➔ ***Si les 2 actions se trouvent au-dessous de leur Prix de Référence à maturité :*** la Reverse Convertible est remboursée en actions ou son équivalent en espèces, au choix de l'émetteur (capital non garanti). Les actions livrées sont celles pour lesquelles la contre-valeur de remboursement est la plus faible.







Exemples www.clwarrants.com

Exemple comparatif entre Reverse Convertible standard et Power Reverse Convertible

Reverse Convertible standard

EUR 16,00 % Reverse Convertible sur Ericsson LM-B

Type	Reverse Convertible Standard
Forme	Euro Medium Term Note
Emetteur	Credit Lyonnais Financial Products (Guernsey) Ltd, garanti par Crédit Lyonnais SA
Sous-jacent	Ericsson LM-B coté en Bourse de Paris
Devise	EUR
Maturité	2 ans
Nominal	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Prix d'émission	100 % du nominal, soit 21,70 EUR par coupure
Prix de Référence	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Coupon annuel	16,00 %, soit 3,47 EUR par coupure
Parité de remboursement	1 action pour 1 coupure

Le remboursement dépend de $ERIC_{final}$, le cours de clôture du sous-jacent à la date de maturité :

- Si $ERIC_{final} \geq$ Prix de Référence : remboursement en espèces, à 100 % du nominal soit 21,70 EUR.
- Si $ERIC_{final} <$ Prix de Référence : remboursement en actions avec livraison de 1 action par coupure (ou son équivalent en espèces, au choix de l'émetteur).

Power Reverse Convertible

EUR 17 % Power Reverse Convertible sur Ericsson LM-B & Deutsche Telekom AG

Type	Power Reverse Convertible
Forme	Euro Medium Term Note
Emetteur	Credit Lyonnais Financial Products (Guernsey) Ltd, garanti par Crédit Lyonnais SA
Sous-jacent	Ericsson LM-B Deutsche Telekom AG
Devise	EUR
Maturité	2 ans
Nominal	976,50 EUR, soit 100 % des cours initiaux des deux actions
Prix d'émission	100 % du nominal, soit 976,50 EUR par coupure
Prix de Référence	Ericsson : 21,70 EUR, soit 100 % du cours initial Deutsche Telekom : 45 EUR, soit 100 % du cours initial
Coupon annuel	17,00 %, soit 166,01 EUR par coupure
Parité de remboursement	Ericsson : 45 actions, soit 976,50 / 21,70 Deutsche Telekom : 21,70 actions, soit 976,50 / 45

Le remboursement dépend de $ERIC_{final}$ et de DTK_{final}, les cours de clôture respectifs des 2 actions à la date de maturité :

- Si les 2 actions sont supérieures ou égales à leur Prix de Référence respectif : remboursement en numéraire, à 100 % du nominal, soit 976,50 EUR par coupure.
- Si au moins 1 des 2 actions est inférieure à son Prix de Référence : remboursement en actions, avec livraison d'actions Ericsson ou d'actions Deutsche Telekom, à hauteur de leur parité respective (ou leur équivalent en espèces, au choix de l'émetteur).

Les exemples ci-dessus sont donnés à titre purement indicatif et les caractéristiques sont susceptibles de varier avec les conditions du marché.

Exemples www.clwarrants.com

Les Spring Reverse Convertibles

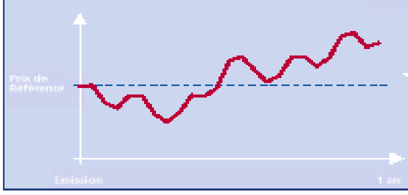
Un coupon indexé sur la hausse du sous-jacent, pour un investissement plus offensif

Les Spring Reverse Convertibles sont des Reverse Convertibles de type offensif qui permettent de profiter d'une hausse importante du sous-jacent. Leur coupon garanti est plus faible que celui d'une Reverse Convertible standard mais il est indexé sur la hausse du sous-jacent : si l'action progresse fortement, il peut être finalement beaucoup plus élevé.
En effet, le porteur de Spring Reverse Convertibles reçoit, à maturité, un coupon égal au maximum entre un coupon garanti (nettement supérieur à un coupon obligataire mais inférieur à celui d'une Reverse Convertible standard) et une participation à la hausse du sous-jacent (souvent égale à 50 % ou 60 % de la hausse du sous-jacent).

➜ ***Si l'action est en hausse :*** le remboursement est effectué en numéraire, à 100 % du nominal ; et le coupon effectivement versé correspond au maximum entre le coupon minimal garanti et 50 % (par exemple) de la hausse du sous-jacent.

➜ ***Si l'action est en baisse :*** le remboursement est effectué en actions (ou son équivalent en espèces, au choix de l'émetteur) et le coupon versé est égal au coupon minimum garanti.

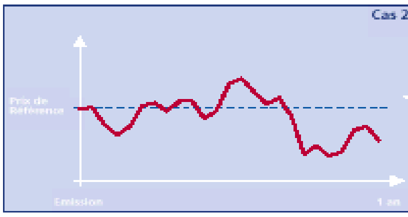
Cas 1 : hausse de l'action



REMBOURSEMENT DE LA REVERSE CONVERTIBLE
100 % en espèces

COUPON DE LA REVERSE CONVERTIBLE
maximum entre un montant fixe
et 50 % de la hausse de l'action

Cas 2 : baisse de l'action



REMBOURSEMENT DE LA REVERSE CONVERTIBLE
Livraison d'actions (ou son équivalent en espèces
au choix de l'émetteur)

COUPON DE LA REVERSE CONVERTIBLE
Montant fixe

Pourquoi utiliser les Spring Reverse Convertibles ?

Les Spring Reverse Convertibles permettent de recevoir dans tous les cas un coupon élevé garanti tout en continuant de profiter de la hausse du sous-jacent. Elles sont particulièrement adaptées à des actions qui ont baissé et pour lesquelles on estime le cours d'entrée intéressant et le potentiel de hausse important.

Comparaison du coupon d'une Spring Reverse Convertible et d'une Reverse Convertible standard

Cours de l'action (en euros)	100	120	140	160	180	200
Reverse Convertible standard, maturité 1 an	25 %	25 %	25 %	25 %	25 %	25 %
Reverse Convertible Spring	15 %	15 %	20 %	30 %	33 %	33 %

Prix de Référence des Reverse Convertibles : 100 euros
Coupon de la Reverse Convertible standard : 25,00 %
Coupon de la Spring Reverse Convertible : 15 % ou 50 % de la hausse de l'action avec un coupon maximum de 33 %

Exemples www.clwarrants.com

Exemple comparatif entre Reverse Convertible standard et Spring Reverse Convertible

Reverse Convertible standard

EUR 16,00 % Reverse Convertible sur Ericsson LM-B	
Type	Reverse Convertible Standard
Forme	Euro Medium Term Note
Emetteur	Credit Lyonnais Financial Products (Guernsey) Ltd, garanti par Crédit Lyonnais SA
Sous-jacent	Ericsson LM-B coté en Bourse de Paris
Devise	EUR
Maturité	1 an
Nominal	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Prix d'émission	100 % du nominal, soit 21,70 EUR par coupure
Prix de Référence	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Parité de remboursement	1 action pour 1 coupure
Coupon annuel	16,00 %, soit 3,47 EUR par coupure

Le remboursement dépend de $ERIC_{final}$, le cours de clôture du sous-jacent à la date de maturité :

- Si $ERIC_{final} \geq$ Prix de référence (i.e. Knock-in level non touché) : remboursement en espèces, à 100 % du nominal.
- Si $ERIC_{final} <$ Prix de référence (i.e. Knock-in level touché) : remboursement en actions avec livraison de 1 action par coupure (ou son équivalent en espèces, au choix de l'émetteur).

Spring Reverse Convertible

EUR 15 % Spring Reverse Convertible sur Ericsson LM-B	
Type	Spring Reverse Convertible
Forme	Euro Medium Term Note
Emetteur	Credit Lyonnais Financial Products (Guernsey) Ltd, garanti par Crédit Lyonnais SA
Sous-jacent	Ericsson LM-B coté en Bourse de Paris
Devise	EUR
Maturité	1 an
Nominal	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Prix d'émission	100 % du nominal, soit 21,70 EUR par coupure
Prix de Référence	21,70 EUR, soit 100 % du cours initial de l'action
Parité de remboursement	1 action pour 1 coupure
Coupon annuel	Le maximum entre 15 % ou 50 % de la hausse de l'action (entre le cours initial et le cours final) avec un remboursement maximum de 33 %

Le remboursement dépend de $ERIC_{final}$, le cours de clôture du sous-jacent à la date de maturité :

- Si $ERIC_{final} \geq$ Prix de référence : remboursement en espèces, à 100 % du nominal, soit 21,70 EUR par coupure.
- Si $ERIC_{final} <$ Prix de référence : remboursement en actions avec livraison de 1 action par coupure (ou son équivalent en espèces, au choix de l'émetteur).

Les exemples ci-dessus sont donnés à titre purement indicatif et les caractéristiques sont susceptibles de varier avec les conditions du marché.

Exemples www.clwarrants.com

2.3.8 Produits à capital garanti

Ce sont des actifs qui garantissent un niveau de capital et/ou un taux d'intérêt minimum garanti et dont le rendement dépend de l'évolution d'un sous-jacent donné. Voici quelques exemples (www.clwarrants.com) :

Quelques exemples d'émissions

Produit à capital garanti « Bull » sur un panier d'actions européennes « Blue Chips » :

Emetteur :	*CLFP*
Devise :	*EUR*
Maturité :	*6 ans*
Nominal :	*1 000 EUR*
Sous-jacent :	*panier composé des 7 actions suivantes :* *Deutsche Telekom, Royal Dutch, Daimlerchrysler, France Telecom, Allianz, Nokia, Aegon*
Prix d'émission :	*100 %*
Remboursement :	*100 % du nominal + 100 % de la hausse du panier à partir de son cours initial avec un remboursement maximum de 260 % (soit un rendement actuariel de 10,03 %).*

Produit à capital garanti « Binaire » sur l'indice CAC 40 :

Emetteur :	*CLFP*
Devise :	*EUR*
Maturité :	*1 an*
Nominal :	*1 000 EUR*
Sous-jacent :	*indice CAC 40*
Prix d'émission :	*100 %*
Remboursement :	*100 % du nominal*
Coupon annuel :	*6,50 % si la valeur du sous-jacent est au moins égale au cours initial, 0 % sinon.*

Produit à capital garanti « Bull » sur l'indice DJ Eurostoxx 50 :

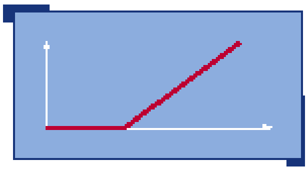
Emetteur :	*CLFP*
Devise :	*EUR*
Maturité :	*10 ans*
Nominal :	*1 000 EUR*
Sous-jacent :	*indice DJ Eurostoxx 50*
Prix d'émission :	*100 %*
Remboursement :	*100 % du nominal + 103 % de la hausse de l'indice entre son cours initial et la moyenne des cours sur les 12 derniers mois.*

Exemples www.clwarrants.com

Cette idée peut être déclinée en produits encore plus sophistiqués (www.clwarrants.com) :

Les profils accélérateurs de performance

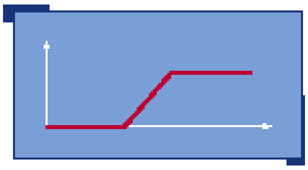
Indexation Simple : Profiter de la performance illimitée du sous-jacent



L'indexation Simple est la forme d'indexation la plus courante.
Elle permet de participer à la performance illimitée du sous-jacent à partir d'un cours défini préalablement (généralement le cours initial).

Exemple : *Produit à capital garanti sur le DJ Eurostoxx 50, de maturité 2 ans.*
Remboursement : 100 % du nominal + 48 % de la performance positive de l'indice DJ Eurostoxx 50 entre le cours initial et le cours final.

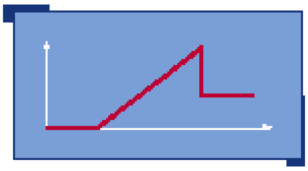
Indexation Plafonnée : Augmenter le niveau d'indexation grâce au plafond



L'indexation Plafonnée offre une participation à la performance jusqu'à un niveau maximum défini au préalable. Elle permet ainsi d'offrir un niveau d'indexation plus élevé que l'indexation Simple dans la limite de ce plafond.

Exemple : *Produit à capital garanti sur le DJ Eurostoxx 50, de maturité 2 ans.*
Remboursement : 100 % du nominal + 94 % de la performance positive de l'indice DJ Eurostoxx 50 entre le cours initial et le cours final, avec un remboursement maximal de 118,80 % (soit 9 % de rendement annuel).

Indexation avec Barrière Désactivante : Garantir une indexation élevée si un niveau de cours déterminé à l'avance (appelé barrière) n'est jamais atteint



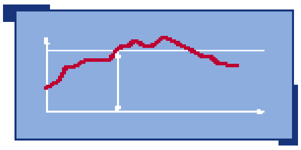
L'indexation à « Barrière désactivante » permet d'obtenir un niveau d'indexation plus élevé que l'indexation simple ou plafonnée. En contrepartie, cette indexation est garantie seulement si le sous-jacent n'atteint *jamais* la barrière avant l'échéance. Si ce niveau est touché avant l'échéance du produit, l'indexation disparaît, et un montant compensatoire est versé.

Exemple : *Produit à capital garanti sur le DJ Eurostoxx 50, de maturité 2 ans - Barrière désactivante à 130 %.*
Si la barrière n'est pas touchée d'ici la maturité, remboursement à 100 % du nominal + 100 % de la performance positive du DJ Eurostoxx 50. Sinon remboursement à 112 % du nominal.

Exemples www.clwarrants.com

Les profils capteurs de performance

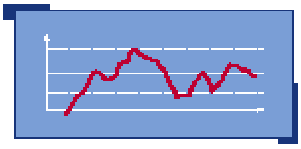
Indexation Lock Up : Figer une performance



L'indexation Lock up est une indexation plafonnée qui permet de garantir définitivement la performance du sous-jacent dès que celui ci franchit le cours plafond. De cette façon, même si le sous-jacent subit une correction ultérieure, la performance est automatiquement acquise et le porteur n'est donc pas affecté par la baisse.

Exemple : *Produit à capital garanti sur le DJ Eurostoxx 50, de maturité 5 ans - Lock-up : 160 %.*
Remboursement : 100 % du nominal + 100 % de la hausse de l'indice DJ Eurostoxx 50, entre son cours initial et son cours final, avec un remboursement maximum de 160 %, définitivement acquis dès que le sous-jacent vaut au moins 160 % de son cours initial.

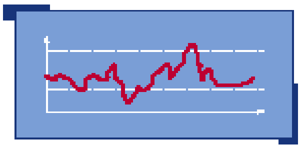
Indexation à Palier(s) : Capter les hausses sans subir les baisses



L'indexation à Palier(s) permet de capter différents niveaux de hausse du sous-jacent. Des paliers sont fixés initialement; chaque fois que le sous-jacent franchit un de ces paliers, la performance correspondante est définitivement acquise, quelle que soit l'évolution du sous-jacent par la suite. Cette indexation très défensive permet ainsi de verrouiller plusieurs niveaux de performance du sous-jacent. Elle est plutôt réservée à des produits de maturités longues.

Exemple : *Produit à capital garanti sur le DJ Eurostoxx 50, de maturité 8 ans - Paliers : 120 %, 140 %, 160 %, 180 %.*
Remboursement : 100 % du nominal + 100 % de la hausse du sous-jacent avec un remboursement maximum de :
- *120 %, si l'indice DJ Eurostoxx 50 vaut au moins 120 % de son niveau initial d'ici à maturité (soit 2,30 % de rdt annuel).*
- *140 %, si l'indice DJ Eurostoxx 50 vaut au moins 140 % de son niveau initial d'ici à maturité (soit 4,30 % de rdt annuel).*
- *160 %, si l'indice DJ Eurostoxx 50 vaut au moins 160 % de son niveau initial d'ici à maturité (soit 6,05 % de rdt annuel).*
- *180 %, si l'indice DJ Eurostoxx 50 vaut au moins 180 % de son niveau initial d'ici à maturité (soit 7,62 % de rdt annuel).*

Indexation Corridor : Gagner sur la stabilité du marché



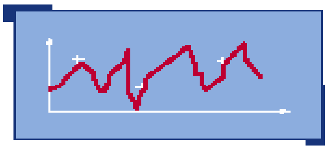
L'indexation Corridor permet de prendre position sur un marché dont on pense qu'il évoluera sans véritable tendance. Elle permet de recevoir in fine une rémunération au prorata du nombre de jours passés par le sous-jacent à l'intérieur d'un couloir préalablement défini. Bien entendu, si le sous-jacent quitte le couloir et y revient par la suite, la rémunération continue à s'accumuler.

Exemple : *Produit à capital garanti sur le DJ Eurostoxx 50, de maturité 6 mois.*
Remboursement à maturité : 100 % du nominal + 0,0366 % par jour où l'indice DJ Eurostoxx 50 est compris entre 95 % et 105 % de son cours initial (soit un remboursement compris entre 100 % et 104,65 %).

Exemples www.clwarrants.com

Les profils lisseurs de performance

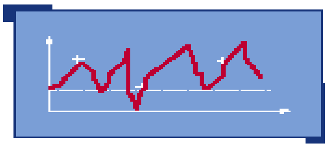
Indexation Moyenne : Profiter de la moyenne des performances



Dans le cas de l'indexation Moyenne, la performance du sous-jacent n'est plus déterminée entre le cours initial et le cours final (comme pour l'indexation Simple), mais entre le cours initial et une moyenne arithmétique des cours du sous-jacent, calculée tous les semestres ou toutes les années par exemple. De cette manière, on lisse la performance du sous-jacent, et on évite ainsi qu'elle ne dépende de la seule constatation du cours final.

Exemple : *Produit à capital garanti sur le DJ Eurostoxx 50, de maturité 2 ans.*
Remboursement : 100 % du nominal + 75 % de la hausse de l'indice DJ Eurostoxx 50 entre le cours initial et la moyenne arithmétique des cours constatés chaque semestre (soit 4 fixings).

Indexation Moyenne Floorée : Profiter de la moyenne des hausses

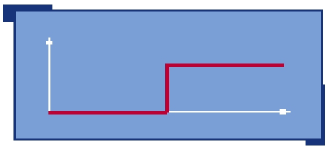


L'indexation moyenne floorée permet de ne pas être affecté par les baisses du sous-jacent en dessous du cours initial. En effet le calcul de la moyenne est effectué en ne retenant que les cours supérieurs au cours initial (chaque cours inférieur au cours initial est remplacé par ce dernier). Cette indexation permet donc de profiter des hausses du sous-jacent sans en subir les baisses.

Exemple : *Produit à capital garanti sur le DJ Eurostoxx 50, de maturité 2 ans.*
Remboursement : 100 % du nominal + 56 % de la moyenne des performances positives annuelles de l'indice DJ Eurostoxx 50.

Les autres profils de performance

Indexation Binaire : Profiter d'un coupon supérieur au taux monétaire

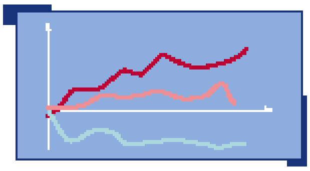


L'indexation binaire dispose d'un profil « en escalier ».
Elle permet de recevoir une rémunération qui dépend uniquement du niveau du sous-jacent par rapport à un cours initial prédéterminé. Ce type d'indexation peut être versé chaque année (sous la forme de coupons annuels), ou à maturité (sous la forme d'un coupon unique).
Le porteur peut par exemple toucher un coupon fixe, plus élevé que le taux monétaire, chaque année où le sous-jacent est au moins égal au cours initial.

Exemple : *Produit à capital garanti sur le DJ Eurostoxx 50, de maturité 2 ans.*
Remboursement à maturité : 100 % du nominal + à chaque date anniversaire un coupon de 7 % versé si le cours de l'indice DJ Eurostoxx 50 est au moins égal à son cours initial. Sinon le coupon sera de 0 %.

Exemples www.clwarrants.com

Les profils multi-performances



Contrairement aux types d'indexation précédents liés à la performance d'un seul sous-jacent (indice, action, panier d'actions ou panier d'indices), les indexations « Best Of », « Worst Of » et « Rainbow » reposent sur la performance individuelle de plusieurs sous-jacents différents.

Indexation « Best Of » : investissez à l'avance sur le sous-jacent le plus performant

Les profils « Best Of » permettent de profiter de la meilleure des performances individuelles de plusieurs sous-jacents, au prix d'une indexation moindre.

Exemple : *Produit à capital garanti sur un panier de 3 indices : DJ Eurostoxx 50, Nikkei 225, S&P 500, de maturité 8 ans. Remboursement à maturité : 100 % du nominal + 35 % de la meilleure des performances des trois indices.*

Indexation « Worst Of » : augmenter votre niveau de participation

A l'inverse, les produits « Worst Of » sont indexés sur la moins bonne des performances d'un portefeuille. En contrepartie, ils permettent d'obtenir un niveau d'indexation beaucoup plus élevé.

Exemple : *Produit à capital garanti sur un panier de 3 indices : DJ Eurostoxx 50, Nikkei 225, S&P 500, de maturité 8 ans. Remboursement à maturité : 100 % du nominal + 240 % de la moins bonne des performances des trois indices.*

Indexation « Rainbow » : associer la performance et le niveau d'indexation

L'indexation « Rainbow » est une combinaison des indexations précédentes.
Elle permet d'optimiser la performance du portefeuille sous-jacent sans diminuer trop fortement le niveau d'indexation.

Exemple : *Produit à capital garanti sur un panier de 3 indices : DJ Eurostoxx 50, Nikkei 225, S&P 500, de maturité 8 ans. Remboursement à maturité : 100 % du nominal + 50 % de la première performance, + 30 % de la seconde performance et + 20 % de la troisième.*

Exemples www.clwarrants.com

2.4 Glossaire

Le vocabulaire lié aux options est riche et très anglo-saxon. Voici un glossaire pour s'y retrouver :
- Prime - Premium : le prix de l'option. Il s'agit de la même terminologie qu'en assurance (on parle de prime d'assurance), ce qui est logique dans la mesure où une option et plus généralement un actif dérivé peuvent être vus comme un outil de couverture contre un risque.
- Sous-jacent - Underlying : l'instrument financier qui entre dans la définition du payoff de l'option. Il peut s'agir d'une action, d'un titre d'obligation, d'une matière première, d'un permis d'émission de polluer, etc.
- Prix d'exercice - Strike : seuil de référence entrant dans la définition du payoff de l'option (voir les exemples données dans ce chapitre). Il s'agit en pratique du seuil de déclenchement à partir duquel le détenteur de l'option exerce ses droits (d'acheter ou de vendre).
- Date d'expiration - Expiration : Date au-delà de laquelle l'option expire.

En marge de ce vocabulaire, il faut noter les notions suivantes qu'on retrouvera dans les chapitres suivants :
- La valeur intrinsèque - Intrinsic value correspond au payoff qu'on recevrait si l'option était ou pouvait (car le détenteur de l'option n'en a pas nécessairement le droit) être exercée aujourd'hui.

- La valeur-temps ou Time value est la différence entre le prix de marché de l'option aujourd'hui et sa valeur intrinsèque. Cela correspond au supplément de valeur dû au fait que l'option sera exercée dans le futur.
- Dans la monnaie - In the money : se dit d'une option qui a une valeur intrinsèque positive. En clair, si la date d'exercice était aujourd'hui, le détenteur de l'option exercerait son droit.
- A la monnaie - At the money : se dit d'une option pour laquelle le sous-jacent est proche du prix d'exercice (i.e valeur intrinsèque proche de 0).
- En dehors de la monnaie - Out of the money : se dit d'une option dont la valeur intrinsèque est nulle. Cela ne signifie pas pour autant que le prix de marché de l'option est nul : l'option a généralement une valeur-temps non nulle.

3
Les modèles discrets d'évaluation

3.1 Introduction

Les chapitres précédents ont été consacrés à la description des actifs de base d'une part et des actifs dérivés d'autre part. Parmi ceux-ci, nous nous intéressons ici au marché des actions et de ses produits dérivés, même si la frontière entre produits dérivés actions, taux d'intérêt ou change est en pratique un peu floue.

La problématique est la suivante : étant donné les prix des actifs de base (i.e. les actions), quelles valeurs doivent prendre les prix des produits dérivés construits à partir de ces actifs sous-jacents ? Il s'agit donc de déterminer des relations de cohérence entre les prix des actions et ce que devraient être les prix des actifs dérivés de ces actions. Cette démarche se fondera pour l'essentiel sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, déjà évoquée plus haut et sur laquelle nous reviendrons abondamment.

Dans un deuxième temps et une fois trouvée la relation entre prix de l'actif dérivé et prix du sous-jacent, nous étudierons les questions de couverture. En effet, les actifs dérivés sont d'abord des contrats permettant de se couvrir contre certains risques liés au sous-jacent : il ne suffit donc pas de connaître combien un actif dérivé doit valoir aujourd'hui mais il faut également savoir en quoi il permet de se couvrir contre des aléa liés au sous-jacent.

Enfin, nous nous restreindrons dans ce chapitre à des modélisations où le temps et les aléa sont discrets. L'avantage de ce type de modèle est leur trivialité mathématique, ce qui permet de se concentrer sur les intuitions financières plus que sur les problèmes mathématiques. En outre, on montrera qu'on peut les faire converger vers des modèles où le temps est continu. Last but not least, ces modèles discrets sont très couramment utilisées en pratique et constituent un outil opérationnel incontournable.

3.2 Le cadre probabiliste

3.2.1 La dynamique du prix de l'action

Dans tous les problèmes d'évaluation, il faut en premier lieu se donner un cadre probabiliste pour décrire les actifs de base (i.e. les sous-jacents). Reprenant l'ébauche de modélisation envisagée au début de cet ouvrage, le prix d'une action peut se voir comme le prix qui apparaitraît si le monde était déterministe (et si les dividendes et taux d'intérêt futurs étaient connus dès aujourd'hui) auquel on ajoute un aléa pour introduire l'idée que le monde n'est justement pas déterministe. On avait obtenu ainsi à partir d'une logique d'arbitrage :

$$S_t + div_t - S_{t-1} = r_{t-1}.S_{t-1} + \varepsilon_t$$

où ε_t est un aléa (i.e. un ‹‹ choc financier ››) qui se réalise entre $t-1$ et t. Mathématiquement, il est plus simple de faire un changement de paramétrage et de considérer plutôt un modèle multiplicatif de la forme :

$$S_t = S_{t-1}.\frac{1+r_{t-1}}{1+\gamma_t}.H_t$$

où :
- S_t est le prix de l'action en t ;
- γ_t est le taux de dividende défini par $\gamma_t = \frac{div_t}{S_t}$
- r_{t-1} est le taux d'intérêt pour la période allant de $t-1$ à t ;
- H_t est une variable aléatoire.

Pour simplifier le modèle, nous supposerons les hypothèses suivantes :
- le taux de dividende et le taux d'intérêt sont supposés constants au cours du temps ;
- l'aléa H suit une loi de Bernouilli, c'est-à-dire qu'il vaut u (‹‹ up ››) avec une probabilité p et d (‹‹ down ››) avec une probabilité $1-p$;
- les variables $(H_t)_t$ sont indépendantes entre elles et identiquement distribuées.

En clair, on ne s'intéresse pas ici aux questions liées au caractère aléatoire des dividendes et des taux d'intérêt mais seulement au caractère aléatoire du prix de revente de l'action. Par ailleurs, le modèle de Bernouilli dit encore **modèle binomial** est le plus simple qu'on puisse envisager. Ce modèle probabiliste considère donc implicitement qu'il ne peut y avoir que deux chocs : un choc ‹‹ haussier ›› et un choc ‹‹ baissier ››. Ainsi, nous obtiendrons un modèle sans aucune complexité mathématique et qui pourtant apporte l'essentiel des intuitions financières, intuitions qu'on retrouvera dans le cadre des modèles mathématiques en temps continu.

Pour finir, en notant $\widetilde{r}$ la quantité telle que :

$$1+\widetilde{r} = \frac{1+r}{1+\gamma}$$

qui vaut donc au premier ordre $r-\gamma$, **le modèle dynamique de sous-jacent s'écrit :**

$$S_t = S_{t-1}.\left(1+\widetilde{r}\right).H_t = \begin{cases} S_{t-1}.\left(1+\widetilde{r}\right).u & \text{avec probabilité } p \\ \\ S_{t-1}.\left(1+\widetilde{r}\right).d & \text{avec probabilité } 1-p \end{cases} \tag{3.1}$$

qui est la dynamique de base que nous considérons pour l'action. Il s'agit donc d'une équation de récurrence avec toutefois un terme aléatoire. Quand nous serons en temps continu, cette équation sera remplacée par une équation différentielle stochastique.

3.2.2 Quelques propriétés de la dynamique des prix

On peut travailler l'équation précédente pour déduire quelques résultats. En particulier, on peut écrire l'équation (3.1) en déroulant la récurrence, soit :

$$S_t = S_0.\left(1+\widetilde{r}\right)^t.\prod_{k=0}^{t-1} H_{t-k} \tag{3.2}$$

de telle sorte que le prix de l'action aujourd'hui apparaît comme la résultante de tous les ‹‹ chocs boursiers ›› passés.

On peut noter également que la loi de S_t conditionnellement à S_0 est une loi binomiale qui prend les valeurs $S_0.\left(1+\widetilde{r}\right)^t.u^j.d^{t-j}$ avec une probabilité :

$$\begin{pmatrix} t \\ j \end{pmatrix}.p^j.\left(1-p\right)^{t-j}$$

où $\begin{pmatrix} t \\ j \end{pmatrix} = \frac{t!}{j!(t-j)!}$

On peut également remarquer que :

Proposition 1 *Si on impose conventionnellement que $d < u$, alors on a :*

$$d < 1 < u$$

Il s'agit là d'un résultat financier et non mathématique. En effet, supposons $u, d > 1$. Un investisseur à la date $t-1$ peut emprunter la somme S_{t-1} pour acheter une action. Le bilan de cette opération en t est le suivant :
- remboursement de l'emprunt : $-S_{t-1}.(1+r)$
- revente de l'action, somme à laquelle on ajoute le dividende versé : $S_t.(1+\gamma)$

Au total, l'investisseur n'a rien déboursé en $t-1$ puisque l'achat de l'action s'est fait par le biais d'un emprunt et reçoit $S_t.(1+\gamma) - S_{t-1}.(1+r)$ en t, somme qui est toujours positive si $u, d > 1$. Il s'agit clairement d'une opportunité d'arbitrage car cette stratégie est sans risque, ne nécessite pas de mise de fonds initiale, et rapporte à tous coups une somme positive. Si on suppose - comme nous le ferons tout le temps - que le marché élimine instantanément ces opportunités, nous pouvons admettre qu'elles n'existent donc pas et que u, d ne peuvent pas être simultanément supérieurs à 1. Inversement par le même type d'argument, on ne peut avoir $u, d < 1$.

3.3 L'absence d'opportunité d'arbitrage et le prix des produits dérivés

3.3.1 La formule d'évaluation

Le cadre probabiliste étant posé, nous nous intéressons au prix des produits dérivés dont le sous-jacent suit une dynamique du type précédent. En outre, pour simplifier, nous supposons $t = 1$. L'équation (3.1) s'écrit donc :

$$S_1 = S_0.\left(1+\widetilde{r}\right).H_1$$

Il est naturel de supposer dans un premier temps que le prix du produit dérivé est une fonction du prix du sous-jacent et du temps. Ainsi, C_1, le prix du produit dérivé en 1 prendra deux valeurs possibles selon la réalisation de l'aléa. On notera $C_{1,u}$ et $C_{1,d}$ ces deux valeurs.

On peut alors faire l'opération suivante à la date 0 :
- émission d'une option d'achat ;
- achat d'une quantité α de titres d'action sous-jacente ;
- placement ou emprunt d'une somme β (si $\beta > 0$, il s'agit d'un placement et d'un emprunt dans le cas contraire)

L'investisseur doit ‹‹ débourser ›› (entre guillemets car cette somme peut être négative) :

$$C_0 - \alpha.S_0 - \beta$$

et reçoit en 1 :

$$-C_1 + \alpha.S_1.(1+\gamma) + \beta.(1+r)$$

Or, d'après le cadre probabiliste décrit plus haut, cette somme ne peut prendre que deux valeurs :

$$\begin{cases} -C_{1,u} + \alpha.S_0.(1+r).u + \beta.(1+r) & \text{avec une probabilité } p \\ -C_{1,d} + \alpha.S_0.(1+r).d + \beta.(1+r) & \text{avec une probabilité } 1-p \end{cases}$$

Il est toujours possible de choisir α pour que ce portefeuille soit sans risque. Ici, cela signifie que les deux valeurs précédentes sont les mêmes : en clair, quelque soit le choc boursier entre 0 et 1, le portefeuille a une valeur indépendante de ce choc. On dit qu'on a construit un **portefeuille de couverture**. Ce paramètre α doit donc vérifier :

$$\alpha^* = \frac{1}{1+r}.\frac{C_{1,u} - C_{1,d}}{S_0.(u-d)}$$

et est totalement calculable en $t-1$.

Si l'investisseur utilise cette valeur pour construire son portefeuille, alors il a construit de facto un portefeuille sans risque. Si de plus il a choisi β tel que l'investissement initial soit nul, i.e. $C_0 - \alpha^*.S_0 - \beta^* = 0$ alors, avec ces deux valeurs de α et β (et uniquement avec ces deux valeurs), on doit avoir par **absence d'opportunité d'arbitrage** :

$$-C_1 + \alpha^*.S_1.(1+\gamma) + \beta^*.(1+r) = 0$$

qui traduit qu'un portefeuille sans risque et qui ne nécessite aucun investissement initial ne doit pas rapporter autre chose que 0 euro.

En remplaçant α^* et β^* par leur valeur, on obtient, après calculs, la relation suivante :

$$C_0 = \frac{1}{1+r}.\left(\pi.C_{1,u} + (1-\pi).C_{1,d}\right)$$

avec :

$$\pi = \frac{1-d}{u-d}$$

Plus généralement, si on note C_t le prix du produit dérivé à la date t, on a :

$$C_t = \frac{1}{1+r}.E_t\left(C_{t+1}\right) \tag{3.3}$$

où $E_t(.)$ désigne l'espérance conditionnelle (sachant S_t et son passé) **calculée avec la probabilité π et non la probabilité p.** On a donc la proposition suivante :

Proposition 2 *Sous l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, il existe une probabilité π telle que les prix actualisés des actifs dérivés soient martingales.*

En effet, si on considère le processus $Z_t = \frac{C_t}{(1+r)^t}$ alors on voit tout de suite que, sous la probabilité π, ce processus vérifie :

$$Z_t = E_t\left(Z_T\right)$$

pour tout $t < T$. En outre, π est bien une probabilité car π est compris entre 0 et 1, résultat qui dérive directement de la propriété $d < 1 < u$.

Exemple 1 *L'évaluation d'une option standard européenne peut alors se faire en remarquant qu'à la date d'exercice :*

$$C_T = \left(S_T - K\right)^+$$

et donc :

$$C_t = \frac{1}{(1+r)^{T-t}}.E_t\left(S_T - K\right)^+$$

Or, comme on l'a remarqué dans la section précédente, la loi de S_T conditionnellement à S_t est une loi binomiale. Concrètement, d'après (3.2) :

$$S_T = S_t.\left(1+\widetilde{r}\right)^{T-t}.\prod_{k=0}^{T-t-1} H_{T-k}$$

d'où :

$$C_t = \frac{S_t}{(1+\gamma)^{T-t}}.E_t\left(\prod_{k=0}^{T-t-1} H_{T-k} - \frac{K}{S_t.\left(1+\widetilde{r}\right)^{T-t}}\right)^+$$

soit encore :

$$C_t = \frac{S_t}{(1+\gamma)^{T-t}}.\sum_{j=0}^{T-t}\begin{pmatrix} T-t \\ j \end{pmatrix}.\pi^j.\left(1-\pi\right)^{T-t-j}\left(u^j.d^{T-t-j} - \frac{K}{S_t.\left(1+\widetilde{r}\right)^{T-t}}\right)^+ \tag{3.4}$$

Cette formule permet donc d'exprimer le prix de l'option en t en fonction de t et S_t.

3.3.2 Interprétation économique

La formule d'évaluation (3.3) est fondamentale : elle exprime que le prix d'un actif peut se voir comme l'espérance des flux futurs qu'il génère, l'espérance étant calculée sous une certaine probabilité π dont l'existence dérive de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Au passage, on a, d'après (3.1) le même type de formule (aux dividendes près) pour le prix du sous-jacent :

$$S_t = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} E_t \left(S_T . (1+\gamma)^{T-t} \right)$$

La probabilité π s'appelle la **probabilité risque-neutre** : elle n'a a priori rien à voir avec la probabilité initiale p, qu'on appelle aussi probabilité objective ou probabilité historique. **Le calcul du prix d'un produit dérivé ne fait donc pas intervenir la ‹‹ vraie ›› probabilité des événements**. Le terme de ‹‹ risque-neutre ›› vient directement de la théorie économique : lorsque les intervenants d'un marché n'ont pas d'aversion pour le risque (on dit encore qu'ils sont risque-neutres), ils vont s'accorder pour évaluer le prix d'un actif comme l'espérance actualisée des flux qu'il génère. La formule d'évaluation obtenue ici permet de faire **comme si** les investisseurs n'avaient pas d'aversion pour le risque. **Cela ne suppose absolument pas que les intervenants sont risque-neutres**. En clair, l'absence d'opportunité d'arbitrage se traduit mathématiquement par l'apparition d'une probabilité π : cette probabilité est un artifice mathématique qui permet, dans les calculs d'évaluation, de **faire comme si** les investisseurs étaient neutres au risque.

3.3.3 Utilisation pratique

Dès lors qu'on connaît les paramètres r, γ, u, et d, on sait calculer le prix de tout produit dérivé (au moins de type européen, au sens défini au chapitre précédent). L'implémentation numérique ne pose pas de problème puisqu'il suffit d'implémenter un arbre binomial. La seule question est de savoir comment on évalue les paramètres.

3.4 La convergence vers le temps continu

Le fonctionnement des marchés financiers rend difficile l'idée qu'il existe un pas de temps élémentaire et insécable. Il est de fait plus logique d'écrire un modèle en temps continu puis de le discrétiser afin de l'adapter aux réalités des marchés. Ici, nous allons écrire le modèle précédent en faisant apparaître le pas de temps et en le faisant tendre vers 0. Nous obtiendrons ainsi un modèle en temps continu qui n'est rien d'autre que le modèle de Black et Scholes.

3.4.1 Quelques notations

On note δ le pas de temps et on suppose que les dates considérées ici sont des multiples de ce pas de temps. Pour simplifier les expressions, nous supposerons, sans perte de généralité, que les taux d'intérêt et taux de dividende sont nuls. Le processus du sous-jacent s'écrit donc d'après (3.1) :

$$S_t = S_0 \prod_{k=0}^{\frac{t}{\delta}-1} H_{\left(\frac{t}{\delta}-k\right).\delta}$$

ou encore (par changement d'indice) :

$$Ln\ S_t = Ln\ S_0 + \sum_{k=1}^{\frac{t}{\delta}} Ln\ H_{k.\delta}$$

3.4.2 Changement de paramétrage

Les paramètres u et d ont une interprétation financière qui n'est pas évidente. On introduit donc la notion de volatilité comme l'écart-type conditionnel du logarithme du prix du sous-jacent, soit :

$$\left[Var_{t-\delta}\left(Ln\ S_t\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

qui est donc égale à (comme pour toute loi de Bernouilli)[1] :

$$[Var\,(Ln\ H_t)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi.\,(1-\pi)}.\left[Ln\ \frac{u}{d}\right]$$

On notera donc :

$$\sigma_\delta = \sqrt{\pi.\,(1-\pi)}.Ln\ \frac{u}{d}$$

Comme, par ailleurs, on a par définition de π :

$$\pi.u + (1-\pi).d = 1$$

on en déduit les équations de passage entre le paramétrage (u, d) et le paramétrage (π, σ_δ), soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u & = & \frac{1}{\pi+(1-\pi).\exp\left(-\frac{\sigma_\delta}{\sqrt{\pi.(1-\pi)}}\right)} \\ \\ d & = & \frac{1}{(1-\pi)+\pi.\exp\left(\frac{\sigma_\delta}{\sqrt{\pi.(1-\pi)}}\right)} \end{array}\right.$$

3.4.3 Convergence vers le temps continu

Il ne reste plus qu'à définir comment la volatilité dépend du pas de temps δ. Pour que le modèle converge vers ‹‹ quelque chose ››, il faut supposer que :

$$\sigma_\delta = \sigma.\sqrt{\delta}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{array}{rcl} Ln\ S_t & = & Ln\ S_0 + \sum_{k=1}^{\frac{t}{\delta}} Ln\ H_{k.\delta} \\ \\ & = & Ln\ S_0 + \sum_{k=1}^{\frac{t}{\delta}} \sigma.\sqrt{\delta}.\varepsilon_k + \pi.Ln\ u + (1-\pi).Ln\ d \end{array}$$

avec :

$$\varepsilon_k = \frac{Ln\ H_{k.\delta} - (\pi.Ln\ u + (1-\pi).Ln\ d)}{\sigma.\sqrt{\delta}}$$

Cette nouvelle variable aléatoire a l'avantage d'être centrée et réduite, c'est-à-dire de moyenne nulle et de variance 1 sous la probabilité π.

La convergence du terme $\sum_{k=1}^{\frac{t}{\delta}} \pi.Ln\ u + (1-\pi).Ln\ d$ est triviale : il suffit de remplacer u et d en fonction de $\sigma_\delta = \sigma.\sqrt{\delta}$, de faire un développement limité au voisinnage de $\delta = 0$, et de constater qu'il converge vers :

$$-\frac{\sigma^2}{2}.t$$

Le terme stochastique converge par un théorème de type théorème central limite. Ce terme s'écrit :

$$\sigma.\sqrt{t}\sqrt{\frac{1}{\frac{t}{\delta}}}\sum_{k=1}^{\frac{t}{\delta}} \varepsilon_k$$

et converge donc en loi vers une loi normale d'espérance nulle et de variance $\sigma^2.t$.

Au total, $Ln\ S_t$ converge, quand le pas de temps tend vers 0, vers une loi normale :

$$Ln\ S_t \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} N\left(Ln\ S_0 - \frac{\sigma^2}{2}.t\ ;\ \sigma^2.t\right)$$

[1] Le conditionnement disparaît car on a supposé que les variables H_t étaient indépendantes.

3.4.4 Quelques remarques

Le schéma binomial décrit ici converge vers un modèle où le prix de l'action sous-jacente suit une loi log-normale. Il a fallu, pour cela, faire une hypothèse sur l'ordre de la volatilité en fonction du pas de temps, et surtout supposer que la volatilité se réduisait à un seul paramètre constant σ. En revanche, le paramètre a moins d'importance puisqu'il disparaît dans la convergence vers le temps continu[2].

Le résultat de log-normalité précédent peut se généraliser pour tout couple de dates (t, T). Ainsi, la loi conditionnelle de $Ln\ S_T$ sachant S_t apparaîtra comme une loi normale :

$$N\left(Ln\ S_t - \frac{\sigma^2}{2}.(T-t)\ ;\ \sigma^2.(T-t)\right)$$

Plus généralement, tout n-uplet $(Ln\ S_{t_1}, ..., Ln\ S_{t_n})$ suivra une loi normale. On dira que $(Ln\ S_t)_t$ est un processus gaussien.

Lorsqu'on ne suppose plus les taux d'intérêt et taux de dividende nuls, il est facile de voir que cette loi gaussienne devient[3] :

$$N\left(Ln\ S_t + \left(\widetilde{r} - \frac{\sigma^2}{2}\right).(T-t)\ ;\ \sigma^2.(T-t)\right)$$

On voit alors comment calculer le prix d'un produit dérivé dans le modèle continu. On peut soit partir de la formule d'évaluation binomiale (3.4) et faire tendre le pas de temps vers 0, soit partir de la formule plus générale :

$$C_t = e^{-r(T-t)}.E_t\left(S_T - K\right)^+$$

en calculant l'espérance avec la loi gaussienne obtenue pour $Ln\ S_T$. On montre que ces deux voies aboutissent au même résultat et ce résultat correspond à la formule de Black et Scholes qu'on étudiera au chapitre suivant. Enfin, il en existe une troisième qu'on présente maintenant.

3.4.5 Evaluation par équation aux dérivées partielles

On montre ici que le prix d'un actif dérivé peut être vu comme la solution d'une équation aux dérivées partielles. Pour cela, on reprend l'équation de récurrence (3.3) en supposant de nouveau que taux d'intérêt et taux de dividende sont nuls :

$$C_t = E_t\left(C_{t+\delta}\right)$$

soit encore :

$$\begin{aligned} C_t &= C(t, S_t) \\ &= \pi.C(t+\delta, S_t.u) + (1-\pi).C(t+\delta, S_t.d) \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$u = 1 + \sigma.\sqrt{\frac{1-\pi}{\pi}}.\sqrt{\delta} - \sigma^2.\frac{\frac{1}{2}-\pi}{\pi}.\delta + o(\delta)$$

et :

$$d = 1 - \sigma.\sqrt{\frac{1-\pi}{\pi}}.\sqrt{\delta} - \sigma^2.\frac{\pi-\frac{1}{2}}{1-\pi}.\delta + o(\delta)$$

et en développant la fonction C par rapport à ses deux arguments, on déduit :

$$0 = \frac{\partial C}{\partial t}.\delta + \frac{\partial C}{\partial S}.o(\delta) + \frac{1}{2}S^2.\sigma^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}.\delta$$

soit :

$$0 = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}S^2.\sigma^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

[2] Si on développe aux ordres supérieurs, le paramètre π ré-apparaît : cela signifie que ce paramètre a une influence sur la vitesse de convergence mais non sur la valeur-limite elle-même.

[3] On adopte ici la convention de taux d'intérêt utilisée généralement en temps continu. Cela revient formellement à substituer $e^{-r(T-t)}$ à $\frac{1}{(1+r)^{T-t}}$.

qui devient quand les taux d'intérêt et taux de dividende sont non nuls :

$$rC = \frac{\partial C}{\partial t} + \widetilde{r}.S.\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}S^2.\sigma^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

Au total, le calcul du prix - en temps continu - d'un produit dérivé tel qu'une option européenne peut se faire :

– soit comme le calcul d'une espérance à partir de la formule :

$$C_t = e^{-r(T-t)}.E_t\left(S_T - K\right)^+$$

en imposant que la loi conditionnelle de S_T sachant S_t est une loi log-normale :

$$Ln\ S_T \text{ (sachant } S_t) \rightsquigarrow N\left(Ln\ S_t + \left(\widetilde{r} - \frac{\sigma^2}{2}\right).(T-t)\ ;\ \sigma^2.(T-t)\right)$$

– soit comme la solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$rC = \frac{\partial C}{\partial t} + \widetilde{r}.S.\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}S^2.\sigma^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

avec la condition aux bornes $C(T,S) = (S-K)^+$.

4

Le modèle de Black et Scholes

4.1 Introduction

Nous abandonnons ici le cadre discret du chapitre précédent et travaillons désormais en temps continu. La démarche suivie dans le cadre discret sera adoptée ici dans le cas continu. Il faut garder en tête que les étapes sont les mêmes et les intuitions financières similaires : seul change le niveau de traitement mathématique. Ce niveau était trivial quand les aléa et le temps étaient discrets ; il l'est moins voire beaucoup moins dans les modèles continus.

Pour résumer, la démarche était et sera la suivante :

1. donnée d'une dynamique (aléatoire) du sous-jacent ;
2. traduction de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage sous la forme de l'existence d'une mesure dite risque-neutre ;
3. sous cette mesure, les prix actualisés sont martingales, ce qui conduit à une formule de valorisation selon laquelle le prix aujourd'hui d'un actif apparaît comme l'espérance (sous la mesure risque-neutre) des flux futurs actualisés. De façon équivalente, les prix des actifs peuvent aussi être vus comme des solutions d'une équation aux dérivées partielles ;
4. spécification supplémentaire du modèle par la donnée d'une fonction de volatilité ;
5. une fois le modèle spécifié, les calculs numériques peuvent être menés jusqu'à leur terme.

Schématiquement, les étapes 1, 2 et 3 aboutissent au cadre général de l'évaluation par arbitrage. Ce cadre sera valable aussi bien pour les dérivés action que pour les dérivés de taux d'intérêt, de taux de change etc. A partir de l'étape 4, on introduit des modèles spécifiques : il y a donc une infinité de façons de sortir de l'étape 3 pour définir un modèle particulier. Ainsi, au chapitre précédent, on a fait l'hypothèse que la volatilité (c'est-à-dire l'écart-type conditionnel) était représentable par un unique paramètre σ. C'est la façon la plus simple de répondre à l'étape 4 mais rien n'empêchait de faire plus compliqué en prenant une volatilité fonction du sous-jacent (i.e. $\sigma(S_t)$). On obtient alors un autre modèle où le sous-jacent $(S_t)_t$ n'a a priori aucune chance d'être log-normal.

Le modèle de Black et Scholes est justement le modèle limite du chapitre précédent, c'est-à-dire un modèle où la spécification de l'étape 4 est la plus simple qu'on puisse imaginer, i.e une volatilité réduite à un paramètre σ. C'est ce modèle que nous étudions ici. Pour cela, nous ne revenons pas sur les étapes 1, 2 et 3 : nous supposons qu'elles sont acquises. Ces étapes sont triviales à démontrer dans un cadre discret mais nécessitent des démonstrations plus sophistiquées en continu. Nous nous plaçons directement après l'étape 3 et nous disposons donc de 3 objets :

– une dynamique du sous-jacent sous la mesure risque-neutre (typiquement log-normale) ;

- une formule d'évaluation reliant le prix d'un actif dérivé à l'espérance des flux futurs ;
- une seconde formule d'évaluation - équivalente - sous la forme d'une équation aux dérivées partielles dont la solution est le prix de l'actif dérivé.

4.2 La formule de Black et Scholes

La dynamique du sous-jacent est la dynamique-limite du chapitre précédent et s'écrit donc[1] :

$$Ln\ S_T \text{ (sachant } S_t) \rightsquigarrow N\left(Ln\ S_t + \left(r - \gamma - \frac{\sigma^2}{2}\right).(T-t)\ ;\ \sigma^2.(T-t)\right) \tag{4.1}$$

Cette distribution log-normale est relativement simple à manier. **Nous supposons sans perte de généralité que le taux de dividende γ est nul.** Le cas où ce taux n'est pas nul est une généralisation directe des calculs qui suivent.

Cette distribution permet de calculer le prix C_t d'une option d'achat européenne à partir de la formule d'évaluation générale :

$$C_t = e^{-r.(T-t)}.E_t\left(S_T - K\right)^+$$

La densité de la loi normale $N\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

ce qui donne ici une densité de $Ln\ S_T$ (sachant S_t) :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}}.\exp\left(-\frac{\left(x - \left(Ln\ S_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right).(T-t)\right)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)$$

Au total, le prix de l'option d'achat s'écrit :

$$C_t = e^{-r.(T-t)}.\int_{-\infty}^{+\infty}\max\left(e^x - K; 0\right).f(x).dx$$

soit :

$$C_t = e^{-r.(T-t)}.\left[\int_{Ln\ K}^{+\infty} e^x.f(x).dx - K.\int_{Ln\ K}^{+\infty} f(x).dx\right]$$

Il est alors facile d'exprimer ce prix à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}.dx$$

ce qui donne la **formule de Black et Scholes** :

$$C_t = S_t.N(d_1) - K.e^{-r.(T-t)}.N(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.Ln\ \left(\frac{S_t}{K.e^{-r(T-t)}}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

et :

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.Ln\ \left(\frac{S_t}{K.e^{-r(T-t)}}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

[1] Le facteur d'actualisation est pris ici sous sa forme continue $e^{-r(T-t)}$ et non discrète $\frac{1}{(1+r)^{T-t}}$.

Le prix d'une option d'achat apparaît donc comme une fonction non linéaire du prix du sous-jacent S_t. On peut remarquer par ailleurs que lorsque t atteint la date d'exercice T alors C_T est bien égal à $(S_T - K)^+$. L'utilisation de cette formule sera examinée dans les sections suivantes.

Il faut bien comprendre que cette formule donne un prix **théorique** pour l'option. Comme par ailleurs les actifs dérivés sont cotés sur des marchés et répondent donc à une logique offre-demande, il n'est absolument pas acquis que le prix théorique soit égal au prix réellement observé sur le marché, ne serait-ce que parce qu'on s'est placé dans un modèle particulier (i.e. le modèle de Black et Scholes) où la volatilité a été supposée constante. Avec une autre hypothèse, nous aurions abouti à une tout autre formule. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

Voici un exemple de calcul : considérons une option d'achat sur une action dont la valeur aujourd'hui est 100 euros ($S_t = 100$), de prix d'exercice 90 euros ($K = 90$), de maturité 3 mois ($T - t = 0.25$ année). Supposons par ailleurs que le taux d'intérêt annuel est de 6 % ($r = 6\%$) et la volatilité annuelle de 15 % ($\sigma = 15\%$). Les termes d_1 et d_2 valent donc :

$$d_1 = \frac{1}{0.15\sqrt{0.25}}.Ln\left(\frac{100}{90.e^{-0.06*0.25}}\right) + \frac{1}{2}0.15\sqrt{0.25} = 1.6415$$

et :

$$d_2 = \frac{1}{0.15\sqrt{0.25}}.Ln\left(\frac{100}{90.e^{-0.06*0.25}}\right) - \frac{1}{2}0.15\sqrt{0.25} = 1.5673$$

d'où :

$$C_t = 100.N(d_1) - 90.e^{-0.06x0.25}.N(d_2) = 11.50 \text{ euros}$$

Si le modèle de Black et Scholes reflète bien la réalité (et si on ne s'est pas trompé sur les niveaux de taux d'intérêt et de volatilité), alors les investisseurs aujourd'hui sont prêts à payer 11.50 euros pour détenir le droit d'acheter l'action au prix de 90 euros dans 3 mois, sachant qu'elle en vaut 100 aujourd'hui.

4.3 Le formalisme du temps continu

Comme nous venons de le voir, les distributions de probabilité de $(S_t)_t$ permettent de faire tous les calculs de prix. Toutefois, il existe un formalisme plus synthétique mais mathématiquement plus ardu qu'on présente ici de façon très informelle. Une présentation plus propre peut se trouver dans un cours de calcul stochastique et de mathématiques appliquées. L'élément de base est le **mouvement Brownien**

4.3.1 Le mouvement Brownien et les équations différentielles stochastiques

Le mouvement Brownien est noté ici $(W_t)_t$. Ce processus est défini comme le processus stochastique à accroissements indépendants et gaussiens, i.e. :

$$W_{t'} - W_t \text{ indépendant de } (W_s)_{s \leq t} \text{ pour tout } t < t'$$

et :

$$W_{t'} - W_t \text{ suit une loi normale d'espérance nulle et de variance } t' - t$$

Ainsi, grâce à cet objet, la distribution du sous-jacent dans le modèle de Black et Scholes peut alors s'écrire sous la forme condensée suivante[2] :

$$Ln\ S_t = Ln\ S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right).t + \sigma.W_t \tag{4.2}$$

avec, par convention, $W_0 = 0$. Le mouvement Brownien permet ainsi d'écrire de façon synthétique et maniable l'hypothèse concernant la distribution de probabilité du sous-jacent. Il faut bien voir qu'à ce stade il s'agit d'une simple ré-écriture : écrire (4.2) ou dire que les lois conditionnelles de $Ln\ S_T$ sachant S_t sont log-normales (équation (4.1)), c'est dire à peu près deux fois la même chose.

[2] On suppose toujours que le taux de dividende est nul.

On peut aussi de manière équivalente écrire l'équation (4.2) sous une forme différentielle, i.e. une **équation différentielle stochastique** ou **équation de diffusion** :

$$dLn\ S_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right).dt + \sigma.dW_t$$

qui est analogue à l'équation de récurrence stochastique du chapitre précédent, qui donnait S_t en fonction de S_{t-1} et d'une perturbation aléatoire H. Ici, dW et H jouent le même rôle, i.e. un choc financier qui permet de ‹‹ sortir du monde déterministe ››. Une équation différentielle stochastique prolonge la notion d'équation différentielle traditionnelle (i.e. non stochastique) à travers le terme $\sigma.dW_t$. Par conséquent, rien n'empêche de considérer des équations plus générales qui s'écriraient :

$$dS_t = \mu(t, S_t).dt + \sigma\left(t, S_t\right).dW_t$$

où $\mu(.,.)$ et $\sigma\left(.,.\right)$ sont des fonctions quelconques (à des conditions de régularité près[3]). Toutefois, les équations différentielles stochastiques ne se manient pas tout à fait de la même façon que les équations ordinaires.

4.3.2 Le lemme d'Itô

Le lemme d'Itô décrit comment on obtient l'équation différentielle stochastique d'une fonction de S_t et de t, par exemple $h(t, S_t)$, quand on connaît l'équation différentielle stochastique de $(S_t)_t$. Dans le cas ordinaire, non stochastique, le passage de l'une à l'autre se fait par la dérivée de h par une formule du type :

$$dh(t, S_t) = \frac{\partial h}{\partial t}.dt + \frac{\partial h}{\partial S}.dS$$

Ici, ce n'est plus vrai : plus exactement un terme supplémentaire apparaît. On a alors :

Proposition 3 ***(Lemme d'Itô)*** *Si le processus $(S_t)_t$ suit l'équation différentielle stochastique :*

$$dS_t = \mu(t, S_t).dt + \sigma\left(t, S_t\right).dW_t$$

alors $\left(h(t, S_t)\right)_t$ suit l'équation différentielle stochastique (où h est de classe C^2) :

$$dh(t, S_t) = \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma\left(t, S_t\right)^2.\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\right).dt + \frac{\partial h}{\partial S}.dS$$

soit encore :

$$dh(t, S_t) = \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \mu(t, S_t).\frac{\partial h}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma\left(t, S_t\right)^2.\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\right).dt + \frac{\partial h}{\partial S}.\sigma\left(t, S_t\right).dW_t$$

L'intuition qui se trouve derrière le terme supplémentaire $\frac{1}{2}\sigma\left(t, S_t\right)^2.\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}$ repose sur l'obligation d'aller à l'ordre deux en S dans le développement de $h(.,.)$. La nécessité d'‹‹ aller à l'ordre deux ›› était déjà présente dans les développements limités du chapitre précédent. On exprime ce fait en disant que dW^2 est d'un ordre $O(dt)$. En effet, par définition du mouvement Brownien, on a $E(W_{t'} - W_t) = 0$ et $E\left(W_{t'} - W_t\right)^2 = t' - t$, qu'on écrit $E\left(dW_t\right)^2 = dt$.

Exemple 2 *On peut donner un premier exemple en calculant l'équation différentielle stochastique de $(S_t)_t$ à partir de celle de $(Ln\ S_t)_t$ dans le modèle de Black et Scholes. Il est facile de vérifier que si :*

$$dLn\ S_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right).dt + \sigma.dW_t$$

alors :

$$dS_t = r.S_t.dt + \sigma.S_t.dW_t \tag{4.3}$$

[3] Comme pour les équations différentielles ordinaires, l'existence d'une solution n'est pas forcément évidente et requiert des conditions de régularité sur les coefficients de l'équation.

qu'on écrit aussi :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r.dt + \sigma.dW_t$$

Il faut toutefois être prudent car, d'après le lemme d'Itô, $\frac{dS_t}{S_t} \neq dLn\ S_t$ *!*

Exemple 3 *Retrouver l'équation aux dérivées partielles de la fin du chapitre précédent est un deuxième exemple d'application. Supposons une dynamique plus générale où la volatilité est quelconque :*

$$dS_t = r.S_t.dt + \sigma\left(t, S_t\right).dW_t$$

Le prix d'un actif dérivé de prix $C_t = C(t, S_t)$ *satisfait donc l'équation différentielle stochastique :*

$$dC(t, S_t) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + r.S_t.\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S_t).\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right).dt + \frac{\partial C}{\partial S}.\sigma\left(t, S_t\right).dW_t \tag{4.4}$$

On peut alors faire le raisonnement très informel suivant. Construisons un portefeuille composé de l'option et d'une quantité α *de l'action sous-jacente :* $V_t = C(t, S_t) + \alpha.S_t$*. La dynamique de ce portefeuille s'écrit :*

$$dV_t = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + r.S_t.\left(\frac{\partial C}{\partial S} + \alpha\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S_t).\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right).dt + \left(\frac{\partial C}{\partial S} + \alpha\right).\sigma\left(t, S_t\right).dW_t$$

On suppose que α *ne varie pas entre* t *et* $t + dt$ *: l'investisseur n'achète pas ou ne vend pas d'actions supplémentaires (le portefeuille est dit auto-financé). Comme dans le cas discret du chapitre précédent, on choisit* α *de telle sorte que le portefeuille soit sans risque. Ici, cela signifie que, dans l'équation différentielle stochastique de* $(V_t)_t$*,les chocs* dW *ont été ‹‹ éliminés ››. Il faut donc prendre :*

$$\alpha^* = -\frac{\partial C}{\partial S}$$

et on a alors :

$$dV_t = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S_t).\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right).dt$$

Ce portefeuille est localement sans risque et ne doit donc rapporter ni plus ni moins que le taux d'intérêt r*, soit :*

$$dV_t = r.V_t.dt$$

et donc, en identifiant les deux expressions :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + r.S.\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S_t).\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC$$

qui est l'équation aux dérivées partielles de la fin du chapitre précédent dans un cadre toutefois plus général puisque la fonction de volatilité est quelconque. Le modèle de Black et Scholes est un cas particulier. Enfin, si on injecte ce résultat dans l'équation (4.2), on obtient alors :

$$dC(t, S_t) = r.C(t, S_t).dt + \frac{\partial C}{\partial S}.\sigma(t, S_t).dW_t$$

Exemple 4 *Si on applique le lemme d'Itô sur la variable* $Z_t = e^{-rt}.C(t, S_t)$*, on obtient :*

$$dZ_t = e^{-rt}.\frac{\partial C}{\partial S}.\sigma.S_t.dW_t$$

qui s'écrit sous la forme d'une intégrale stochastique :

$$Z_T = Z_t + \int_t^T e^{-ru}.\frac{\partial C}{\partial S}.\sigma.S_u.dW_u$$

et qui conduit à :

$$C(t, S_t) = e^{-r.(T-t)}.E_t\left(C(T, S_T)\right)$$

en utilisant $E\left(dW_u\right) = 0$*. On retrouve bien l'idée que les prix actualisés sont martingales ou encore que le prix d'un actif est égal à la valeur actualisée espérée des flux futurs qu'il génère.*

4.3.3 L'équation de Fokker-Planck

Enfin, nous avons dit que les équations différentielles stochastiques étaient un moyen d'écrire de façon condensée le type de distribution de probabilité suivie par le processus. Il faut donc expliciter ce lien, c'est-à-dire montrer comment, à partir de l'équation différentielle stochastique, on récupère les densités de probabilité. Partons de l'équation :

$$dS_t = \mu(t, S_t).dt + \sigma(t, S_t).dW_t$$

et notons $f_{t,S_t}(T; x)$ la densité de S_T sachant S_t. On a alors l'équation dite de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 \left[\sigma(T, x)^2 .f(T; x)\right]}{\partial x^2} - \frac{\partial\left[\mu(T, x).f(T; x)\right]}{\partial x}$$

sous la condition aux bornes :

$$f_{t,S_t}(t; x) = dirac(x - S_t)$$

4.4 Reformulation de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage

Le détour par le formalisme en temps continu a montré que le modèle de Black et Scholes n'était qu'un modèle parmi d'autres. Deux modèles admissibles diffèrent par leur fonction de volatilité σ. En revanche, **on peut montrer, par hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, que quelle que soit la fonction de volatilité utilisée, la partie ‹‹ en** *dt* **››** (qu'on appelle encore le drift) **est toujours la même**. Plus exactement, **sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, il existe une mesure de probabilité risque-neutre sous laquelle :**

$$dS_t = r.S_t.dt + \sigma(t, S).dW_t \tag{4.5}$$

où $(W_t)_t$ est un mouvement Brownien standard, et :.

$$dS_t = (r - \gamma).S_t.dt + \sigma(t, S).dW_t$$

lorsqu'il y a des dividendes[4].

Le seul degré de liberté concerne donc la fonction de volatilité. Ainsi, on peut considérer des fonctions $\sigma(t, S)$, le modèle de Black et Scholes étant le cas élémentaire où :

$$\sigma(t, S) = \sigma.S$$

La formule dite de Black et Scholes n'a a priori de sens que sous cette hypothèse.

4.5 Analyse et utilisation de la formule de Black et Scholes

A partir de cette formule, on calcule différents ratios dit les **grecques** que les opérateurs utilisent pour couvrir leur position. L'idée est la suivante : un actif dérivé tel qu'une option est évidemment un produit risqué car sa valeur dépend du prix du sous-jacent. L'acheteur ou l'émetteur d'une option peut tout à fait décider d'assumer ce risque et ce pour deux raisons. En premier lieu, il peut s'agir d'un pur spéculateur qui donc fait un pari sur l'avenir comme un joueur dans un casino. En second lieu, cet investisseur peut être une entreprise qui supporte, par ailleurs, un risque opposé : en achetant ou en émettant une option, elle couvre ce risque. Par exemple, une entreprise qui importe des matières premières exprimées en dollar craint une hausse du dollar ; si elle achète des produits dérivés dont le prix est positivement corrélé au dollar, alors elle se couvre globalement.

[4] On peut envisager des modèles encore plus généraux où la fonction de volatilité est elle-même un processus stochastique non réductible à une fonction du temps et du sous-jacent.

Inversement, un acheteur ou un émetteur d'option peut décider de ne pas assumer le risque induit. Par exemple, une banque vend à un de ses clients (par exemple une entreprise) un produit dérivé. Cette banque peut souhaiter recevoir la commission attachée à cette vente (i.e. le prix de ses services) mais ne pas vouloir pour autant supporter le risque qu'elle a engrangé du fait même de l'opération. Elle cherchera alors à se couvrir et le plus simple sera de compléter sa position par des actions sous-jacentes.

En pratique, on reproduit le raisonnemment du chapitre précédent (cas discret) ou des sections précédentes (cas continu) : on peut toujours (au moins en théorie) construire un portefeuille composée d'un actif dérivé et d'une certaine quantité du sous-jacent de telle sorte que ce portefeuille résultant soit (localement) sans risque. Comme on l'a vu, la quantité de sous-jacent doit être égal à $\frac{\partial C}{\partial S}$.

On définit donc le **delta** de l'actif dérivé comme la dérivée du prix de cet actif par rapport au sous-jacent :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

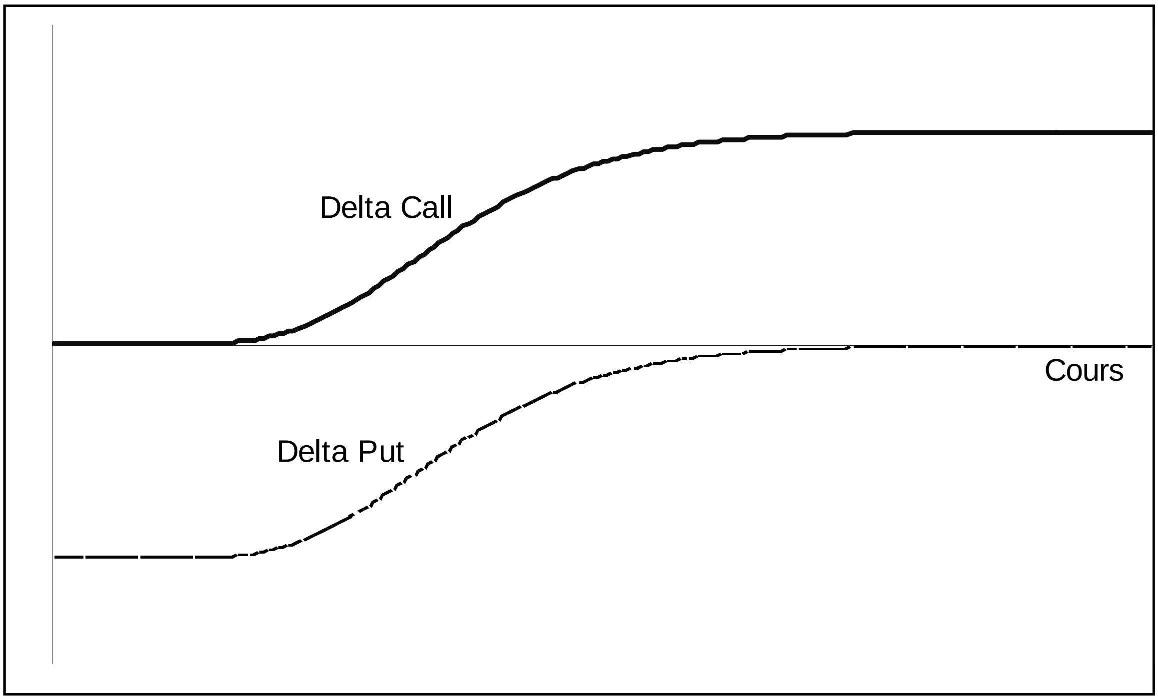
qui donne dans le cadre de la formule de Black et Scholes pour une option d'achat :

$$\Delta = N(d_1) + S.\frac{\partial N\left(d_1\right)}{\partial S} - K.e^{-r(T-t)}.\frac{\partial N\left(d_2\right)}{\partial S} = N(d_1)$$

et :

$$\Delta = N(d_1) - 1 = N(-d_1)$$

pour une option de vente.



Delta en fonction du cours du sous-jacent

Un portefeuille composé d'une unité d'actif dérivé (par exemple une option) et de $-\Delta$ unités de sous-jacent est donc localement sans risque, i.e. le choc dW est éliminé du portefeuille. On dit alors qu'on a un portefeuille **delta-neutre** qui, par absence d'opportunités d'arbitrage, ne doit rapporter que le taux d'intérêt sans risque r. Plus généralement, on peut considérer un portefeuille d'options de différents types (par exemple des prix et des dates d'exercice différents) et calculer le nombre total d'actions qu'il faut acheter ou vendre pour que le delta global soit nul. Si on reprend l'exemple numérique du début du chapitre, le delta vaut $N(d_1) = 0.9497$. Si on émet 100 options, il faut donc être acheteur de 95 actions environ.

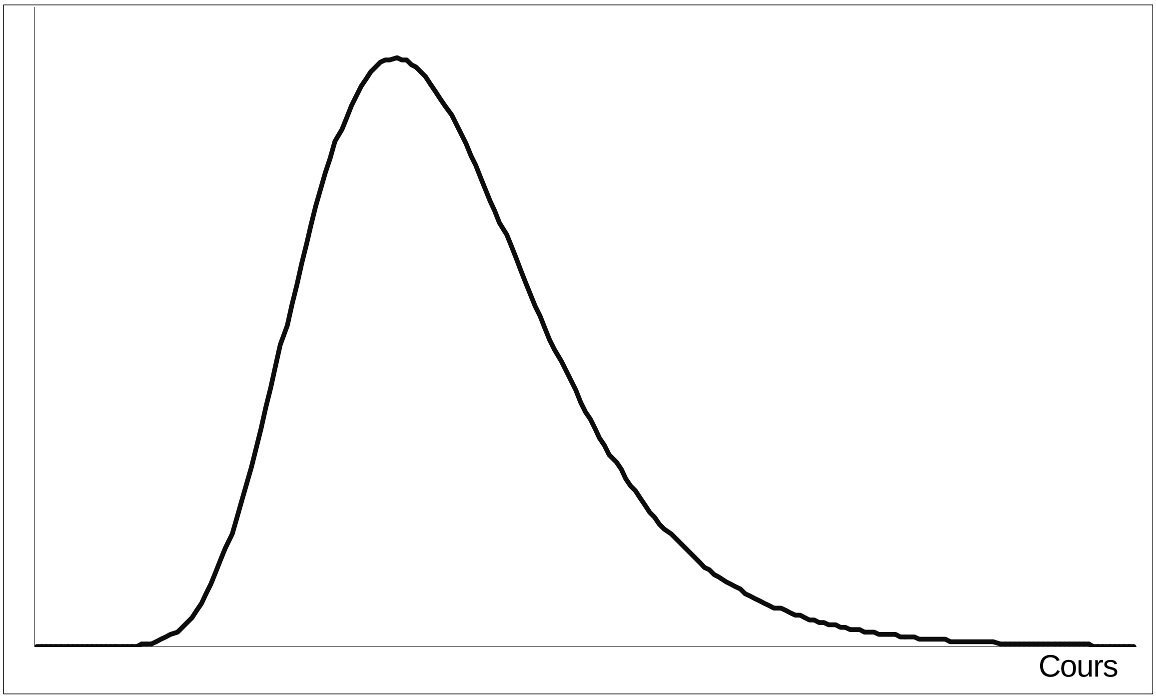
Toutefois, le raisonnement n'a de sens qu'en temps continu. En pratique, une couverture en temps continu n'est pas réalisable et donc ne peut être parfaite. Pour cette raison, les investisseurs évaluent le risque de leurs positions à travers la dérivée d'ordre deux qu'on appelle le **gamma** :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

qui vaut, dans le cadre de la formule de Black et Scholes pour une option d'achat et de vente :

$$\Gamma = \frac{1}{S\sqrt{2\pi\,(T-t)}\sigma}.e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

et qui est donc positif. Le gamma mesure également la sensibilité du delta à des mouvements du cours du sous-jacent : il indique donc l'amplitude et la fréquence du recalage de la couverture. Si par exemple le gamma est proche de zéro, le delta varie peu et la couverture en delta n'a pas besoin d'être modifiée. A l'inverse, si le gamma est élevé, il faut souvent et significativement re-considérer le nombre d'actions en portefeuille si on veut conserver une couverture delta-neutre.



Gamma en fonction du cours du sous-jacent

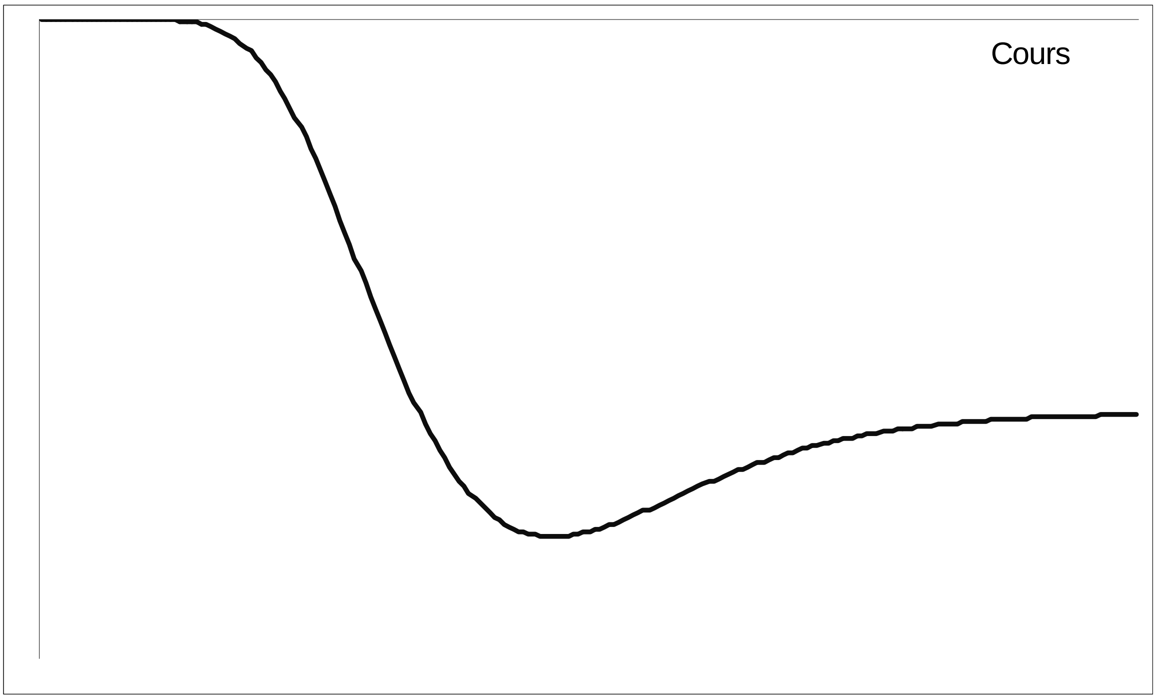
On définit également le **theta** comme la dérivée partielle du prix de l'actif par rapport au temps :

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}$$

qui vaut, dans le modèle de Black et Scholes :

$$\Theta = r.C - r.S.\Delta - \frac{1}{2}\Gamma.\sigma^2.S^2$$

Cette formule se déduit immédiatement de l'équation aux dérivées partielles de la section précédente. Le theta mesure de combien le prix de l'option diminue par le seul passage du temps.



Theta d'un call en fonction du cours du sous-jacent

Imaginons un portefeuille delta-neutre égal à $V_t = C_t - \Delta.S_t$. Entre t et $t + \delta t$, la valeur du portefeuille varie de :

$$\delta V \simeq \left(\Theta.\delta t + \frac{1}{2}\Gamma.\left(\delta S\right)^2\right)$$

Si les mouvements du sous-jacent sont suffisamment importants (dans un sens ou dans un autre), la valeur du portefeuille delta-neutre augmente. Dans le cas contraire, l'effet dû à l'écoulement du temps domine et le portefeuille voit sa valeur décroître.

Les ratios delta, gamma et theta[5] permettent de connaître les effets des variations du sous-jacent et du passage du temps. Il faut remarquer toutefois que la valeur de ces ratios dépend crucialement du modèle choisi. Il existe donc un risque de modèle. Ce risque est lié au fait que le modèle choisi (ici le modèle de Black et Scholes) n'est peut-être pas le ‹‹ bon ›› modèle. Utiliser un mauvais modèle est un des risques majeurs supportés par les opérateurs qui interviennent sur les marchés de produits dérivés. En effet, dans ce cas, les ratios de couverture seront biaisés et donc une position supposée être delta-neutre (donc plus ou moins insensible aux mouvements du sous-jacent) ne le sera en fait pas, ce qui évidemment est dangereux. En outre, on conçoit aisément que, tant qu'on ne connaît pas le ‹‹ vrai ›› modèle (et c'est toujours le cas), il est difficile de mesurer l'exposition à ce risque.

Dans le cas du modèle de Black et Scholes, dire que ce n'est pas un bon modèle revient à dire que l'hypothèse de volatilité constante n'est pas correcte. La **volatilité implicite** (implied volatility) est une façon de mettre en évidence ce fait. La volatilité implicite correspond au paramètre σ qu'il faudrait mettre dans la formule de Black et Scholes pour retrouver le prix de l'option réellement observé sur le marché. Elle est donc calculée (pour une option d'achat standard) comme la valeur σ_{imp} solution de l'équation :

$$C_t \text{ observé} = S_t.N(d_1) - K.e^{-r.(T-t)}.N(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma_{imp}\sqrt{T-t}}.Ln\ \left(\frac{S_t}{K.e^{-rT-t)}}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{imp}\sqrt{T-t}$$

[5] On définit également le rho comme la dérivée par rapport au taux d'intérêt r.

et :

$$d_2 = \frac{1}{\sigma_{imp}\sqrt{T-t}}.Ln\left(\frac{S_t}{K.e^{-rT-t)}}\right) - \frac{1}{2}\sigma_{imp}\sqrt{T-t}$$

Si le modèle de Black et Scholes était le ‹‹ bon ›› modèle, alors on devrait observer que les volatilités implicites calculées sur toutes les options d'achat d'un même sous-jacent sont égales. Autrement dit, on devrait observer :

$$\sigma_{imp}(K, T-t) = \text{ constante}$$

Or, empiriquement, ce n'est pas le cas : deux options de même sous-jacent, de maturité ou de prix d'exercice différents ont des volatilités implicites différentes : le **smile de volatilité** est la fonction qui donne la volatilité implicite en fonction du prix d'exercice $\sigma_{imp}(., T-t)$et on appelle nappe de volatilité la surface $\sigma_{imp}(., .)$. On constate de plus que la nappe de volatilité se déforme au cours du temps de façon aléatoire.

Pour rendre compte de ces faits empiriques, il faut envisager des modèles plus sophistiquées où la fonction de volatilité σ n'est plus constante. Dans ce cas généralement, tous les résultats de log-normalité disparaissent et les questions d'évaluation et de couverture deviennent nettement plus complexes. Les opérateurs font un compromis en utilisant quand même le modèle de Black et Scholes mais en calculant le **vega** qui est la dérivée du prix par rapport au paramètre de volatilité :

$$vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

Dans le cadre strict du modèle de Black et Scholes, cela n'a pas de sens de calculer ce ratio car σ est supposé être un paramètre fixe, à l'inverse du temps ou du sous-jacent. Cela en a un si on considère que ce modèle est le bon modèle ‹‹ au premier ordre ››.

5

Extensions et applications du modèle de Black et Scholes

5.1 Introduction

Le modèle de Black et Scholes désigne, comme précédemment, le modèle où le prix du sous-jacent suit, sous la probabilité risque-neutre, une équation différentielle stochastique dans laquelle la volatilité est constante. Sous cette spécification, on a vu que le logarithme du prix du sous-jacent était gaussien, ce qui permettait de faire aisément des calculs de prix d'option standards d'achat ou de vente.

Ici, nous restons dans le cadre de ce modèle mais nous nous intéressons à des exemples d'options non standards. En premier lieu, nous examinons certaines options pour lesquelles on peut encore faire des calculs de prix explicites (options à barrière, options digitales) puis, dans un second, temps, des options qui n'ont pas de formule de valorisation explicite même dans un modèle aussi simple que celui de Black et Scholes (options américaines).

5.2 Prise en compte des dividendes

Jusqu'à maintenant, les dividendes ont été négligées. Si on reprend les calculs des chapitres précédents, les dividendes peuvent s'introduire à travers un taux de dividende γ tel que la dynamique du sous-jacent s'écrive sous probabilité risque-neutre de la façon suivante :

$$dS_t = (r - \gamma)\,.S_t.dt + \sigma.S_t.dW_t$$

Ainsi, la loi de $Ln\ S_T$ conditionnellement à S_t s'écrit :

$$Ln\ S_T \text{ (contionnellement à } S_t) \rightsquigarrow N\left(\left(r - \gamma - \frac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\ ;\ \sigma^2.(T-t)\right)$$

Il est alors facile de reprendre les calculs précédents pour obtenir le prix théorique d'un call standard :

$$C_t = S_t.e^{-\gamma(T-t)}.N(d_1) - K.e^{-r.(T-t)}.N(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.Ln\ \left(\frac{S_t}{K.e^{-(r-\gamma).(T-t)}}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

et :

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.Ln\ \left(\frac{S_t}{K.e^{-(r-\gamma).(T-t)}}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

Ceci n'a de sens que si les dividendes sont versées continûment ou quasi-continûment. En pratique, ce n'est pas le cas pour une action, ses dividendes étant versées à des dates discrètes (trimestre, semestre, année).

Pour tenir compte de ce caractère discret, on peut introduire la quantité :

$$D_{t,u} = div_t.e^{r(u-t)} + div_{t+1}.e^{r(u-t-1)} + ... + div_u$$

c'est-à-dire la somme capitalisée des dividendes versés entre les dates t et u. On suppose que les dividendes futurs sont connus aujourd'hui. Il s'agit évidemment d'une hypothèse forte : en pratique, on considérera par exemple que les dividendes futurs sont égaux au dernier dividende connu multiplié par un taux de progression ad-hoc. La variable $S_T + D_{t,T}$ représente la somme totale acquise en T par l'investisseur qui a acheté une action en t. Ainsi, la variable :

$$Y_{t,T} = \frac{S_T + D_{t,T}}{S_t}$$

mesure le rendement total de l'opération qui consiste à acheter l'action en date t, capitaliser les dividendes reçus entre t et T, et revendre l'action en T. Si le monde était déterministe, ce rendement serait égal à $e^{r(T-t)}$. On peut alors étendre le modèle de Black et Scholes en supposant que :

$$dY_{t,u} = rY_{t,u}.du + \sigma.Y_{t,u}.dW_u$$

On peut alors appliquer la formule de Black et Scholes sans dividende en remarquant que :

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r(T-t)}.E_t\left[S_T - K\right]^+ \\ &= e^{-r(T-t)}.E_t\left[S_t.Y_{t,T} - (K + D_{t,T})\right]^+ \\ &= S_t.N(d_1) - (K + D_{t,T}).e^{-r(T-t)}.N(d_2) \end{aligned}$$

avec :

$$d_{1/2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.Ln\left(\frac{S_t}{(K + D_{t,T}).e^{-rT-t)}}\right) + / - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

5.3 Taux d'intérêt et volatilité dépendantes du temps

Dans le souci de simplifier, nous avons supposé que le taux d'intérêt était une constante r, ce qui est assez éloigné de la réalité. Les taux d'intérêt varient de façon stochastique comme les prix d'actions. Les raisonnements qui découlent du modèle binomial doivent être substantiellement modifiés dès lors qu'on autorise les taux d'intérêt à être eux-mêmes des variables aléatoires, surtout si ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes des prix d'action. Intuitivement, on ne peut pas, dans ce cas, ‹‹ sortir ›› le terme d'actualisation (i.e. l'équivalent de $e^{-r(T-t)}$) de l'espérance conditionnelle (en tout cas pas aussi facilement).

En revanche, si on suppose que les taux d'intérêt ne sont pas stochastiques mais sont néanmoins des fonctions (déterministes) du temps, l'hypothèse de log-normalité tient toujours tant que la volatilité est constante. On peut donc supposer que le taux court r dépend du temps (de façon déterministe) et la formule de Black et Scholes habituelle est conservée à condition de remplacer le terme d'actualisation $e^{-r(T-t)}$ par le discount factor, c'est-à-dire le prix d'un zéo-coupon d'échéance T, soit $B(t,T)$.

On a à peu près le même genre de résultat sur la volatilité. A priori, rien n'empêche de considérer que la volatilité varie de façon aléatoire. Bien au contraire, les travaux d'économétrie financière montrent sans grande ambiguïté que les volatilités se comportent comme des processus aléatoires corrélés en particulier au prix du sous-jacent. Toutefois, comme pour les taux d'intérêt, prendre des volatilités stochastiques change radicalement le modèle et il est alors impossible de garder l'hypothèse de log-normalité des prix. En revanche, le modèle de Black et Scholes peut être étendu au cas où les volatilités dépendent de façon déterministe du temps. Dans ce cas, il est facile de voir qu'il convient de remplacer le terme $\sigma\sqrt{T-t}$ par $\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s).ds}$ (qui est bien cohérent avec $\sigma\sqrt{T-t}$ lorsque $\sigma^2(s) = \sigma^2$).

5.4 Options digitales

Les options **digitales** ou encore **binaires** désignent des options qui génèrent un flux fixe connue à l'avance (par exemple 1 euro) si le sous-jacent est passé au-dessus d'un prix d'exercice. Concrètement, le flux d'un call s'écrit :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et le flux contraire pour un put. Le prix théorique d'une telle option est facile à calculer. On peut utiliser par exemple la formule d'évaluation qui donne le prix comme espérance du flux futur :

$$C_t = e^{-r(T-t)}.E_t\left[1\left(S_T > K\right)\right]$$

avec la spécification du modèle de Black et Scholes. En supposant qu'il n'y a pas de dividende, $Ln\ S_T$ suit une loi gaussienne conditionnellement à S_t (et sous la mesure risque-neutre) :

$$Ln\ S_T \text{ (contionnellement à } S_t) \rightsquigarrow N\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\ ;\ \sigma^2.(T-t)\right)$$

Ceci implique donc que le prix théorique du call digital s'écrit :

$$C_t = e^{-r(T-t)}.N(d_2)$$

avec toujours :

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.Ln\left(\frac{S_t}{K.e^{-rT-t)}}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

Les grecques (delta, gamma) sont également faciles à calculer pour un call binaire :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \tfrac{e^{-r(T-t)}.N'(d_2)}{\sigma S_t\sqrt{T-t}} \\
\Gamma &= -\tfrac{e^{-r(T-t)}.d_1.N^{'}(d_2)}{\sigma^2 S_t^2(T-t)} \\
Vega &= -e^{-r(T-t)}.d_1.\sigma.N^{'}(d_2) \\
\Theta &= r.C_t - r.S_t.\Delta - \tfrac{1}{2}\sigma^2.S_t^2.\Gamma
\end{aligned}$$

et pour un put binaire :

$$\begin{aligned}
\Delta &= -\tfrac{e^{-r(T-t)}.N'(d_2)}{\sigma S_t\sqrt{T-t}} \\
\Gamma &= \tfrac{e^{-r(T-t)}.d_1.N^{'}(d_2)}{\sigma^2 S_t^2(T-t)} \\
Vega &= -e^{-r(T-t)}.d_1.\sigma.N^{'}(d_2) \\
\Theta &= r.C_t - r.S_t.\Delta - \tfrac{1}{2}\sigma^2.S_t^2.\Gamma
\end{aligned}$$

où :

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Contrairement aux valeurs de l'option standard, les grecques divergent quand $t \to T$ et quand S_T est proche de K, ce qui est logique dans la mesure où le flux final est discontinu en le sous-jacent au voisinnage de K.

Concrètement, cela implique qu'il est difficile de construire un portefeuille delta-neutre à mesure qu'on s'approche de la maturité, en particulier si le cours du sous-jacent varie aux alentours du prix d'exercice K. Les fortes variations du delta implique que l'investisseur doit être alternativement acheteur et vendeur d'une grande quantité du sous-jacent pour garder une position delta-neutre, ce qui est à la fois coûteux et potentiellement risqué car très sensible à de petites erreurs.

S'agissant du gamma, celui-ci n'a pas un signe constant et peut prendre des valeurs soit négatives, soit positives, selon le signe de d_1. Le gamma est négatif lorsque :

$$S_t > K.e^{-r(T-t)}.e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

et donc une position delta-neutre est très exposée à un fort mouvement du sous-jacent. Dans le cas inverse, i.e. quand le sous-jacent est très en-deça du prix d'exercice, alors le gamma est positif et la position delta-neutre bénéficie des mouvements importants du sous-jacent.

Le vega n'a pas non plus de signe constant.

Enfin, il faut noter que les problèmes de couverture de ces options - problème qui est lié à la non continuité du flux final - peuvent être en partie contournés en remarquant qu'une option digitale peut être approchée par des options standards. Plus précisément, on a :

$$1\left(S_T > K\right) \simeq -\frac{\left(S_T - (K + dK)\right)^+ - \left(S_T - K\right)^+}{dK}$$

pour dK petit, ce qui revient à dire gross-modo que la dérivée (au sens des distributions) de la fonction x^+ est égale à la fonction de Heaviside $1\left(x\right)$. Par conséquent, acheter une option digitale revient à acheter et vendre simultanément deux calls standards de prix d'exercice voisins (en quantité $\frac{1}{dK}$). Il est donc envisageable de couvrir une option digitale par deux options standards et non par l'achat ou la vente du sous-jacent. On parle alors de réplication statique (ou couverture statique).

5.5 Options barrières

5.5.1 Définitions

Les options barrières désignent une classe assez vaste de produits dont les calculs de prix sont très similaires. Il s'agit de produits dérivés dont les flux dépendent du fait que le sous-jacent a atteint, dépassé, franchi une ou une plusieurs valeurs données (appelées barrières) pendant la durée de vie de l'option. On distingue ainsi :

- les options knock-out (KO) sont des options qui expirent dès que le sous-jacent atteint une limite donnée ;
- les options knock-in (KI) sont des options qui deviennent actives dès que le sous-jacent atteint une limite donnée.

Par ailleurs, l'option est dite ‹‹ up ›› si la limite est supérieure à la valeur initiale du sous-jacent et ‹‹ down ›› dans le cas contraire. En croisant ‹‹ up / down ›› et ‹‹ in / out ››, on obtient par exemple l'option suivante :

Down-and-out call de prix d'exercice K, de barrière H, de date d'échéance $T =$
option d'acheter le sous-jacent au prix K en T à condition que le sous-jacent ne passe jamais en dessous de H (entre aujourd'hui et la date T).

On définit de même les options **up-and-out, down-and-in et up-and-in**. Mathématiquement, le flux d'une option down-and-out call en T s'écrit :

$$\left(S_T - K\right)^+ .1\left(\tau > T\right)$$

où τ est la date à laquelle la barrière est atteinte :

$$\tau = Min\left\{t,\ 0 \leq t \leq T \text{ tel que } S_t \leq H\right\}$$

c'est-à-dire le premier instant où le sous-jacent passe en dessous de la barrière. On peut aussi remarquer que :

$$\tau > T \Longleftrightarrow \underset{0 \leq t \leq T}{Min} \quad S_t \geq H$$

5.5.2 *Calcul du prix*

Si on s'intéresse à l'option d'achat down-and-out, le prix s'exprime, comme d'habitude, par :

$$C_t = e^{-r(T-t)}.E_t\left[(S_T - K)^+ .1\,(\tau > T)\right]$$

On voit tout de suite qu'il faut connaître la loi jointe de (S_T, τ). Dans le modèle de Black et Scholes, on sait écrire explicitement la densité de ce couple de variables aléatoires. Il s'agit d'un résultat classique de la théorie de mouvement Brownien :

Proposition 4 *Soit $Z_t = \mu.t + W_t$ où μ est une constante réelle et $(W_t)_t$ un mouvement Brownien standard, alors :*

$$\Pr ob\left(\begin{array}{c} Max \\ 0 \leq t \leq T \end{array} \quad Z_t \quad \geq H \ et\ Z_T \in (z, z+dz)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}.e^{-\frac{(2H-z)^2}{2T}}.e^{z.\mu - \frac{1}{2}\mu^2.T}.dz$$

On peut alors calculer les prix des différentes options à barrière. Les calculs sont un peu fastidieux mais ne présentent pas de difficulté particulière si on remarque que, par symétrie du mouvement Brownien, $(\mu.t + W_t)_t$ et $(\mu.t - W_t)_t$ ont les mêmes lois. De même, $(-\mu.t + W_t)_t$ et $(-\mu.t - W_t)_t$ ont les mêmes lois, ce qui permet de généraliser la proposition précédente avec $Min\ Z_t$ et donc de mener à bien tous les calculs. Au total, on trouve :

– Up-and-out call :

$$C_t = S_t.\left[N(d_1) - N(d_3) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}.(N(d_6) - N(d_8))\right]$$

$$-K.e^{-r(T-t)}.\left[N(d_2) - N(d_4) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{-1+\frac{2r}{\sigma^2}}.(N(d_5) - N(d_7))\right]$$

– Down-and-out call $(K > H)$:

$$C_t = S_t.\left[N(d_1) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}.(1 - N(d_8))\right]$$

$$-K.e^{-r(T-t)}.\left[N(d_2) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{-1+\frac{2r}{\sigma^2}}.(1 - N(d_7))\right]$$

– Down-and-out call $(K < H)$:

$$C_t = S_t.\left[N(d_3) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}.(1 - N(d_6))\right]$$

$$-K.e^{-r(T-t)}.\left[N(d_4) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{-1+\frac{2r}{\sigma^2}}.(1 - N(d_5))\right]$$

– Up-and-out put $(K > H)$:

$$C_t = K.e^{-r(T-t)}.\left[1 - N(d_2) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{-1+\frac{2r}{\sigma^2}}.(N(d_7) - N(d_5))\right]$$

$$-S_t.\left[1 - N(d_1) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}.N(d_8)\right]$$

– Up-and-out put $(K < H)$:

$$C_t = K.e^{-r(T-t)}.\left[1 - N(d_4) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{-1+\frac{2r}{\sigma^2}}.N(d_7)\right]$$

$$-S_t.\left[1 - N(d_3) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}.N(d_6)\right]$$

– Down-and-out put :

$$C_t = K.e^{-r(T-t)}.\left[N\left(d_4\right) - N(d_2) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{-1+\frac{2r}{\sigma^2}}.\left(N(d_7) - N\left(d_5\right)\right)\right]$$

$$-S_t.\left[N\left(d_3\right) - N(d_1) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}.\left(N\left(d_8\right) - N\left(d_6\right)\right)\right]$$

avec :

$$\begin{aligned}
d_1 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.\left[Ln\ \left(\tfrac{S_t}{K}\right) + \left(r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right] \\
d_2 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.\left[Ln\ \left(\tfrac{S_t}{K}\right) + \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right] \\
d_3 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.\left[Ln\ \left(\tfrac{S_t}{H}\right) + \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right] \\
d_4 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.\left[Ln\ \left(\tfrac{S_t}{H}\right) + \left(r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right] \\
d_5 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.\left[Ln\ \left(\tfrac{S_t}{H}\right) - \left(r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right] \\
d_6 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.\left[Ln\ \left(\tfrac{S_t}{H}\right) - \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right] \\
d_7 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.\left[Ln\ \left(\tfrac{S_t.K}{H^2}\right) - \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right] \\
d_8 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.\left[Ln\ \left(\tfrac{S_t.K}{H^2}\right) - \left(r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right]
\end{aligned}$$

Les relations de parité in / out permettent de calculer les prix des options *-and-in à partir des prix des options *-and-out. En effet, le flux terminal d'une option d'achat down-and-out s'écrit :

$$\left(S_T - K\right)^+.1\left(\tau > T\right)$$

alors que celui d'une option down-and-in s'écrit (de même prix d'exercice, de même barraière, de même date d'exercice) s'écrit :

$$\left(S_T - K\right)^+.1\left(\tau < T\right)$$

Par conséquent, la somme de ces deux options génère un flux :

$$\left(S_T - K\right)^+$$

c'est-à-dire le flux de l'option d'achat standard. On en déduit donc que le prix d'une option d'achat *-and-in se déduit du prix de l'option d'achat de même caractéristique *-and-out et du prix d'une option d'achat standard.

Enfin, concernant les grecques, il faut remarquer que - assez logiquement - le delta est discontinu (et donc le gamma diverge) quand S_t est proche de la barrière H. Concrètement, cela implique qu'il est difficile de construire un portefeuille delta-neutre au voisinnage de la barrière. Comme pour les options digitales, on peut envisager une couverture statique à base d'options standards.

5.5.3 Autres options barrières

Sans entrer dans le détail, il existe d'autres options du même type, notamment les options double-barrières. Dans ce cas, le détenteur de l'option recevra un certain flux si le sous-jacent est resté dans une bande donnée (un barrière-plafond et une barrière-plancher) pendant une période de temps donnée, ou alors recevra une certaine somme chaque jour où le sous-jacent fluctue dans cette bande etc.

5.6 Options lookback

Les options looback utilisent les mêmes résultats mathématiques que les options barrières. Il s'agit d'options dépendant du maximum atteint par le cours du sous-jacent pendant une certaine période. Si M_t et m_t désignent :

$$M_t = \underset{0 \leq u \leq t}{Max} \quad S_u$$

et :

$$m_t = \underset{0 \leq u \leq t}{Min} \quad S_u$$

on peut définir plusieurs types d'options lookback à partir des flux :

$$S_T - m_T$$

ou :

$$M_T - S_T$$

ou encore :

$$\max\left(M_T - K, 0\right)$$

Le calcul des prix se fait à partir des densités données précédemment. On obtient par exemple :

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r(T-t)}.E_t\left[S_T - m_T\right] \\ &= S_t.N(d_1) - m_t.e^{-r(T-t)}.N(d_2) \\ &\quad +S_t.\tfrac{\sigma^2}{2r}.\left[-N\left(-d_1\right) + e^{-r(T-t)}.\left(\tfrac{m_t}{S_t}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}.N\left(-d_1 + \tfrac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} d_1 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.\left[Ln\left(\tfrac{S_t}{m_t}\right) + \left(r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right] \\ d_2 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.\left[Ln\left(\tfrac{S_t}{m_t}\right) + \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r(T-t)}.E_t\left[M_T - S_T\right] \\ &= -S_t.N(-d_1) + M_t.e^{-r(T-t)}.N(-d_2) \\ &\quad +S_t.\tfrac{\sigma^2}{2r}.\left[N\left(d_1\right) - e^{-r(T-t)}.\left(\tfrac{M_t}{S_t}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}.N\left(d_2 - \tfrac{2r\sqrt{T-t}}{\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} d_1 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.\left[Ln\left(\tfrac{S_t}{M_t}\right) + \left(r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right] \\ d_2 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}.\left[Ln\left(\tfrac{S_t}{M_t}\right) + \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right] \end{aligned}$$

5.7 Autres options

L'imagination des marchés étant sans limite, il existe bien d'autres actifs optionnels que nous n'abordons pas ici. On peut citer :

– les options asiatiques qui délivrent l'écart - s'il est positif - entre le cours moyen du sous-jacent et un prix d'exercice, soit un flux du type :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} - K\right)^+$$

où les t_i sont les dates sur lesquelles est fait le calcul de la moyenne des cours. Il faut remarquer que la difficulté essentielle de ces options est d'ordre mathématique : les variables $\left(S_{t_i}\right)_i$ sont log-normales (dans le modèle de Black et Scholes) alors que la log-normalité n'est pas conservée par sommation. En clair, la moyenne arithmétique des cours du sous-jacent n'est pas log-normale mais a au contraire une densité qu'il n'est pas possible d'expliciter. Il existe toutefois des formules quasi-explicites - au prix de calculs très lourds - pour ces options. En revanche, si on retient une moyenne géométrique plutôt qu'arithmétique, les calculs sont quasi-immédiats.

– les options sur panier (basket option) sont des options qui délivrent l'écart - s'il est positif - entre la moyenne des prix d'un ensemble de sous-jacents (au jour de l'exercice) et un prix d'exercice, soit un flux :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i S_T^i - K\right)^+$$

où les $\left(S_T^i\right)_i$ sont les cours des différents sous-jacents qui composent le panier et $\left(\omega_i\right)_i$ les poids associés à chacun de ces sous-jacents dans le calcul du flux de l'option. Ici aussi, la loi de $\sum_{i=1}^{n} \omega_i S_T^i$ n'a pas de forme explicite.

5.8 Options américaines

Les options considérées jusqu'à maintenant sont de nature européenne, i.e. dont l'exercice n'est possible qu'à une certaine date fixe T. L'option est américaine lorsque l'exercice peut se faire à tout moment à l'initiative du détenteur de l'option. La question essentielle est donc de déterminer à quel moment et sous quelles conditions le détenteur de l'option a un intérêt à exercer son option. Nous ne rentrons pas dans les détails car la théorie sous-jacente est complexe.

En gros, le prix de l'option américaine (option d'achat standard) s'écrira :

$$C_t^{am} = \sup_{0 \leq \tau \leq T} E_t\left[e^{-r(\tau-t)}.\left(S_\tau - K\right)^+\right]$$

où le sup est pris sur tous les temps d'arrêt. Un temps d'arrêt est une fonction à valeur dans $[0, T]$ telle que l'événement $\tau = t$ est fonction de $\left(S_u\right)_{u \leq t}$. En clair, on s'intéresse au cas où le détenteur de l'option ne peut exercer qu'en fonction des valeurs passées et courantes du sous-jacent et pas des valeurs futures (ce qui paraît logique) ni des valeurs d'autres variables.

Le prix de l'option américaine est par construction toujours supérieur ou égal au prix de l'option européenne : il est toujours plus intéressant d'avoir une option exerçable à tout moment plutôt qu'une option exerçable à une seule date précise. Néanmoins, dans certains cas, les deux prix - américain et européen - coïncident. Il y a égalité des deux prix si, à tout moment, le détenteur de l'option a intérêt à attendre plutôt qu'à exercer :

– option d'achat sans dividende. Le prix de l'option européenne vérifie :

$$E_t\left[e^{-r(T-t)}.\left(S_T - K\right)^+\right] \geq S_t - K$$

En effet, $x^+ \geq x$ et donc :

$$E_t\left[e^{-r(T-t)}.\left(S_T - K\right)^+\right] \geq E_t\left[e^{-r(T-t)}.S_T\right] - K.e^{-r(T-t)}$$

Or, $E_t\left[e^{-r(\tau-t)}.S_T\right] = S_t$, d'où :

$$E_t\left[e^{-r(T-t)}.\left(S_T - K\right)^+\right] \geq S_t - K.e^{-r(T-t)} > S_t - K$$

car $r > 0$. La valeur de l'option américaine est, à chaque instant t, supérieure à la valeur de l'option européenne, elle-même supérieure à la valeur $S_t - K$, c'est-à-dire à la valeur reçue si on décide d'exercer en t. Par conséquent, le détenteur de l'option - s'il est rationnel - préfère toujours attendre et donc n'exerce qu'en T : options américaine et européenne sont équivalentes. Il est facile de voir que ce raisonnement ne tient plus dès qu'il existe un taux de dividende non nul (et positif) : le prix de l'option américaine est alors strictement supérieur au prix de l'option européenne.

– option de vente. Dans ce cas, qu'il y ait ou non des dividendes, le prix de l'option américaine est strictement supérieur au prix de l'option européenne.

Il existe, comme pour les options européennes, une vision analytique du prix à partir d'une équation aux dérivées partielles. Le prix de l'option américaine est la solution du programme suivant (dans le modèle de Black et Scholes) :

$$\frac{\partial C^{am}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C^{am}}{\partial S^2}\sigma^2.S^2 + r.S.\frac{\partial C^{am}}{\partial S} - r.C^{am} \leq 0 \tag{5.1}$$

sous les contraintes :

$$C^{am}(t, S_t) \geq flux(t, S_t) \text{ pour tout } t \leq T$$

$$C^{am}(T, S_T) = flux(T, S_T)$$

où $flux(t, S_t)$ est le flux en cas d'exercice, donc par exemple $(S_t - K)^+$ pour une option d'achat standard. De plus, il y a égalité dans l'équation (5.1) si la contrainte $C^{am}(t, S_t) > flux(t, S_t)$ est stricte. En clair, tant que l'exercice n'est pas intéressant (i.e. $C^{am}(t, S_t) > flux(t, S_t)$) le prix suit l'équation aux dérivées partielles habituelle.

En particulier, on voit que dans le cas de l'option d'achat sans dividende, la fonction $C^{eur}(t, S_t)$ donnant le prix de l'option d'achat européenne vérifie ce programme et, par unicité de la solution, on retrouve que les deux prix coïncident. Plus généralement, les deux prix sont égaux dès que le prix de l'option européenne vérifie la contrainte :

$$C^{eur}(t, S_t) \geq flux(t, S_t) \text{ pour tout } t \leq T$$

6

Prix zéro-coupon, taux d'intérêt, prix Forward, prix Futures : notations et concepts.

6.1 Généralités

Ce chapitre a pour but essentiel de préciser les bases de mathématiques financières indispensables à la bonne compréhension des modèles de structure des taux : taux zéro-coupon, taux à terme, notion d'actualisation, ...

Toutes les opérations financières peuvent s'analyser comme des échanges intertemporels de richesse. Un emprunt aujourd'hui est en fait une vente de euros futurs ; le produit de cette vente constitue le capital emprunté et l'échéancier de remboursements de cet emprunt représente le "bien" vendu. Les opérations de prêt s'analysent de façon symétrique. L'achat et la vente d'un titre d'obligation peuvent de la même façon se représenter comme des échanges entre euros d'aujourd'hui et euros futurs.

Tout revient donc à évaluer le prix, exprimé en euros d'aujourd'hui, d'1 euro livré à une date future, et à modéliser comment ce prix va varier au cours du temps. Pour toutes sortes de raison, la valeur aujourd'hui d'1 euro futur n'est pas égale à 1 euro :
- un individu n'accorde pas la même utilité au versement immédiat d'1 euro ou au versement futur (même certain) d'1 euro. En effet un pouvoir d'achat d'1 euro aujourd'hui permet de disposer de biens physiques dès aujourd'hui.
- le versement futur lui-même peut être assorti d'un risque dans la mesure où, par exemple, il peut être conditionnel à la réalisation d'un événement : absence de faillite, absence de versement retardé ou anticipé...

L'objet d'un cours de mathématiques financières est de se se concentrer d'abord sur la première cause énoncée ci-dessus, c'est-à-dire à l'effet temps, puis de voir dans quelle mesure on peut intégrer l'effet risque. Il est clair que cette seconde cause nécessite un cadre plus large puisqu'elle implique la modélisation du risque lui-même : recherche des causes économiques du risque, modélisation économétrique de la défaillance, du remboursement anticipé...

Le but de ces notes est alors d'introduire trois problèmes fondamentaux et d'esquisser les solutions proposées pour les résoudre. Ces 3 problèmes sont :
- évaluer les prix aujourd'hui des euros futurs. De façon équivalente, il s'agit de déduire des prix d'obligations constatés sur le marché une structure des prix zéro-coupon. Ce problème, lorsqu'il peut être résolu doit permettre de donner un prix théorique à chaque obligation ;
- comprendre la dynamique des prix zéro-coupon, rechercher les facteurs communs aux variations de prix afin d'élaborer des stratégies de couverture ;
- enfin il est nécessaire de pouvoir donner un prix à des actifs complexes tels les options, les contrats à terme... pour lesquels les flux générés sont aléatoires et dépendent de la structure des taux (et ses évolutions).

6.2 Opérations au comptant

Nous nous intéressons ici aux opérations au comptant, c'est-à-dire celles qui sont associées à une livraison immédiate de titres. Nous distinguerons les notations du temps discret et du temps continu lorsqu'elles diffèrent l'une de l'autre. Bien que les modèles d'évaluation d'actifs financiers se placent d'emblée dans un cadre continu, il est souhaitable toutefois de bien comprendre les différents concepts lorsque le temps est supposé discret. On commence par intoduire les titres nommés titres zéro-coupon.

6.2.1 Définitions

Définition 3 *Un zéro-coupon d'échéance T est un titre qui donne droit à 1 euro à la date T.*

Ces actifs apparaissent naturellement à la lecture de l'introduction de ce chapitre où les opérations financières ne sont que des échanges intertemporels de richesse. Les zéro-coupons constituent en quelque sorte une base canonique (au sens algébrique) de l'espace des actifs à revenus fixes (i.e : les actifs tels que les obligations, dont les flux futurs sont non aléatoires). Malheureusement, même si d'un point de vue conceptuel ils paraîtront vite indispensables, en pratique il en existe rarement. Cependant depuis mai 1991, le Trésor français a autorisé le démembrement des Obligations Assimilables du Trésor (O.A.T).[1] Le principe du démembrement est de créer, à partir d'une obligation classique à coupon, autant de titres qu'il y a de coupons (plus un titre correspondant au versement *in-fine* du capital), ces titres étant alors identifiables directement à des titres zéro-coupon. Toutefois à ce jour, le marché n'est pas encore suffisamment liquide pour avoir pleine confiance dans ces prix zéro-coupon.

Définition 4 *Le facteur d'actualisation à la date t pour la date T est le prix d'un zéro-coupon de la date t d'échéance T. Il sera noté $B(t,T)$. La courbe d'actualisation est la courbe :*

$$T-t \longrightarrow B(t,T)$$

Il est important de se fixer une bonne fois pour toute des notations, sachant que les différents articles parus dans la littérature ont introduit des notations assez incohérentes entre elles. Ici t et T sont des dates ; en particulier T est une date d'échéance et non une maturité (i.e : une durée).

Il reste à montrer que ces prix zéro-coupon peuvent être définis sans ambiguïté dans la mesure où ce ne sont pas des prix de titres existant sur le marché. Cette démonstration repose sur les deux notions de base de la finance : complétude des marchés et absence d'opportunité d'arbitrage.

6.2.2 Justifications théoriques dans le cas discret

On se place sur un marché de titres à revenus fixes sur les dates $0, 1 ... T$, et on suppose disposer d'un ensemble de n titres générant les flux suivants :

$$a_1^{(k)} \ , \ \dots \ , \ a_T^{(k)}$$

Rappelons que ces flux sont non aléatoires et connus à la date 0. Nous allons exposer les conditions qui permettent de définir sans ambiguïté les différents prix :

$$B(0,t), \quad t = 1, ..., T$$

Notons enfin M (dite matrice de marché) dont les colonnes donnent les flux générés par les différents titres existant :

$$M = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_T^{(1)} & \dots & a_T^{(n)} \end{bmatrix}$$

[1] Initialement, il s'agissait de l'O.A.T 8,5 % 2019. Plus récemment, les OAT 2008 et 2023 ont fait l'objet d'un démembrement.

et p le vecteur des prix de marchés à la date 0 :

$$p = \begin{bmatrix} p^{(1)} \\ \\ p^{(n)} \end{bmatrix}.$$

La condition énoncée ci-après impose l'absence d'opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire l'impossibilité de constituer des portefeuilles de coût négatif ou nul, générant des flux (toujours) positifs ou nuls.

Hypothèse : Absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A statique)

1. $\forall\, \lambda \in \Re^n,\ M.\lambda \gg 0 \implies p'.\lambda \geq 0$
2. $\forall\, \lambda \in \Re^n,\ M.\lambda \gg 0,\ \exists\, k_0,\ (M.\lambda)_{k_0} > 0 \implies p'.\lambda > 0$

où la notion $M.\lambda \gg 0$ signifie que toutes les composantes du vecteur $M.\lambda$ sont positives ou nulles et où la $k^{\text{ième}}$ composante de ce vecteur est notée par ailleurs $(M.\lambda)_k$.

Ces deux conditions imposent donc qu'un portefeuille dont les flux futurs sont positifs (resp. positifs et dont l'un au moins est strictement positif) est de prix positif (resp. strictement positif). Les composants de λ sont positives ou négatives selon que les différents titres sont achetés ou vendus. On conviendra que $\lambda_k \geq 0$ (resp. $\lambda_k \leq 0$) implique que le $k^{\text{ième}}$ titre est acheté (resp. vendu). De fait, on autorise donc les ventes à découvert sans contraintes d'endettement. Moyennant toutes ces hypothèses, le lemme de Farkas permet de conclure et de donner le prix d'un zéro-coupon sans ambiguïté :

Proposition 5

$$\begin{gathered} \forall\, \lambda_1, ..., \lambda_n,\ \forall\, t = 1, ..., T,\ \textstyle\sum_{k=1}^n a_t^{(k)} \lambda_k \geq 0 \Longrightarrow \sum_{k=1}^n p^{(k)} \lambda_k \geq 0 \\ \Updownarrow \\ \exists\, \mu_1, ..., \mu_T \textit{ positifs},\ \forall\, k = 1, ..., K,\ p^{(k)} = \textstyle\sum_{t=1}^T \mu_t a_t^{(k)} \end{gathered}$$

La première proposition est exactement la première condition de l'hypothèse d'absence d'arbitrage et les $\mu_1 ... \mu_T$ sont donc les facteurs d'actualisation : $\mu_t = B(0, t)$.

La formule $p^{(k)} = \sum_{t=1}^T \mu_t a_t^{(k)}$ est en fait la formule d'actualisation, c'est-à-dire l'égalité qui donne le prix du titre k aujourd'hui comme la somme des flux futurs générés par le titre pondérés par les facteurs d'actualisation :

$$p^{(k)} = \sum_{t=1}^T B(0, t).a_t^{(k)}$$

L'existence étant acquise, l'unicité résulte de la condition de complétude du marché :

Hypothèse : Complétude (statique)

Le rang de la matrice M est égal à T : $rgM = T$.

Cette hypothèse signifie qu'il existe autant d'actifs indépendants que de dates. Ceci implique donc que les n conditions :

$$p^{(k)} = \sum_{t=1}^T a_t^{(k)} B(0, T)$$

définissent un unique T-uplet $(B(0, 1), ..., B(0, T))$, et qu'on peut reconstituer les zéro-coupons comme combinaison linéaire des titres existant sur le marché. En ce sens, $(B(0, 1), ..., B(0, T))$ est une base de l'espace des titres. Comme un zéro-coupon d'échéance t est reconstituable, il devient un portefeuille particulier, auquel on peut appliquer la seconde condition de l'hypothèse d'AOA pour en déduire :

$$B(0, t) > 0,\ \ \forall\, t = 1...T$$

Ces quelques justifications théoriques permettront de définir de façon non ambigue la courbe d'actualisation à partir des hypothèses d'AOA et de complétude.

On retrouvera ce type de raisonnement fondé sur l'absence d'opportunité d'arbitrage et la complétude quand il s'agira de définir non plus le prix du temps (ie : le prix d'un titre zéro-coupon) mais le prix du risque (ie : le prix d'un titre qui délivre 1 euro si un certain évenement se réalise).

6.2.3 Les taux d'intérêt

Les justifications théoriques qui précèdent utilisent assez naturellement les prix zéro-coupon. On peut à partir de ces prix définir n'importe quelle variable dérivée. La pratique conduit à introduire des taux d'intérêt représentatifs de ces prix.

Temps discret

Définition 5 *Le taux actuariel à la date t pour la date T, $r(t,T)$, est défini par :*

$$B(t,T) = \frac{1}{[1 + r(t,T)]^{T-t}}$$

Le taux in-fine, $r_i(t,T)$, est défini par :

$$B(t,T) = \frac{1}{1 + (T-t)r_i(t,T)}$$

Le taux pré-compté $r_p(t,T)$ est défini par :

$$B(t,T) = 1 - (T-t)r_p(t,T)$$

On pourrait définir une multitude d'autres taux ; l'important est de voir que l'unification de ces différentes notions passent par les prix zéro-coupon. En général, le taux utilisé résulte d'une pratique de marché. Selon le marché sur lequel on travaille, on raisonnera plutôt en terme de taux *in-fine*, taux précompté ou encore taux actuariel. Enfin, les définitions précédentes sont elles-même compliquées par l'unité de temps utilisée, c'est-à-dire suivant qu'on compte en jour ou non et selon le nombre de jours adopté conventionnellement pour l'année. Lorsque nous aurons à utiliser une notion de taux d'intérêt, nous utiliserons systématiquement les taux actuariels.

Temps continu

On définit l'équivalent des taux actuariels $r(t,T)$ par :

Définition 6 *Le taux comptant continu pour la période $[t,T]$ est défini et noté par :*

$$Y(t,T) = -\frac{1}{T-t} Ln\ B(t,T)$$

ou :

$$B(t,T) = \exp -(T-t)Y(t,T)$$

On définit également le taux instantané :

Définition 7 *Le taux court instantané est égal à :*

$$r_t = \lim_{T \searrow t} Y(t,Y) = -\left.\frac{dLn\ B(t,T)}{dT}\right|_{T \searrow t}$$

Enfin, que le temps soit discret ou continu, on parlera de courbe des taux :

Définition 8 *La courbe des taux zéro-coupon est la courbe :*

$$T - t \longrightarrow r(t,T) \ ou \ Y(t,T)$$

6.3 Opérations à terme

Les opérations à terme nécessitent de compléter les notations précédentes. En effet, $B(t,T)$ désignait le prix à la date t qu'il faut payer pour obtenir un zéro-coupon d'échéance T. Les opérations à terme exigent l'introduction d'une troisième date. On peut définir ainsi le prix décidé aujourd'hui (date 0), à payer en t pour acheter un bien donné (ici un zéro-coupon).

6.3.1 *Définitions*

Définition 9 *On appelle prix à terme en 0 pour la période* $[t,T]$ *le prix décidé en date* 0 *et payé en* t *d'un zéro-coupon livré à la date* t *d'échéance* T*. Il sera noté :*

$$B^f(0,t,T)$$

(f pour forward).

Partant de cette définition, on peut introduire tous les taux imaginables sur le modèle du paragraphe précédent. Ici encore la notion de taux actuariel sera privilégiée. Lorsque le temps est continu, on pose :

Définition 10 *Le taux à terme continu en 0 pour la période* $[t,T]$ *est défini et noté par :*

$$Y^f(0,t,T) = -\frac{1}{T-t} Ln\ B^f(0,t,T)$$

ou

$$B^f(0,t,T) = exp - (T-t)\ Y^f(0,t,T)$$

Enfin on peut définir les taux à terme instantanés :

Définition 11 *Le taux à terme instantané à la date* 0 *est défini par :*

$$f(0,t) = \lim_{T \searrow t} Y^f(t,Y)$$

soit encore :

$$B(0,t) = \exp - \int_0^t f(0,s)ds$$

Le taux à terme instantané $f(0,t)$ est l'analogue du taux court instantané au sens où, si la dynamique des taux était déterministe (i.e : tous les taux futurs sont connus dès aujourd'hui), alors on aurait nécessairement par absence d'opportunités d'arbitrage $f(0,t) = r_t$.

6.3.2 *Arbitrage comptant-terme*

Il est facile de voir que sur un plan théorique les marchés à terme sont *redondants* au sens où toute opération à terme peut être répliquée par des opérations au comptant. Par exemple, si on veut reconstituer aujourd'hui (date 0) une opération à terme pour la période $[t,T]$, on construit le portefeuille composé d'un zéro-coupon d'échéance T et de $-\lambda$ zéro-coupons d'échéance t ; ce portefeuille a un prix :

$$B(0,T) - \lambda B(0,t)$$

et génère les flux :

$$\begin{cases} -\lambda & \text{en} \quad t \\ 1 & \text{en} \quad T \end{cases}$$

Prenant $\lambda = \frac{B(0,T)}{B(0,t)}$, on constitue aujourd'hui une opération dans laquelle on obtient un paiement d'1 euro en date T au prix payé en t de $\frac{B(0,T)}{B(0,t)}$. Ainsi, s'il existe un marché au comptant *et* un marché à terme, la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage implique :[2]

[2] Les macro-économistes parlent de Parité Couverte des Taux d'Intérêt.

$$B^f(0,t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)}$$

qui, en terme de taux (discrets), s'exprime sous une forme plus connue :

$$\left[1 + r^f(0,t,T)\right]^{T-t} = \frac{[1 + r(0,T)]^T}{[1 + r(0,t)]^t}$$

ou encore :

$$[1 + r(0,T)]^T = [1 + r(0,t)]^t \, . \left[1 + r^f(0,t,T)\right]^{T-t}$$

En pratique il existe un marché au comptant et un marché à terme pour les raisons suivantes :

- absence de zéro-coupons pour toutes les dates d'échéance rendant impossible la réplication de certaines opérations à terme.
- présence de coût de transaction empêchant la réplication parfaite des opérations à terme à partir des opérations au comptant.

Dans ce cas, deux notions de prix à terme co-existent :

- le prix à terme *implicite* tel qu'il se dégage de la formule :

$$B^f(0,t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)}$$

- le prix à terme constaté sur le marché.

Si aucun arbitrage n'est toléré, ces deux prix doivent être égaux, au moins dans les cas où l'opération à terme est parfaitement réplicable par deux opérations au comptant suivant le mécanisme décrit précédemment. Ce type d'arbitrage lorsqu'il existe s'appelle un arbitrage comptant-terme (ou *cash and carry*).

Dans le cas normal où il n'a pas d'opportunités d'arbitrage, les taux à terme instantanés $f(0,t)$ ont une expression simple en fonction de la courbe des taux comptant :

$$\begin{aligned} f(0,t) &= \lim_{T \searrow t} -\frac{1}{T-t} Ln\ B^f(0,t,T) \\ &= \lim_{T \searrow t} -\frac{1}{T-t} [Ln\ B(0,T) - Ln\ B(0,t)] \\ &= -\frac{dLn\ B(0,t)}{dt} \end{aligned}$$

qu'on peut encore écrire :

$$B(0,t) = exp - \int_0^t f(0,s)ds$$

Il faut alors remarquer que ce résultat implique que la notion de courbe des taux à la date t peut être définie de façon équivalente par la donnée de l'une des trois courbes suivantes :

$$\begin{cases} B(t,T), \ \ T \geq t, \ \ B(t,t) = 1 \\ f(t,T), \ \ T \geq t, \\ Y(t,T), \ \ T \geq t \end{cases}$$

6.3.3 Distinction Forward/Future

Il apparaît nécessaire de faire cette distinction dans la mesure où les opérations à terme telles qu'elles sont pratiquées sur un marché à terme (tel que la MATIF) ne sont pas en général de celles décrites dans le paragraphe précédent. On distingue en fait les deux types d'opérations suivantes :

- Opérations **Forward** : Elles sont conformes aux opérations décrites au paragraphe précédent. Schématiquement, 2 parties A et B concluent un contrat forward lorsque l'une des parties (par exemple A) assume l'obligation d'acheter une quantité fixée de titres à un prix convenu à l'avance (dit prix du contrat) et à une date également fixée (dite échéance du contrat). On dit alors que A (resp. B) a une position longue (resp. courte). Aucun paiement ni livraison de titres n'ont lieu entre la date de conclusion et la date d'échéance du contrat. Lorsque le titre à livrer est un zéro-coupon d'échéance T et que la date d'échéance du contrat est t, alors le prix du contrat, c'est-à-dire le prix convenu à l'avance pour le titre à livrer en t, n'est rien d'autre que $B^f(0,t,T)$. A la date initiale, le prix d'un contrat à terme est, par construction, nul. En revanche, par la suite, l'engagement d'acheter (ou de vendre) en t le titre zéro-coupon d'échéance T au prix $B^f(0,t,T)$ n'a plus en général une valeur nulle.
- Opérations **Futures** : Elles sont en partie semblables aux opérations Forward dans la mesure où sont fixées, à la conclusion du contrat, une date d'échéance du contrat, une quantité fixée de titres et un prix convenu pour ces titres à la date d'échéance. En revanche, apparaît entre les 2 parties A et B une chambre de compensation par laquelle vont transiter des flux entre A et B pendant toute la période séparant la date de mise en place du contrat et la date d'échéance. Ces flux correspondent aux variations du prix du contrat, c'est-à-dire du prix à terme des titres à livrer à la date d'échéance. De plus, à tout moment, le contrat peut être dénoué par une position inverse.

Considérons à titre d'exemple le cas d'un titre zéro-coupon d'échéance T à livrer en t (i.e : date d'échéance du contrat). L'achat d'un contrat future portant sur ce titre, à la date 0, au *prix* noté $B^F(0,t,T)$ (appelé prix du contrat à la date 0), provoque les flux suivants :
- dépôt de garantie : $\alpha B^F(0,t,T)$
- appels de marge :

$$\begin{array}{l} B^F(1,t,T) - B^F(0,t,T) \\ \vdots \\ B^F(\tau,t,T) - B^F(\tau-1,t,T) \end{array}$$

Les appels de marge permettent à tout moment d'être "en phase" avec le marché (i.e : la position est dite *marked to market*) et de limiter ainsi les risques de défaut le jour de la livraison. En pratique, les contrats ne vont pas forcément à leur terme convenu (ici t), mais sont rachetés ou revendus avant t. Ceci signifie simplement que l'on fait le solde de l'opération en sommant les versements, soit à la date τ :

$$B^F(\tau,t,T) - B^F(0,t,T).$$

Si l'opération est menée à son terme, l'acheteur du contrat reçoit :
- la somme des appels de marge :
$$B^F(t,t,T) - B^F(0,t,T)$$
- la livraison d'un zéro-coupon d'échéance T au prix $B^F(t,t,T)$ avec, évidemment :
$$B(t,T) = B^F(t,t,T)$$
soit au total : $-B^F(0,t,T)$ c'est-à-dire la livraison d'un titre zéro-coupon d'échéance T au prix $B^F(0,t,T)$.

En ce sens, une opération Future est très semblable à une opération Forward à la différence près que les versements ont lieu pendant toute la période $[0,t]$ et non uniquement en t, et c'est la raison pour laquelle on a en général :

$$B^F(0,t,T) \neq B^f(0,t,T)$$

6.4 Annexe 1 : Différence entre prix forward et prix future

(Cox, Ingersoll et Ross (1981), Duffie (1989))
Nous illustrons ici la différence qui existe entre prix forward et prix future et montrons que , dans un contexte de taux déterministes, les deux prix sont égaux. Ce résultat est le fruit des trois propositions suivantes (seule la dernière dépend de l'hypothèse de taux déterministes).

6.4.1 Résultat 1

On peut trouver une stratégie telle qu'en investissant $B^f(0,t,T)$ à la date 0, on puisse recevoir : $\frac{B(t,T)}{B(0,t)}$ à la date t.

Preuve. On effectue simultanément les deux opérations suivantes en 0 :

- Achat de titres zéro-coupon d'échéance t pour une valeur de $B^f(0,t,T)$. L'opération conduit au versement de $\frac{B^f(0,t,T)}{B(0,t)}$ à la date t.
- Achat de $\frac{1}{B(0,t)}$ contrat forward au prix $B^f(0,t,T)$. C'est donc l'engagement de payer $\frac{B^f(0,t,T)}{B(0,t)}$ en t pour recevoir (en t) $\frac{1}{B(0,t)}$ unité d'un zéro-coupon d'échéance T.

Le total de ces deux opérations (et la revente des $\frac{1}{B(0,t)}$ titres zéro-coupon d'échéance T) aboutit à :

$$\frac{B^f(0,t,T)}{B(0,t)} - \frac{B^f(0,t,T)}{B(0,t)} + \frac{B(t,T)}{B(0,t)}$$

soit :

$$\frac{B(t,T)}{B(0,t)}$$

6.4.2 Résultat 2

On peut trouver une stratégie telle qu'en investissant $B^F(0,t,T)$ à la date 0 on puisse recevoir à la date t :

$$B(t,T).\beta(0,t)$$

où :

$$\beta(0,t) = \left(\prod_{k=0}^{t-1} B(k,k+1)\right)^{-1}$$

Preuve. On effectue les opérations suivantes :

- Placement de $B^F(0,t,T)$ en zéro-coupon d'échéance 1, puis replacement en zéro-coupon d'échéance 2, etc. Le produit à la date t est égal à :

  $$B^F(0,t,T).\frac{1}{B(0,1)}.\frac{1}{B(1,2)}...\frac{1}{B(t-1,t)}$$

  soit :

  $$B^F(0,t,T).\beta(0,t)$$

- Achat de $\frac{1}{B(0,1)}$ contrat Future à la date 0 et revente à la date 1, soit un profit (positif ou négatif) de :

  $$\frac{1}{B(0,1)}\left[B^F(1,t,T) - B^F(0,1,T)\right]$$

  réinvestit à chaque période en zéro-coupon de maturité 1 (comme dans l'opération précédente), soit en t :

  $$\left(B^F(1,t,T) - B^F(0,t,T)\right).\frac{1}{B(0,1)}...\frac{1}{B(t-1,t)}$$

  Achat de $\frac{1}{B(0,1)B(1,2)}$ contrat à la date 1 et revente à la date 2, soit un profit :

  $$\frac{1}{B(0,1)B(1,2)}\left[B^F(2,t,T) - B^F(1,t,T)\right]$$

réinvestit comme précédemment,
etc.
Au total de cette opération, on obtient :

$$\left[B^F(t,t,T) - B^F(0,t,T)\right].\beta(0,t)$$

soit :

$$\left[B(t,T) - B^F(0,t,T)\right].\beta(0,t)$$

Le total des 2 opérations donne enfin :

$$B(t,T).\beta(0,t)$$

6.4.3 Résultat 3

Dans un contexte de taux déterministes,

$$B(0,t) = (\beta(0,t))^{-1}$$

Preuve. C'est une conséquence de l'absence d'opportunité d'arbitrage entre les 2 stratégies :
- investissement d'1 euro en zéro-coupon d'échéance t, soit un flux de $\frac{1}{B(0,t)}$ en t.
- investissement d'1 euro en zéro-coupon d'échéance 1, puis réinvestissement en zéro-coupon d'échéance 2, etc., soit un flux de $\beta(0,t)$ en t.

Les 2 stratégies sont sans risque puisque les taux sont connus à la date 0, nécessitent le même investissement initial et conduisent donc au même flux. L'addition de ces 3 résultats conduit donc à l'égalité recherchée.

6.5 Annexe 2 : Contrat euribor

Les spécifications du contrat Future euribor 3 mois.

Contract	**3-MONTH EURIBOR FUTURE (EST)**
Exercise style	
Underlying instrument	3 month Euribor: European Interbank Offered Rate on 3-month deposits, calculated by the Banking Federation of the European Union (FBE)
Trading unit	1 000 000 €
Strike prices	
Price quotation	The index quoted to the 3rd decimal point, corresponding to : 100 minus the 3-month **Euribor**
Minimum price fluctuation (tick)	A 0.2 of a basis point, equivalent to 5 €
Contract cycles	2 monthly and 20 successive quarterly contract cycles out of: March (H), June (M), September (U), December (Z)
Last trading day	The 2nd trading day preceding the third Wednesday of the contract month at 11:00 a.m.
First trading day	1st trading day following the closing of a contract month
Settlement	Cash settlement. The closing settlement price equal to 100 minus the 3-month Euribor, published on the last trading day, rounded off to the tick
Trading hours	NSC Pre-opening : 7 :45 a.m – 8 :00 a.m Session : 8 :00 a.m – 10 :00 p.m Settlement day changeover: 5:00 p.m

7

Interpolation et analyse factorielle de la structure des taux.

7.1 Introduction

Après avoir défini les principales notions relatives à la structure des taux, il devient nécessaire de pouvoir déterminer numériquement ces diverses quantités (prix zéro-coupon, taux...). Or, pratiquement, il n'existe pas ou quasiment pas de titres zéro-coupon pour des maturités supérieures à un an (voir chapitre I). Les prix zéro-coupon sont donc des variables latentes, inobservables directement sur un marché financier. Il faut donc, à partir des prix des actifs observés sur le marché, (c'est-à-dire les obligations portant un coupon, ou d'autres actifs comme les swaps) déduire la structure des taux zéro-coupon. On ne peut malheureusement pas se passer de cette étape car la connaissance de ces prix zéro-coupon est, comme nous l'avons déjà dit, fondamentale pour traiter l'ensemble des problèmes qui peuvent se poser, comme l'évaluation d'un ensemble de flux futurs (certains). De plus, les modèles d'évaluation que nous étudierons dans les chapitres suivants sont construits à partir de ces prix zéro-coupon, puisqu'à partir de ceux-ci on peut reconstituer toute obligation avec coupons.

Nous avons vu au chapitre I qu'au moins en théorie, les prix des zéro-coupon doivent pouvoir être reconstitués sans difficulté à partir des prix d'obligations, puisque ces derniers ne sont que des combinaisons linéaires des premiers. Malheureusement la pratique pose de nombreux problèmes techniques liés au très grand nombre de prix zéro-coupon qu'il est nécessaire d'estimer. L'approche habituelle cherche à interpoler ces prix par une famille de fonctions. Se pose alors la question du choix de la famille d'interpolation. On peut penser, dans un premier temps, développer un modèle satisfaisant de bonnes propriétés économiques (comme l'absence d'opportunités d'arbitrage) afin d'en déduire une famille naturelle de fonctions pour les prix zéro-coupon. Nous verrons dans les chapitres qui suivent qu'une telle approche est possible mais conduit à des procédures d'estimation lourdes. Si l'objectif est d'obtenir rapidement une courbe des taux, on peut préférer une approche plus pragmatique et choisir d'emblée une famille simple de fonctions d'interpolation (comme, par exemple, des polynômes). C'est ce point de vue que nous privilégierons dans ce chapitre, mais il ne faut jamais oublier son caractère *ad-hoc* et le fait que la courbe des taux ainsi reconstituée peut ne pas être compatible avec un modèle économique cohérent.

Le deuxième point que nous soulèverons dans ce chapitre est lui aussi très pragmatique. Il est relatif à une littérature dont l'ambition est de déterminer combien d'aléa gouvernent les mouvements de la structure des taux. En effet, l'observation date par date des déformations de la structure des taux amène à penser que les taux de différentes maturités ne varient pas indépendemment les uns des autres. On décompose ainsi les déformations de la structure des taux en plusieurs déformations élémentaires :
- un mouvement du niveau général des taux,
- une modification de la pente de la structure des taux,
- une modification de la courbure de la structure des taux,
- etc.

Les implications pratiques de ce genre de décomposition (si elle est justifiée empiriquement) sont importantes puisqu'elles donnent des stratégies d'immunisation contre chacune des déformations-types évoquées ci-dessus. Par ailleurs, lorsque des modèles théoriques auront été proposés dans les chapitres ultérieurs, il sera intéressant de réinterpréter ces décompositions en aléa élémentaires communs à la lumière de ces modèles.

En résumé, ce chapitre a un but essentiellement descriptif (et non pas explicatif) aussi bien sur la reconstitution de la courbe des taux que sur les déformations de celle-ci au cours du temps.

7.2 Les méthodes d'interpolation

Ces méthodes sont nombreuses et conduisent à des résultats qui peuvent être assez différents ; elles ont le point commun d'être très pragmatiques dans la mesure où elles ne sont pas fondées sur un modèle théorique de la structure des taux. D'un point de vue mathématique, il s'agit simplement de reconstituer une courbe complète à partir de la donnée d'un nombre fini de points de cette courbe, d'où le nom d'interpolation. Nous commençons par rappeler les notations et le point de départ de la modélisation.

7.2.1 Notations

La courbe des prix zéro-coupon à la date t a déjà été introduite au chapitre 1 comme la courbe :

$$\theta \longrightarrow B(t, t+\theta) \tag{7.1}$$

On a vu que cette courbe était parfaitement équivalente à la donnée de la courbe des taux (zéro-coupon) définie par :

$$\theta \longrightarrow \begin{cases} Y(t, t+\theta) & \text{en temps continu} \\ \\ r(t, t+\theta) & \text{en temps discret} \end{cases} \tag{7.2}$$

La deuxième façon équivalente de se donner la structure des taux consiste à utiliser les taux à terme (implicites). Par exemple, dans le cas discret, nous avons défini le prix à terme implicite calculé en t pour la période $[t+\theta, t+\theta+1]$ par :

$$B^f(t, t+\theta, t+\theta+1) = \frac{B(t, t+\theta+1)}{B(t, t+\theta)}$$

et le taux correspondant par :

$$B^f(t, t+\theta, t+\theta+1) = \frac{1}{1 + r^f(t, t+\theta, t+\theta+1)}$$

Ainsi la courbe d'actualisation à la date t peut être donnée par :

$$\theta \longrightarrow B(t, t+\theta) = \prod_{k=0}^{\theta-1} B^f(t, t+k, t+k+1)$$

et donc est équivalente à la courbe :

$$\theta \longrightarrow B^f(t, t+\theta, t+\theta+1) \tag{7.3}$$

Les formes (7.1), (7.2) ou (7.3) sont donc parfaitement équivalentes, et on peut choisir de modéliser l'une de ces trois formes. Cependant, les prix d'obligations s'écrivent linéairement en les prix zéro-coupon puisque, pour une obligation de prix P_t à la date t, et générant les flux futurs (certains) $(a_\theta)_{\theta \geq 1}$, on a :

$$P_t = \sum_{\theta \geq 1} a_\theta . B(t, t+\theta) \tag{7.4}$$

soit :

$$P_t = \sum_{\theta \geq 1} \frac{a_\theta}{[1 + r(t, t+\theta)]^\theta}$$

ou encore, si $Y(t, t+\theta)$ désigne le taux continu

$$P_t = \sum_{\theta \geq 1} a_\theta . e^{-\theta . Y(t, t+\theta)}$$

Pratiquement, la linéarité de la formule (7.4) donnant le prix des obligations à partir de la courbe d'actualisation conduit à privilégier l'interpolation de la courbe des prix (7.1).

7.2.2 La modélisation

En théorie, pour peu que l'on dispose de suffisamment d'obligations, on doit pouvoir déduire les prix $B(t, t+\theta)$ en résolvant un système linéaire composé d'équations du type (7.4). Malheureusement, certains problèmes techniques apparaissent. En effet, les obligations ne détachent pas leur coupon aux mêmes dates dans l'année et ceci multiplie le nombre de prix zéro-coupon qu'il est nécessaire d'estimer, réduisant d'autant leur précision. De plus, la matrice des flux générés par un panier d'obligations contient alors beaucoup de zéros et est souvent proche (du point de vue numérique) de la singularité. De fait, la résolution d'un système linéaire conduit à des valeurs très instables numériquement. Enfin, on ne pourra jamais identifier $B(t, t+\theta)$ si aucune obligation ne détache un coupon en en $t+\theta$.

Pour cette raison, on impose aux courbes $\theta \longrightarrow B(t, t+\theta)$ admissibles d'appartenir à un ensemble particulier de courbes. Ainsi on les approchera par des familles de courbes paramétrées par un paramètre α_t tel que :

$$B(t, t+\theta) = g(\theta; \alpha_t) \tag{7.5}$$

où g est une fonction connue.

L'estimation des $B(t, t+\theta)$ se ramène à l'estimation d'un paramètre α_t de taille raisonnable, bien inférieure à la donnée de tous les $B(t, t+\theta)$. L'estimation se fait alors pour une dat edonnée t sur un panier de n obligations. L'équation (7.4) permet alors d'écrire :

$$\begin{cases} P_t^1 & = & \sum_{\theta \geq 1} a_\theta^1 . g(\theta; \alpha_t) \\ \vdots & & \vdots \\ P_t^n & = & \sum_{\theta \geq 1} a_\theta^n . g(\theta; \alpha_t) \end{cases}$$

Il est naturel d'introduire dans la modélisation statistique l'idée que la formule (7.4) n'est que théorique. Nous avons en effet vu au chapitre 1 que la formule d'actualisation (7.4) résultait d'une hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Or, le prix réel de marché peut s'écarter de ce prix théorique donné par (7.4), notamment parce que les titres ne sont pas traités en continu et que donc des arbitrages peuvent exister momentanément. Par ailleurs, les prix utilisés correspondent à des moyennes de prix relevés lors de transactions et sont donc d'autant plus précis que les titres correspondant sont plus liquides. Pour toutes ces raisons, il est naturel d'introduire un aléa conduisant au modèle statistique suivant :

$$P_t^i = \sum_{\theta \geq 1} a_\theta^i g(\theta; \alpha_t) + \varepsilon_{it} \quad i = 1...n \tag{7.6}$$

avec $E(\varepsilon_{it} \ / \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ où $\mathcal{F}_{t-1}$ désigne l'information passée (en l'occurrence les valeurs passées des prix des titres d'obligation). On a donc affaire à un modèle de régression non linéaire, possiblement hétéroscédastique. Cette hétéroscédasticité pourra être reliée aux caractéristiques du titre i (fiscalité particulière, liquidité...). En revanche, on ne supposera pas en général que deux prix peuvent être corrélés conditionnellement à $\mathcal{F}_{t-1}$; on supposera donc :

$$Cov(\varepsilon_{it}; \varepsilon_{jt} \ / \ \mathcal{F}_{t-1}) = 0 \text{ pour } \ i \neq j$$

Les approches exposées dans la littérature diffèrent par :
- par la famille de fonctions g utilisées,
- par la forme de la variance $V(\varepsilon_{it} \ / \ \mathcal{F}_{t-1})$,
- la méthode d'estimation.

7.2.3 Principes d'estimation

Nous rappelons ici brièvement les méthodes de l'économétrie disponibles pour traiter l'estimation du modèle (7.6). Compte tenu de la remarque précédente, il est en général difficile de postuler une loi pour les perturbations $(\varepsilon_{it})_i$, ce qui rendrait possible l'utilisation du maximum de vraisemblance. On peut toutefois proposer des estimations convergentes (quand n tend vers $+\infty$) du paramètre α_t sans avoir à postuler une loi pour $(\varepsilon_{it})_i$.

Proposition 6 ***Proposition 7*** *(Estimation fondée sur le premier moment). L'estimateur des moindres carrés non linéaires obtenu par le programme :*

$$\underset{\alpha_t}{Min} \quad \sum_{i=1}^{n}[P_t^i - \sum_{\theta\geq 1} a_\theta^i g(\theta;\alpha_t)]^2 \tag{7.7}$$

est convergent quand n tend vers $+\infty$.

On ne tient donc pas compte de l'hétéroscédasticité. Si on souhaite en tenir compte par exemple sous la forme :

$$E(\varepsilon_{it}^2 \;/\; \mathcal{F}_{t-1}, X_{it}) = h(X_{it};\beta_t) \;\text{ et }\; E(\varepsilon_{it}/\mathcal{F}_{t-1}, X_{it}) = 0$$

où X_{it} est un vecteur de variables explicatives (exogènes) de cette hétéroscédasticité, on a alors le résultat suivant :

Proposition 8 *(Estimation fondée sur les 2 premiers moments). L'estimation du pseudo-maximum de vraisemblance obtenu par le programme :*

$$\underset{\alpha_t,\beta_t}{Max} \quad -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}Ln\; h(X_{it};\beta_t) + \frac{1}{2}\frac{(P_t^i - \sum_{\theta>1} a_\theta^i g(\theta;\alpha_t))^2}{h(X_{it};\beta_t)} \tag{7.8}$$

est convergent et asymptotiquement normal quand $n \longrightarrow +\infty$.

On peut donc faire comme si les $(\varepsilon_{it})_i$ suivaient (conditionnellement à X_{it} et à $\mathcal{F}_{t-1}$) des lois gaussiennes même si tel n'est pas le cas. Il faut noter qu'un critère de moindres-carrés du type :

$$\underset{\alpha_t,\beta_t}{Min} \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{[P_t^i - \sum_{\theta>1} a_\theta^i g(\theta;\alpha_t)]^2}{h(X_{it},\beta_t)}$$

conduit à des estimateurs non convergents.

7.2.4 Les principales familles de fonctions d'interpolation

Il s'agit maintenant de préciser les familles de fonctions d'interpolation $g\,(.;\alpha_t)$ proposées dans la littérature. Une telle famille doit respecter certaines conditions. Premièrement elle doit permettre une grande flexibilité rendant possible l'ajustement à une structure des taux croissante, plate ou décroissante, ou encore concave... Deuxièmement, il doit s'agir d'une famille de fonctions continues et même continûment différentiables. Rappelons que les taux à terme instantanés sont obtenus sous forme de dérivée logarithmique : il faut donc pouvoir dériver la courbe d'actualisation obtenue.

On est cependant toujours gêné pour apprécier la qualité de l'ajustement obtenu. En effet, la présence d'un terme d'erreur ϵ dans l'équation (7.6) implique qu'il est normal que l'ajustement ne soit pas parfait ; ceci peut simplement signifier qu'il existe des opportunités d'arbitrage et que certains titres sont donc sur-évalués (ou sous-évalués) par le marché. C'est d'ailleurs cet écart entre prix ajusté et prix observé qui devrait logiquement conduire à des décisions d'investissement. Mais, par ailleurs, on peut souvent, quitte à élargir la famille d'interpolation, s'approcher aussi près qu'on le souhaite de l'ajustement parfait, ce qui conduit à la limite à dire que tous les titres sont parfaitement évalués par le marché. Il y a donc un compromis à trouver entre le degré d'ajustement désiré et la taille de la famille utilisée. Ce problème n'a pas de solution tant qu'un modèle économique n'a pas été construit grâce auquel on puisse obtenir une famille naturelle de fonctions respectant l'absence d'opportunités d'arbitrage, permettant ainsi d'interpréter les erreurs résiduelles comme le signe d'une mauvaise évaluation des titres et, ensuite, d'en tirer profit.

D'un point de vue pratique, lorsqu'on utilise malgré tout une famille de fonctions non reliée à un modèle (comme celles que nous présentons ci-dessous), on juge la qualité de l'ajustement par l'étude des résidus d'estimation. Si on croit qu'ils sont le reflet d'opportunités d'arbitrage momentanés, ils devraient logiquement être de moyenne nulle sauf à considérer que certains titres sont systématiquement sur- ou sous-évalués. Ainsi, on pourra regarder si certains résidus sont systématiquement positifs (ou négatifs) pour certains titres, s'ils sont corrélés avec la maturité du titre, s'ils sont autocorrélés, etc.

L'ajustement par des polynômes

Historiquement, les polynômes constituent la première famille utilisée, notamment parce que certains points militent pour son utilisation. D'une part, d'un point de vue pratique, les méthodes d'estimation sont simples. D'autre part, d'un point de vue théorique, toute courbe continue (sur un compact) peut être approchée par un polynôme de degré suffisamment élevé. En général, on montre empiriquement que l'ajustement par un polynôme n'est pas satisfaisant car, dans ce cas, les deux extrémités de la courbe sont mal ajustées au profit de l'espace intermédiaire, qui lui semble mieux pris en compte. C'est pourquoi on a été amené à utiliser 2 ou 3 polynômes différents pour ajuster chaque partie de la courbe (le "début", le "milieu", la "fin"). Comme, toutefois, l'ensemble doit être continu et dérivable, il existe des contraintes sur les coefficients de ces différents polynômes aux points de raccordement. Enfin cette méthode dite des splines polynômiaux a l'avantage d'être relativement facile à estimer une fois que certains problèmes ont été réglés (choix du degré du polynôme, points de raccordement...). On donne ici un exemple où un seul point de raccordement est utilisé et où les polynômes sont de degré 3. Formellement on écrira donc :

$$\begin{aligned} B(t,t+\theta) &= g(\theta;\alpha_t) \\ &= b_0(t)+b_1(t)\theta+b_2(t)\theta^2+b_3(t)\theta^3 \text{ si } \theta \leq M \\ &= c_0(t)+c_1(t)\theta+c_2(t)\theta^2+c_3(t)\theta^3 \text{ si } \theta > M \end{aligned} \tag{7.9}$$

où α_t est donc le vecteur des paramètres $(b_k(t), c_k(t))'_{k=0,\ldots,3}$.

Au point M, on impose la continuité et la double dérivabilité, ce qui induit les contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} b_0(t)+b_1(t)M+b_2(t)M^2+b_3(t)M^3 & = & c_0(t)+c_1(t)M+c_2(t)M^2+c_3(t)M^3 \\ b_1(t)+2b_2(t)M+3b_3(t)M^2 & = & c_1(t)+2c_2(t)M+3c_3(t)M^2 \\ 2b_2(t)+6b_3(t)M & = & 2c_2(t)+6c_3(t)M \end{array} \right. \tag{7.10}$$

On a de plus la contrainte :

$$B(t,t)=1=b_0(t) \tag{7.11}$$

le nombre de contraintes indépendantes est donc 4 et le nombre de paramètres à estimer 8. Lorsqu'on observe n obligations de maturité $(T_i)_{i=1\ldots n}$, et de prix P_t^i, le critère à minimiser est donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Min & \sum_{i=1}^n \left[P_t^i-\hat{P}_t^i\right]^2 \\ \text{s.c.} & \\ (7.10) \text{ et } (7.11) & \end{array} \right. \tag{7.12}$$

avec

$$\hat{P}_t^i=\sum_{k=0}^3 b_k(t)\sum_{\theta=1}^M a_\theta^i\theta^k+\sum_{k=0}^3 c_k(t)\sum_{\theta=M+1}^{T_i} a_\theta^i.\theta^k$$

Il s'agit donc d'une minimisation réalisable par les moindres carrés ordinaires sous contraintes linéaires.

La dernière étape consiste alors à analyser les résidus d'estimation, c'est-à-dire les écarts entre prix de marché et prix estimés, avec toutefois les réserves exprimées au début de ce paragraphe.

Empiriquement, on relève, pour certains maturités, des résidus systématiquement négatifs ou systématiquement positifs. Il peut alors paraître souhaitable d'introduire des variables explicatives telles la liquidité, la fiscalité liée à chaque obligation, le fait d'être dans le gisement du MATIF...

Par ailleurs, il y présomption d'hétéroscédasticité et on peut penser qu'elle est reliée négativement à la liquidité : les titres les moins côtés sont ceux soumis aux plus fortes variations de cours. Cette hétéroscédasticité a été reliée également à la durée de vie de l'emprunt. Elle doit apparaître sous forme de pondérations dans le critère (7.12).

Cette méthode pose enfin deux problèmes déjà évoqués :
- le choix des points de raccordement (qu'on pourrait d'ailleurs introduire comme paramètre à optimiser dans le programme (7.12),
- le choix du degré des polynômes : si le degré est trop faible, l'ajustement est mauvais (résidus très élevés), s'il est au contraire trop élevé, l'ajustement est "trop" parfait et la courbe obtenue devient très heurtée,
- enfin il semble que de nombreux problèmes d'instabilité numérique (forte sensibilité, choix des points de raccordement par exemple) apparaissent.

L'ajustement par des exponentiels de polynômes

Nous irons ici plus rapidement dans la mesure où les principes sont les mêmes que précédemment. L'ajustement par des exponentiels de polynômes part de l'idée qu'un prix zéro-coupon s'écrit (en continu) :

$$B(t, t+\theta) = exp[-\theta Y(t, t+\theta)]$$

et que donc il est naturel de s'intéresser à des familles de fonctions exponentielles. Pratiquement, cela revient à ajuster un polynôme sur les taux zéro-coupon et non plus sur les prix. Formellement, on écrira :

$$Y(t, t+\theta) = \sum_{k=1}^{K} b_k(t)\theta^{k-1} \tag{7.13}$$

où $(b_k(t))_{k=1\ldots K}$ sont des paramètres à estimer. Par conséquent, en terme de prix zéro-coupon, on obtient :

$$B(t, t+\theta) = exp - \sum_{k=1}^{K} b_k(t)\theta^{k} \tag{7.14}$$

Là aussi on pourrait proposer une succession de polynômes adaptés à chaque portion de la courbe des taux mais l'estimation en serait compliquée. En effet le programme à résoudre est du même type que (7.12) mais il relève désormais des moindres carrés non linéaires. Ici également se pose le problème du degré du polynôme choisi (on s'arrête en général à un polynôme de degré 3). L'analyse des résidus fait encore apparaître :
- des biais systématiques : les obligations de faible maturité ont des résidus systématiquement négatifs,
- de l'hétéroscédasticité : les obligations de maturité élevée ont des résidus plus variables que celles de maturité faible.

Il semble donc nécessaire d'introduire la maturité comme variable explicative à la fois dans l'équation de régression mais également dans la variance. Un tentative a été faite sous la forme :

$$V(\varepsilon_{it} \;/\; \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 T_{i,t}^{d_t}$$

où $T_{i,t}$ est la maturité résiduelle du titre i à la date t et (d_t, σ_t) sont des paramètres à estimer. L'estimation par pseudo-maximum de vraisemblance est difficile à mettre en oeuvre numériquement, mais permet (en théorie) une estimation complète des paramètres ainsi que la mise en oeuvre de tests concernant le degré du polynôme (mais non sur le paramètre d_t).

L'ajustement par des polynômes d'exponentielles

L'idée est de prendre une fonction d'actualisation de la forme :

$$B(t, t+\theta) = \sum_{k=1}^{K} b_k(t)\left[e^{-\theta.\alpha(t)}\right]^k \tag{7.15}$$

Les paramètres sont alors $(b_k(t), \alpha(t))_{k=1...K}$. On remarque que $\alpha(t)$ a une interprétation en terme de taux à terme instantané ; on a effet :

$$\lim_{T \to +\infty} -\frac{dLn\ B(t,T)}{dT} = \alpha(t)$$

Il est facile de voir également que α_t peut être vu comme le taux long, c'est-à-dire la limite des taux zéro-coupon quand la maturité tend vers l'infini.

L'estimation des paramètres relève partiellement d'une méthode de moindres carrés linéaires (pour $\alpha(t)$ donné, il y a linéarité en $b_k(t)$).

L'ajustement par une forme mixte

Il s'agit d'une famille de fonctions moins connue, surtout utilisée par les économistes, dans laquelle les taux à terme instantanés s'écrivent sous forme d'un produit d'un polynôme et d'une exponentielle. L'avantage de cette formulation est, comme nous allons le voir, de pouvoir être estimée de façon rapide. On pose donc :

$$f(t, t+\theta) = \beta_0(t) + (\beta_1(t) + \beta_2(t)\lambda(t)\theta)e^{-\lambda(t)\theta} \tag{7.16}$$

ce qui donne pour les prix zéro-coupon :

$$\begin{aligned} B(t, t+\theta) &= exp - \int_0^\theta f(t, t+s)ds \\ &= exp - \theta[\beta_0(t) + (\beta_1(t) + \beta_2(t))(\frac{1 - e^{-\lambda(t)\theta}}{\lambda(t)\theta}) - \beta_2(t)e^{-\lambda(t)\theta}] \end{aligned}$$

Faisant tendre θ vers 0 et vers $+\infty$, on obtient :

$$f(t, \infty) = \beta_0(t) \tag{7.17}$$

$$f(t, t) = \beta_0(t) + \beta_1(t) \tag{7.18}$$

ce qui permet de déterminer les valeurs de $\beta_0(t)$ et $\beta_1(t)$ si on connait le "taux court" et le "taux long". Si par ailleurs il existe un extremum sur la courbe des taux à terme instantanés, c'est-à-dire une maturité θ^* telle que $\frac{\partial f(t,t+\theta)}{\partial \theta} |_{\theta=\theta^*}$ alors :

$$f(t, t+\theta^*) = \beta_0(t) + \beta_2(t)exp[-1 + \frac{\beta_1(t)}{\beta_2(t)}] \tag{7.19}$$

$$\lambda(t)\theta^* = 1 - \frac{\beta_1(t)}{\beta_2(t)} \tag{7.20}$$

Ainsi, connaissant $\beta_0(t)$ et $\beta_1(t)$, on peut calculer $\beta_2(t)$ puis $\lambda(t)$, à condition bien sûr qu'on observe l'extremum et la maturité associée. On peut remarquer de plus que cet extremum est un maximum (resp. minimum) si $\beta_2(t)$ est positif (resp. négatif).

La procédure précédente n'est clairement pas efficace puisqu'elle n'utilise pas toute l'information contenue dans la structure des taux. De plus, en pratique il est sûrement difficile d'avoir les valeurs exactes du taux instantané, du taux long et de l'extremum éventuel des taux à terme instantanés ; néanmoins on peut espérer en avoir des valeurs approchées, permettant ainsi d'obtenir des valeurs initiales pour les paramètres de base $\beta_0(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ et $\lambda(t)$. Il est alors naturel d'utiliser une procédure d'estimation classique (comme décrit précédemment) initialisée par ces valeurs de première étape.

En guise de conclusion de cette section, il faut noter le caractère très pragmatique de la démarche proposée ici. L'introduction d'un aléa (l'aléa du statisticien) est faite de façon *ad-hoc*, de même que les hypothèses statistiques sur cet aléa. Une démarche plus naturelle consistera à se donner un modèle théorique d'évolution de la structure des taux, de le contraindre à respecter l'absence d'opportunité d'arbitrage puis enfin d'en déduire les formes fonctionnelles imposées par ce modèle pour les prix zéro-coupon. Le problème de la reconstitution de la courbe des taux zéro-coupon se ramène alors à l'estimation des paramètres d'un modèle théorique d'évolution de la structure des taux. En pratique, la reconstitution de la courbe des taux zéro-coupon fait l'objet de beaucoup d'empirisme à la fois dans sa mise en oeuvre (dans la mesure où chacun a sa méthode, sa façon d'introduire la fiscalité, certaines spécificités des titres...) mais également dans son application (à partir de quelle valeur des résidus juge-t-on que le titre est sur- ou sous-évalué... ?)

7.3 L'analyse factorielle de la structure des taux

L'approche présentée ici se veut encore descriptive. Elle se fonde non plus uniquement sur une courbe des taux à une date t donnée comme dans les sections précédentes, mais sur l'évolution temporelle de cette courbe. Sont étudiées ainsi les déformations de la courbe des taux au cours du temps. Concrètement cela s'apparente à une analyse des données sur série temporelle. Cette série temporelle (X_t) n'est rien d'autre que le vecteur des taux zéro-coupon, des prix ou des rendements aux différentes maturités. Par exemple, (X_t) pourra être :

$$X_t = \begin{pmatrix} Y(t, t+1) \\ \vdots \\ Y(t, t+N) \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$X_t = \begin{pmatrix} B(t, t+1) \\ \vdots \\ B(t, t+N) \end{pmatrix}$$

L'idée financière vers laquelle on souhaiterait converger à l'issue de cette étude repose sur le fait que (X_t) n'est pas un "empilement" de N séries indépendantes, mais qu'au contraire ces N séries sont fortement liées. Pour exprimer cette idée, on postule que les N séries composant (X_t) sont liées par des facteurs communs, de telle sorte que (X_t) s'écrit :

$$X_t = \mu_t + C.F_t + u_t \tag{7.21}$$

où C est une matrice $N \times p$, F_t est un vecteur de p séries appelées facteurs, u_t un vecteur de perturbations indépendantes entre elles, et indépendantes de F_t et μ_t une série déterministe.

Dans ce cas, la dynamique de (X_t) est réductible à la dynamique d'un plus petit nombre de séries, en l'occurence p facteurs ($p < N$). Outre l'aspect descriptif, ce genre d'étude a des conséquences importantes pour les modèles d'évolution de la structure des taux ainsi que pour la pratique financière, notamment par le biais des stratégies de couverture. Le premier point fera l'objet des chapitres ultérieurs. Le second est développé de façon heuristique dans le paragraphe suivant.

7.3.1 Motivations financières

Le prix d'un titre à flux certains, et donc le prix d'un portefeuille de ces titres, est directement fonction de la structure des taux. Par conséquent, les variations de prix sont directement liées aux mouvements de la structure des taux. Un problème récurrent en finance est depuis longtemps la recherche de portefeuilles partiellement insensibles aux mouvements de la structure des taux. Ce qu'on appelle communément "couverture en duration" consiste à construire des portefeuilles immunisés contre des mouvements du niveau général des taux. Il s'agit ici d'aller plus loin dans ce type d'analyse. D'après la formule d'actualisation (7.4), tout portefeuille construit en $t-1$, de prix P_{t-1} peut s'analyser comme une combinaison linéaire de titres zéro-coupon de telle sorte que P_{t-1} s'écrive :

$$P_{t-1} = \sum_{\theta \geq 1} a_\theta . B(t-1, t-1+\theta) \tag{7.22}$$

En supposant un pas de temps discret, les variations des prix sont :

$$\begin{aligned}\Delta P_t &= P_t - P_{t-1}\\ &= \sum_{\theta\geq 1} a_\theta \Delta B(t,t+\theta)\end{aligned}$$

où $\Delta B(t,t+\theta) = B(t,t-1+\theta) - B(t-1,t-1+\theta)$, ou encore :

$$\frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} = \sum_{\theta\geq 1} x_{t-1,\theta}.\frac{\Delta B(t,t+\theta)}{B(t-1,t-1+\theta)} \tag{7.23}$$

où

$$x_{t-1,\theta} = a_\theta \frac{B(t-1,t-1+\theta)}{P_{t-1}}$$

est en fait la part du montant total investi en $t-1$ dans le zéro-coupon de maturité θ.

S'il n'y avait pas de risque, le taux de rendement de toute opération sur une période serait égal au taux de rendement sans risque $\frac{1}{B(t-1,t)} - 1$ noté $r(t-1,t)$. Il est donc naturel de considérer l'excès de rendement, c'est-à-dire la différence du taux de rendement d'une opération avec le taux de rendement sans risque. Si on peut postuler une décomposition factorielle pour :

$$\frac{\Delta B}{B} - r(t-1,t),$$

on écrira :

$$\forall\, \theta \geq 2\ ,\ \frac{\Delta B(t,t+\theta)}{B(t-1,t-1+\theta)} - r(t-1,t) = \mu_{\theta,t} + \sum_{k=1}^{p} \alpha_{k\theta} F_{k,t} + u_{\theta,t} \tag{7.24}$$

où les facteurs et la perturbation sont centrés.

Combinant (7.23) et (7.24), on obtient :

$$\frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} - r(t-1,t) = \mu_t + \sum_{k=1}^{p} c_k F_{k,t} + v_t$$

où

$$\begin{aligned}\mu_t &= \sum_{\theta\geq 2} x_{t-1,\theta}\mu_{\theta,t}\\ c_k &= \sum_{\theta\geq 2} x_{t-1,\theta}\alpha_{k\theta}\\ v_t &= \sum_{\theta\geq 2} x_{t-1,\theta}u_{\theta,t}\end{aligned}$$

On peut alors éliminer le risque systématique (c'est-à-dire le risque lié aux facteurs) en imposant, lors de la constitution du portefeuille en $t-1$, les p contraintes :

$$c_k = 0, k = 1, ..., p$$

sans oublier la $p+1^{ème}$ contrainte :

$$\sum_{\theta\geq 1} x_{t-1,\theta} = 1$$

Un portefeuille qui vérifie ces contraintes sera dit immunisé. Remarquons alors que si, dans la forme (7.24) il existe un facteur (le 1er par exemple) tel que $\alpha_{1\theta}$ soit proportionnel à θ, alors la condition d'immunisation s'écrit :

$$c_1 = 0$$

redonne la condition usuelle relative à la duration première.

Les conditions d'immunisation nécessite donc la connaissance des poids $\alpha_{k\theta}$ intervenant dans la décomposition factorielle (7.24). La question est donc de résoudre les problèmes suivants :

– chercher le nombre de facteurs “utiles” p,
– estimer les poids $(\alpha_{k\theta})_{k,\theta}$.

7.3.2 Quelques notions sur les modèles factoriels

Le terme de modèle factoriel apparaît régulièrement dans la littérature mais est souvent présentée de façon ambiguë. Avant tout, il faut remarquer que nous sommes dans un contexte dynamique ; il est donc nécessaire de définir l'ensemble d'informations disponibles à chaque date. Si nous étudions une série (X_t) (de dimension N), alors cet ensemble d'informations F_t à la date t sera constitué de X_{t-1}, X_{t-2}... noté $\underline{X}_{t-1}$. On suppose alors que (X_t) admet la décomposition suivante :

Définition 12 – ***Définition 13*** *(Représentation factorielle).* (X_t) *suit une représentation factorielle de rang p si :*

$$X_t = \mu_t + C.F_t + U_t$$

sous les hypothèses :
– (F_t) *est un processus de dimension p ;*
– (U_t) *est un vecteur de perturbation d'espérance conditionnelle nulle, de variance conditionnelle diagonale, et non corrélées avec* F_t *;*
– C *est un ematricee rectangulaire N x p, de rang p.*

La condition sur la variance conditionnelle des perturbations (i.e : de forme diagonale) est généralement imposée mais elle n'est pas nécessaire. Elle est toutefois naturelle : une fois “enlevés” les facteurs F_t, les termes résiduels n'ont plus de facteurs communs et sont donc supposés être non corrélés.

Pratiquement, les articles se placent dans un cas très particulier de cette formulation générale :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V\left(F_t/\underline{X}_{t-1}\right) & = & \text{cons tan te} \\ V\left(U_t/\underline{X}_{t-1}\right) & = & D \text{ matrice diagonale constante} \\ \mu_t & = & \mu \end{array} \right.$$

On voit en outre qu'on peut toujours redéfinir la matrice des poids C pour obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V\left(X_t/\underline{X}_{t-1}\right) & = & C.C' + D \\ E\left(X_t/\underline{X}_{t-1}\right) & = & \mu \end{array} \right. \tag{7.25}$$

Cette formulation exclut en particulier le cas où (X_t) et (F_t) sont non stationnaires. De plus les $(X_t)_t$ sont non autocorrélés.

Pour finir, remarquons une chose importante : la matrice C n'est pas identifiable. Pour toute matrice P inversible, on peut réécrire la définition précédente sous la forme :

$$X_t = C^* F_t^* + U_t$$

avec les mêmes hypothèses et où :

$$\begin{array}{lcl} C^* & = & CP \\ F_t^* & = & P^{-1} F_t \end{array}$$

En fait, seul l'espace engendré par les colonnes de C (qui est de dimension p) est identifiable. Les différentes méthodes d'estimation ne feront qu'exhiber l'estimation d'une base particulière de cet espace noté $[C]$.

7.3.3 Test d'hypothèses financières

On a vu précédemment que pour retrouver la couverture usuelle en duration, il fallait que les poids affectés au premier facteur (par exemple) aient une forme particulière. En l'occurrence, le taux de rendement de maturité θ, $\frac{\Delta B(t,t+\theta)}{B(t-1,t-1+\theta)} - r(t-1,t)$ doit pouvoir s'écrire :

$$\frac{\Delta B(t,t+\theta)}{B(t,t+\theta)} - r(t-1,t) = \mu_t + \theta F_{1,t} + ...$$

Dans le cadre d'une représentation factorielle générale :

$$X_t = \mu_t + C.F_t + U_t$$

cela signifie que l'espace $[C]$ contient le vecteur $e = (1, \ldots, \theta, \ldots, N)'$:

$$p \in [C] \tag{7.26}$$

où $[C]$ désigne l'espace engendré par les colonnes de la matrice C. L'hypothèse financière que l'on voit souvent dans la littérature sous la forme : "il existe un facteur de niveau dans l'évolution de la structure des taux" se traduit par l'appartenance d'un certain vecteur dans l'espace des poids $[C]$. En pratique, il est beaucoup plus facile de tester une caractérisation équivalente de cette hypothèse à l'aide d'une base particulière de l'espace $[C]$. En effet, si C est une base particulière de $[C]$ alors (7.26) est aussi équivalent à :

$$C\left(C'C\right)^{-1}C'p = p \tag{7.27}$$

On peut désirer aussi tester qu'un portefeuille particulier est immunisé. Dans le cas où (X_t) désigne le vecteur des taux de rendements par maturité, ceci signifie que le taux de rendement du portefeuille particulier s'écrit :

$$\alpha' X_t$$

qui est immunisé si :

$$\alpha' C = 0$$

soit encore :

$$\alpha \in [C]^{\perp}$$

qui peut s'écrire sous la même forme que dans (7.27) à l'aide d'une base particulière de l'orthogonal de $[C]$.

Ceci illustre le fait que les hypothèses financières pertinentes se ramènent à des tests sur l'espace des poids et non pas sur la valeur des poids eux-mêmes. Comme nous l'avons dit plus haut, ceci est dû au fait que seul l'espace est identifiable. De même, la valeur prise par les facteurs F_t n'a que peu d'importance ; la seule chose qui importe est leur nombre.

7.3.4 Estimation d'un modèle factoriel

Le choix de la méthode d'estimation dépend des hypothèses faites sur cette représentation. Nous traitons le cas correspondant aux hypothèses usuelles que nous rappelons :

$$\left\{\begin{array}{lcl} E\left(X_t \,/\, \underline{X}_{t-1}\right) & = & \mu \\ V\left(X_t \,/\, \underline{X}_{t-1}\right) & = & C.C' + D \end{array}\right. \tag{7.28}$$

Dans ce cas, (X_t) est une suite de variables aléatoires, non autocorrélées. Comme nous l'avons dit, μ et D sont identifiables mais pas C. Il faut donc rajouter une contrainte d'identification. On impose en général :

$$C'D^{-1}C \text{ matrice diagonale}$$

Les estimateurs de μ, C, D obtenus par résolution du programme (si H désigne le nombre d'observations) :

$$\left[\begin{array}{ll} Max & L_H(\mu, C, D) \\ \text{s.c.} & \\ C'D^{-1}C \text{ diagonale} & \end{array}\right.$$

où :

$$L_H(\mu, C, D) = -\frac{H}{2} Ln \ |CC' + D| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{H} (X_t - \mu)' (CC' + D)^{-1} (X_t - \mu)$$

sont convergents et asymptotiquement normaux lorsque le nombre d'observations H tend vers $+\infty$.

Ainsi, même si (X_t) n'est pas un processus gaussien, la pseudo-log-vraisemblance L_T produit des estimateurs convergents et asymptotiquement normaux. Enfin, on peut remarquer que l'estimateur de μ n'est autre que la moyenne empirique de (X_t), et que, si on note $\hat{\Sigma}$ la variance empirique de (X_t), C et D sont alors solution du programme :

$$\left[\begin{array}{ll} Max & \left\{-\frac{H}{2} Ln \ |CC' + D| - \frac{H}{2} Tr \left((CC' + D)^{-1} \hat{\Sigma} \right) \right\} \\ \text{s.c.} & \\ C'D^{-1}C \text{ diagonale} & \end{array}\right.$$

où Tr désigne l'opérateur Trace.

Concernant les tests des différentes hypothèses évoquées, il faut ajouter en général une hypothèse de normalité sur le procesus (X_t). L_H devient la "vraie" logvraisemblance et les estimateurs obtenus sont les estimateurs du maximum de vraisemblance. Les études qui ont été faites aux Etats-Unis et en France n'utilisent pas toujours cette méthode du pseudo-maximum de vraisemblance. En revanche, on pratique une Analyse en Composantes Principales (ACP) sur la matrice de variance empirique $\hat{\Sigma}$. En fait, on montre (voir annexe) que ceci n'est valide que si on suppose que les risques idiosyncratiques, c'est-à-dire les variances conditionnelles des perturbations résiduelles sont de même variance. Or il y a en général présomption d'hétéroscédasticité et il est donc plus légitime de supposer D non scalaire, quitte à tester cette hypothèse ensuite. Lorsqu'on fait une ACP, le nombre de facteurs correspond au nombre de valeurs propres "significatives" de $\hat{\Sigma}$. Si la normalité peut être supposée, on peut réaliser à nouveau un test du rapport des vraisemblances.

Concrètement, on calcule la matrice de variance empirique du vecteur d'observations (X_t), soit :

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{H}(X_t - \bar{X})(X_t - \bar{X})'$$

où $\bar{X}$ est la moyenne empirique de la série. D'après la forme du modèle factoriel, on a alors à la limite quand H tend vers l'infini :

$$\hat{\Sigma} \longrightarrow C\Sigma_F C' + D$$

Si on néglige le risque idiosyncratique D par rapport à la variance des facteurs Σ_F, alors il est effectivement légitime de diagonaliser $\hat{\Sigma}$:

- le nombre de valeurs propres "significatives" donne une estimation du nombre de facteurs (p),
- les vecteurs propres associées à ces valeurs propres non nulles constituent une base de l'espace $[C]$.

En pratique, des études ont été réalisées sur données américaines et françaises sur des vecteurs X_t représentatifs des rendements mais aussi de taux zéro-coupon, de taux à terme... Une première critique méthodologique apparaît dans la mesure où les représentations factorielles (qui sont fondamentalement linéaires) ne sont pas a priori compatibles entre elles suivant qu'on les postule sur des taux zéro-coupon, des rendements, des prix zéro-coupon. Lorsqu'elle est postulée sur les taux zéro-coupon et qu'on pratique une ACP, on trouve d'ordinaire 2 à 3 facteurs ($p = 2$ ou 3), c'est-à-dire deux à trois valeurs propres importantes pour la matrice de variance $\hat{\Sigma}$. On trouve également que le premier vecteur propre de l'ACP a des coordonnées constantes, alors que le second a des coordonnées croissant (ou décroissant) approximativement de façon linéaire. Ceci conduit les auteurs à identifier un facteur de niveau et un facteur de pente, c'est-à-dire que les chocs sur la structure des taux se décomposent en chocs sur le niveau et la pente de cette courbe.

Une seconde critique concerne le choix de la méthode (Analyse Factorielle ou ACP) qui ne sont pas équivalentes. Enfin, il faut noter que de nombreuses études économétriques remettent en cause certaines des hypothèses sous-jacentes. Ainsi il n'est pas sûr que les taux soient stationnaires, ce qui conduit à rejeter les méthodes d'estimation précédentes (Analyse Factorielle et ACP) ou à tout le moins à les manier avec prudence. Par ailleurs, le fait que les variances conditionnelles soient supposées constantes est en général rejeté par les données, conduisant les économètres à proposer des modélisations de type AutoRegressive Conditionally Heteroskedastic (ARCH).

Ce qui manque fondamentalement à ces approches est de pouvoir travailler dans le cadre d'un modèle dans lequel on pourrait justifier les hypothèses faites sur la linéarité de la représentation factorielle, la dynamique sous-jacente des taux d'intérêt... A cet égard, comme dans le cas de l'interpolation de la structure des taux que nous avons vu précédemment, beaucoup de points s'éclaireront à la lumière des modèles d'évolution de la structure des taux et cela nous permettra de discuter les approches empiriques proposées ici.

8
Les modèles de taux en temps discret.

8.1 Introduction

Le chapitre précédent cherchait à estimer la structure des taux à une date donnée ainsi que ses déformations au cours du temps. Nous avons vu qu'une des difficultés rencontrées était de ne pouvoir se reposer sur un modèle sous-jacent permettant de justifier les hypothèses utilisées et d'interpréter les résultats obtenues. On distingue deux classes de modèles. Les premiers, dits modèles d'équilibre, modèlisent les fonctions d'utilité des agents pour en déduire des fonctions de demandes d'actifs ; puis, l'égalité offre-demande permet de dériver les prix des actifs. La seconde classe de modèles ne vise pas à modéliser les préférences des agents mais cherche plutôt à se restreindre à l'hypothèse minimale d'absence d'opportunités d'arbitrage.

Le plus simple pour appréhender ce genre de problèmes est de se placer, dans un premier temps, dans le cadre d'un modèle en temps discret, et de développer, dans ce modèle, les principales idées financières et probabilistes qui réapparaîtront sous forme complexe (d'un point de vue mathématique) dans les modèles en temps continu. Ainsi la notion d'absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A) et ses conséquences probabilistes seront très claires dans les modèles en temps discret. Ce type de modèle est le pendant du modèle binomial développé pour les options sur action (modèle dit de Cox, Ross et Rubinstein). Nous commençons par décrire la structure probabiliste d'un modèle en temps discret à aléa binomial ainsi que les contraintes imposées par l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Nous nous intéressons ensuite à la résolution complète de ce modèle dans le cas particulier du modèle dit de Ho et Lee. Puis nous développons les extensions naturelles de ce type de modèle

Nous donnons ensuite le principe d'évaluation des biens contingents suivi de quelques exemples d'application. Enfin, nous montrons qu'on peut faire converger, quand le pas de temps tend vers 0, certains de ces modèles vers des modèles en temps continu que nous reverrons aux chapitres suivants.

8.2 Le modèle de base

8.2.1 Les hypothèses financières

Les hypothèses de travail standards sont les suivantes :

Hypothèses

1. Absence de coûts de transaction. Les actifs sont infiniment divisibles.
2. Le temps est discret.
3. Il existe à chaque date des titres zéro-coupon pour toute les maturités.

4. Conditionnellement à chaque date, seuls 2 états du monde peuvent se réaliser.

De plus, nous ferons constamment l'hypothèse qu'il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage.

8.2.2 Le modèle probabiliste

Supposons qu'il n'y ait pas, en fait, d'aléa ; dans ce cas, on a la relation obtenue par le raisonnement d'arbitrage habituel :

$$B(t-1,t)B(t,T) = B(t-1,T)$$

ou encore :

$$B(t,T) = \frac{B(t-1,T)}{B(t-1,t)} \tag{8.1}$$

Autrement dit, il existe une relation de récurrence donnant la structure des taux en t, $B(t,.)$, en fonction de la structure des taux en $t-1$, $B(t-1,.)$. L'idée la plus simple pour introduire un aléa dans cette évolution de la structure des taux est de considérer l'équation de récurrence dérivée de (8.1) :

$$B(t,T) = \frac{B(t-1,T)}{B(t-1,t)}.H_t(T-t) \tag{8.2}$$

où $H_t(.)$ est une fonction aléatoire, prenant deux valeurs positives possibles :

$$H_t(.) = \begin{cases} h_t(.) & \text{avec probabilité } \; p_t \\ \\ h_t^*(.) & \text{avec probabilité } \; 1-p_t \end{cases}$$

A ce stade, il est important de constater que les valeurs $h_t(.)$ et $h_t^*(.)$ ainsi que la probabilité p_t peuvent dépendre de l'ensemble d'informations à la date $t-1$. Cet ensemble d'informations noté $\mathcal{F}_{t-1}$ comprend toutes les réalisations passées (jusqu'en $t-1$ compris) de la structure des taux, ou de façon équivalente toutes les réalisations passées de la fonction de perturbation H. Par conséquent les fonctions $h_t(.)$ et $h_t^*(.)$ et la probabilité p_t peuvent a priori dépendre des valeurs passées de la structure des taux. Néanmoins, ici ces fonctions ne dépendront pas de $\mathcal{F}_{t-1}$. On supposera ainsi que $(H_t)_t$ est une suite de fonctions aléatoires indépendantes de lois de Bernoulli.

Il est alors possible de "dérouler" la récurrence (8.2) afin d'obtenir la structure des taux à la date t en fonction de celle de la date 0 :

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \frac{B(t-1,T)}{B(t-1,t)}.H_t(T-t) \\ &= \frac{B(0,T)}{B(0,t)}.\prod_{k=1}^{t}\left[\frac{H_k(T-k)}{H_k(t-k)}\right] \end{aligned}$$

avec la convention : $H_t(0) = 1$, ou encore :

$$B(t,T) = B^f(0,t,T).\prod_{k=1}^{t}\left[\frac{H_k(T-k)}{H_k(t-k)}\right] \tag{8.3}$$

où $B^f(0,t,T)$ est le prix à terme implicite en 0 pour la période $[t,T]$. Ainsi la structure des taux à la date t est égale à celle déduite des taux à terme implicites à la date 0, multipliée par toutes les perturbations survenues entre 0 et t. On va maintenant s'attacher à traduire les contraintes imposées par l'absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A) sur le procesus $(H_t)_t$.

8.2.3 L'absence d'opportunité d'arbitrage

Le raisonnement est très classique et consiste à construire un portefeuille immunisé, c'est-à-dire insensible à l'aléa H_t et ensuite de conclure en disant qu'un tel portefeuille doit avoir le même rendement que le rendement sans risque.

Pour cela, considérons à la date t, 2 titres zéro-coupons d'échéance T_1 et T_2 et construisons un portefeuille composé de ces deux titres :

- 1 titre zéro-coupon de maturité T_1
- x titre(s) zéro-coupon de maturité T_2.

Soit V_t la valeur de ce portefeuille à la date t. On a par construction :

$$\begin{cases} V_t & = & B(t,T_1) + x.B(t,T_2) \\ \\ V_{t+1} & = & B(t+1,T_1) + x.B(t+1,T_2) \end{cases}$$

Connaissant la structure des taux jusqu'à la date t, V_{t+1} ne peut prendre que deux valeurs :

$$V_{t+1} = \begin{cases} \frac{B(t,T_1)}{B(t,t+1)}\, h_{t+1}(T_1 - t - 1) + x.\frac{B(t,T_2)}{B(t,t+1)}\, h_{t+1}(T_2 - t - 1) \\ \\ \frac{B(t,T_1)}{B(t,t+1)}\, h^*_{t+1}(T_1 - t - 1) + x.\frac{B(t,T_2)}{B(t,t+1)}\, h^*_{t+1}(T_2 - t - 1) \end{cases} \tag{8.4}$$

Il est facile de choisir x, noté x_0 tel que ces 2 valeurs soient égales : on peut donc construire à la date t un portefeuille immunisé au sens où sa valeur à la date $t+1$ est insensible au choc survenant entre t et $t+1$. Un tel portefeuille est donc sans risque, et doit donc avoir le même rendement que toute opération sans risque entre t et $t+1$, par exemple l'opération qui consiste à acheter en t un titre zéro-coupon d'échéance $t+1$:

$$\frac{V_{t+1}(x_0)}{V_t(x_0)} = \frac{1}{B(t,t+1)}$$

La traduction de cette condition conduit à la relation :

$$\frac{1 - h^*_{t+1}(u_1)}{h_{t+1}(u_1) - h^*_{t+1}(u_1)} = \frac{1 - h^*_{t+1}(u_2)}{h_{t+1}(u_2) - h^*_{t+1}(u_2)}$$

avec $u_1 = T_1 - (t+1)$ et $u_2 = T_2 - (t+1)$. Cette relation est valide pour toute valeur de t, T_1 et T_2 (avec $T_1 > t$ et $T_2 > t$). Ainsi comme rien ne restreint le choix de T_1 et T_2, l'expression :

$$\frac{1 - h^*_{t+1}(u)}{h_{t+1}(u_1) - h^*_{t+1}(u)}$$

est indépendante de u et sera notée π_{t+1} :

$$\pi_{t+1} = \frac{1 - h^*_{t+1}(u)}{h_{t+1}(u_1) - h^*_{t+1}(u)}$$

ou encore :

$$\forall\, t,\ \ \forall\, u\ ,\quad \pi_t h_t(u) + (1 - \pi_t)\, h^*_t(u) = 1 \tag{8.5}$$

Ce résultat est fondamental et on peut remarquer de plus que π_t est une probabilité :

Proposition 9 *L'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une probabilité $\pi = (\pi_t)$ telle que :*

$$E^{\pi}(H_t(.)\ /\ \mathcal{F}_{t-1}) = 1$$

De plus, cette probabilité π est équivalente à la probabilité p au sens où :

$$\pi_t = 0 \Longleftrightarrow p_t = 0$$

et

$$\pi_t = 1 \Longleftrightarrow p_t = 1$$

Preuve : La première partie de la proposition résulte des calculs qui précèdent. Nous avons $\pi_t \in [0,1]$ si seulement si $h_t(.)$ et $h_t^*(.)$ ne sont pas du même côté vis à vis de 1. Supposons donc par exemple que l'on ait :

$$1 < h_t(u), h_t^*(u)$$

alors on peut construire en $t-1$ un portefeuille de coût nul àà partir d'un titre d'échéance T et de x titres de maturité 1, en prenant :

$$x = -\frac{B(t-1,T)}{B(t-1,t)}$$

Sa valeur en t est :

$$B(t,T) + x = \frac{B(t-1,T)}{B(t-1,t)} \left[H_t(T-t) - 1\right]$$

dont la valeur est toujours positive quoiqu'il arrive. Ceci est impossible par A.O.A. On peut évidemment refaire le même raisonnement dans l'autre cas : $h_t(u), h_t^*(u) < 1$. Par conséquent, on peut toujours supposer $h_t(.) > 1$ et $h_t^*(.) < 1$. Par ailleurs, $\pi_t = 0$ (resp. $\pi_t = 1$) est équivalent à $h_t^*(.) = 1$ (resp. $h_t(.) = 1$) ; en utilisant le même portefeuille que précédemment, on constate que celui-ci a toujours un coût nul et une valeur en t positive ou nulle et même strictement positive si H_t prend la valeur h_t. Ceci n'est possible que si et seulement si $p_t = 0$ (resp. $p_t = 1$).

Par conséquent, il apparaît naturellement une nouvelle probabilité π_t, dépendant de $\mathcal{F}_{t-1}$ si $h_t(.)$ et $h_t^*(.)$ en dépendent eux-même, sous laquelle $H_t(.)$ est d'espérance conditionnelle égale à 1 :

$$E^\pi \left(H_t(.) \ / \ \mathcal{F}_{t-1}\right) = 1$$

On désignera désormais l'espérance calculée avec les probabilités p par E et celle calculée avec les probabilités π_t par E^π. Reprenant l'équation du modèle de base (8.2) on peut alors écrire :

$$E^\pi \left[B(t,T) \ / \ \mathcal{F}_{t-1}\right] = B^f(t-1,t,T) = \frac{B(t-1,T)}{B(t-1,t)}$$

et plus généralement :

$$B(0,T) = E^\pi \left[B(t,T).\prod_{k=0}^{t-1} B(k,k+1) \ / \ \mathcal{F}_0\right]$$

Cette probabilité est appelée probabilité risque-neutre (risk-neutral probability). Elle est a priori différente de la probabilité “objective” p. Elle est dite risque-neutre car, d'après ce qui précède, on a :

$$B(t,T) = E^\pi(B(t+1,T) \ / \ \mathcal{F}_t).B(t,t+1)$$

ce qui signifie que le prix aujourd'hui t d'un zéro-coupon d'échéance T est l'espérance (sous π) du prix de ce titre en $t+1$, actualisé (le facteur d'actualisation étant $B(t,t+1)$). Or une économie dans laquelle les prix auraient ce genre de propriété serait une économie où les agents seraient neutres vis-à-vis du risque. Notons que ce n'est pas le cas ici puisque la probabilité π est différente de la probabilité “objective” p.

8.2.4 Propriété de martingale

Sous la probabilité π, de nombreuses propriétés peuvent être obtenues. Ainsi, sous π, le processus des prix actualisés est une martingale. Afin de préciser ce point, nous définissons le facteur d'accumulation :

$$\beta_t = \left[\prod_{k=0}^{t-1} B(k,k+1)\right]^{-1}$$

β_t est donc la valeur obtenue en capitalisant un investissement d'1 euro en 0, aux taux courts successifs. Avec cette notation, on a :

Proposition 10 *Sous (π), le processus $\left(\frac{B(t,T)}{\beta_t}\right)_t$ est une martingale, i.e :*

$$E^\pi \left(\frac{B(t,T)}{\beta_t} \ / \ \mathcal{F}_s\right) = \frac{B(s,T)}{\beta_s}$$

Preuve : D'après la relation fondamentale (8.2) :

$$B(t,T) = \frac{B(t-1,T)}{B(t-1,t)} H_t(T-t)$$

soit :

$$E^{\pi}\left(B(t,T) \mathbin{/} \mathcal{F}_{t-1}\right) = \frac{B(t-1,T)}{B(t-1,t)}$$

Comme $\frac{1}{B(t-1,t)} = \frac{\beta_{t-1}}{\beta_t}$, on déduit :

$$E^{\pi}\left(\frac{B(t,T)}{\beta_t} \mathbin{/} \mathcal{F}_{t-1}\right) = \frac{B(t-1,T)}{\beta_{t-1}}$$

En réitérant l'argument, on en déduit la propriété cherchée. π est donc la probabilité qui rend martingale le processus des prix actualisés. En particulier, on obtient puisque $B(T,T) = 1$:

$$\forall\, T \ ,\ E^{\pi}\left(\frac{1}{\beta_T} \mathbin{/} \mathcal{F}_0\right) = B(0,T)$$

8.2.5 Changement de paramétrage

A une date t donnée, π_t, $h_t(.)$ et $h_t^*(.)$ sont inconnus et devront donc être spécifiés. On peut déjà remarquer que l'absence d'opportunités d'arbitrage permet d'éliminer un de ces paramètres par la relation (8.5). L'objet des paragraphes suivants sera de rajouter des hypothèses supplémentaires pour obtenir la spécification complète du modèle. Cependant, les fonctions $h_t(.)$ et $h_t^*(.)$ n'ont pas d'interprétation financière immédiate et il est donc plus naturel de trouver un changement de paramétrage plus financier. Pour cela, nous allons montrer que la volatilité des taux à terme instantanés peut constituer une paramérisation naturelle, qui permet en outre de ce rapprocher du point de vue des modèles en temps continu.

Définissons les taux à terme instantanés comme :[1]

$$f(t,T) = -Ln\, \frac{B(t,T+1)}{B(t,T)}$$

Il est facile de voir, à l'aide de (8.3) que :

$$\frac{B(t,T+1)}{B(t,T)} = \frac{B(0,T+1)}{B(0,T)} \prod_{k=1}^{t} \frac{H_k(T+1-k)}{H_k(T-k)}$$

soit :

$$f(t,T) = f(0,T) + \sum_{k=1}^{t} Ln\, \frac{H_k(T+1-k)}{H_k(T-k)} \tag{8.6}$$

avec

$$f(0,T) = -Ln\, \frac{B(0,T+1)}{B(0,T)}$$

Ceci implique également que :

$$f(t,T) - f(t-1,T) = Ln\, \frac{H_t(T-t)}{H_t(T+1-t)}$$

Définissons par $\sigma(t,T)$ la volatilité des taux à terme instantanés (sous la probabilité risque-neutre π) ; on a :

$$\sigma(t,T) = \sqrt{\pi_t(1-\pi_t)}\left[Ln\, \frac{h_t(T-t)}{h_t^*(T-t)}.\frac{h_t^*(T+1-t)}{h_t(T-t)}\right] \tag{8.7}$$

[1] Il s'agit d'un abus de notation par rapport à ce qui a été défini aux chapitres précédents ; en toute rigueur, il s'agit ici de $Y^f(t,T,T+1)$ qu'on remplace donc par $f(t,T)$ afin d'alléger les notations.

D'après cette équation, il est donc équivalent de se donner $(\pi_t, h_t(.), h_t^*(.))$ ou $(\pi_t, \sigma(t,.))$. En effet, nous avons :

$$Ln\ \frac{h_t(T-t)}{h_t^*(T-t)} - Ln\ \frac{h_t(T+1-t)}{h_t^*(T+1-t)} = \frac{\sigma(t,T)}{\sqrt{\pi_t(1-\pi_t)}}$$

soit par récurrence :

$$Ln\ \frac{h_t(T-t)}{h_t^*(T-t)} = -\frac{1}{\sqrt{\pi_t(1-\pi_t)}} \sum_{s=t}^{T-1} \sigma(t,s) \tag{8.8}$$

La donnée de la fonction $\sigma(t,.)$ est donc équivalente à celle de $Ln\ \frac{h_t(.)}{h_t^*(.)}$. On peut alors exprimer ces deux fonctions à l'aide de $\sigma(t,T)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} h_t(T-t) & = & \frac{1}{\pi_t+(1-\pi_t)exp\left[\frac{1}{\sqrt{\pi_t(1-\pi_t)}}\sum_{s=t}^{T-1}\sigma(t,s)\right]} \\ h_t^*(T-t) & = & \frac{1}{(1-\pi_t)+\pi_t exp\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi_t(1-\pi_t)}}\sum_{s=t}^{T-1}\sigma(t,s)\right]} \end{array}\right. \tag{8.9}$$

Enfin, on peut remarquer qu'il existe une relation entre l'espérance de $f(t,T)$ conditionnellement à $\mathcal{F}_{t-1}$ et sa volatilité $\sigma(t,T)$. On peut donc dire que l'absence d'opportunité d'arbitrage induit une dynamique particulière (sous π) pour les taux à terme instantanés, remarque que l'on retrouvera dans les modèles en temps continu.

Pour conclure, il apparaît que l'absence d'opportunité d'arbitrage impose des contraintes sur les modèles admissibles mais ne permet pas de spécifier la forme des fonctions $h_t(.)$ et $h_t^*(.)$ ou, de façon équivalente, la fonction $\sigma(t,T)$. Il est donc nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires.

8.3 Résolution du modèle dans un cas simple : le modèle de Ho et Lee

On peut parvenir à une spécification complète du modèle moyennant quelques hypothèses supplémentaires.

Hypothèse 1 : La probabilité π_t ne dépend pas de t et la volatilité des taux à terme instantanés ne dépend que de la maturité $T-t$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \pi_t & = & \pi \\ \sigma(t,T) & = & \sigma(T-t) \end{array}\right.$$

où $\sigma(.)$ est une fonction déterministe.

Compte-tenu de ce que nous avons dit sur les liens entre les deux types de paramétrage, il est clair que cette hypothèse est équivalente à dire que les fonctions h et h^* ne dépendent pas du temps. Par ailleurs, on fait l'hypothèse dite d'indépendance du chemin suivi

Hypothèse 2 : La valeur de tout portefeuille à la date t ne dépend que du nombre de fois où H a pris la valeur h.

Plus précisément, un portefeuille constitué en t a la même valeur en $t+2$ dans les 2 configurations suivantes :

$$(*)\left\{\begin{array}{l} H_{t+1} \equiv h \\ H_{t+2} \equiv h^* \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (**)\left\{\begin{array}{l} H_{t+1} \equiv h^* \\ H_{t+2} \equiv h \end{array}\right.$$

Dans le scénario (*), le prix en $t+2$ d'un zéro-coupon d'échéance T est, en fonction de l'information disponible en t :

$$B(t+2,T) = \frac{B(t,T)}{B(t,T+2)} h^*(T-t-2).\frac{h(T-t-1)}{h(1)}$$

alors que dans le scenario (**) :

$$B(t+2,T) = \frac{B(t,T)}{B(t,T+2)} h(T-t-2) \frac{h^*(T-t-1)}{h^*(1)}$$

En égalisant les 2 expressions, on obtient :

$$\frac{h(T-t-2)}{h^*(T-t-2)} = \frac{h(T-t-1)}{h^*(T-t-1)} . \frac{h^*(1)}{h(1)}$$

soit :

$$\frac{h(u)}{h^*(u)} = \frac{h(u-1)}{h^*(u-1)} . \frac{h(1)}{h^*(1)}, \quad \forall\, u \geq 1 \tag{8.10}$$

Exprimée en fonction des volatilités des taux à terme instantanés, cette condition signifie simplement que $\sigma(t,T)$ est constante :

Proposition 11 *L'hypothèse d'indépendance du chemin suivi est équivalente à l'hypothèse de volatilité constante (sous la probabilité risque-neutre) des taux à terme instantanés.*

Cette proposition permet ainsi de donner un contenu financier à l'hypothèse d'indépendance du chemin suivi. Utilisant les formules de passage entre les deux paramétrages (8.9), on deduit le résultat suivant :

Proposition 12 *Sous les deux hypothèses précédentes 1 et 2, les fonctions $h(.)$ et $h^*(.)$ ont la forme explicite suivante :*

$$h(u) = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{-u}} \qquad h^*(u) = \frac{1}{1-\pi+\pi\delta^u} \tag{8.11}$$

avec

$$\delta = \frac{h(1)}{h^*(1)} = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}}$$

où σ est la volatilité (constante) des taux à terme instantanés sous la probabilité risque-neutre.

On voit donc que l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage combinée à l'hypothèse d'indépendance du chemin suivi conduit à des formulations explicites pour h et h^* en fonction de 2 paramètres inconnus : π et δ (ou σ) qu'il est donc nécessaire d'estimer. Une généralisation naturelle de ce modèle est de considérer désormais que la volatilité $\sigma(t,T)$ est non plus constante mais fonction de $T-t$.

8.4 Les extensions du modèle de Ho et Lee

8.4.1 Le modèle à volatilité exponentielle

Ce modèle propose de remplacer l'hypothèse d'indépendance du chemin suivi (i.e de volatilité constante) par l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3 La volatilité des taux à terme instantanés est de la forme :

$$\sigma(t,T) = \sigma(T-t) = \sigma e^{-\lambda(T-t)}$$

Ce cadre contient comme cas particulier le modèle de Ho et Lee lorsqu'on prend $\lambda = 0$. Utilisant à nouveau les formules de passage (8.9), le modèle s'écrit donc :

Proposition 13 *Sous les hypothèses 1 et 3, les fonctions h et h^* sont données par :*

$$\begin{cases} h(u) &= \frac{1}{\pi+(1-\pi)exp[\frac{\sigma}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{1-e^{-\lambda}}]} \\ \\ h^*(u) &= \frac{1}{1-\pi+\pi exp[-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{1-e^{-\lambda}}]} \end{cases}$$

Le modèle est donc paramétré par π, σ et λ.

On voit donc que ce modèle introduit un degré de liberté supplémentaire à travers le paramètre λ. On peut toutefois se demander pourquoi une forme exponentielle a été choisie. Il existe au moins deux caractérisations équivalentes de ce modèle qui mettent en évidence son intérêt.

La première justification possible consiste à dire que le modèle à volatilité exponentielle est le seul modèle de type binomial pour lequel il existe une variable d'état identifiable à un taux. Ceci signifie que tous les taux à la date t ne dépendent que d'une seule variable aléatoire qu'on peut identifier à un taux particulier :

Proposition 14 *Le modèle est à volatilité exponentielle si et seulement si tous les taux sont fonctions linéaires d'une variable d'état.*

Preuve : Partons de la dynamique de $f(t,T)$ donnée dans l'équation (8.6) :

$$f(t,T) = f(0,T) + \sum_{k=1}^{t} Ln \, \frac{H_k(T-k)}{H_k(T+1-k)}$$

$f(t,T)$ apparaît comme la somme d'une suite de perturbations de Bernoulli. Introduisons la suite de variables aléatoires indépendantes (ϵ_k) où ϵ_k prend les deux valeurs :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1-\pi}{\pi}} & \text{avec probabilité } \pi \\ \\ \sqrt{\frac{\pi}{1-\pi}} & \text{avec probabilité 1-}\pi \end{cases}$$

L'aléa ϵ_k indique donc si à la date k, H_k a pris la valeur h ou h^* ; par ailleurs, sa définition particulière assure que (ϵ_k) est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et réduites (sous π). Il s'agit donc d'un bruit blanc. On peut alors exprimer les perturbations de la dynamique de $f(t,T)$ en fonction de (ϵ_k). Plus précisément, on écrira :

$$Ln \, \frac{H_k(T-k)}{H_k(T+1-k)} = \sigma(T-k)\epsilon_k + b(T-k)$$

où la fonction b peut se calculer en égalisant les espérances, de telle sorte qu'on obtient :

$$f(t,T) = f(0,T) + \sum_{k=1}^{t} \sigma(T-k)\epsilon_k + \sum_{k=1}^{t} b(T-k)$$

Sous cette forme, on peut démontrer la proposition. Supposons d'abord que les volatilités soient exponentielles, on a alors :

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma e^{-\lambda(T-t)} \sum_{k=1}^{t} e^{-\lambda(t-k)} \varepsilon_k + \sum_{k=1}^{t} b(T-k) \tag{8.12}$$

Faisant $T = t$, on obtient également l'équation du taux court :

$$r(t) = f(0,t) + \sigma \sum_{k=1}^{t} e^{-\lambda(t-k)} \varepsilon_k + \sum_{k=1}^{t} b(t-k) \tag{8.13}$$

Eliminant la partie aléatoire entre les deux équations, on obtient :

$$f(t,T) = e^{-\lambda(T-t)} r_t + \tilde{b}(T-t)$$

Tous les taux à terme et tous les taux zéro-coupon sont donc des fonctions (linéaires) d'une seule variable aléatoire prise ici égale au taux court.

Inversement, cherchons quelle forme de volatilité permet d'avoir un modèle à une variable d'état identifiable à un taux (par exemple le taux court). Il faut traduire :

$$f(t,T) = F(t,T,r_t)$$

où F est une fonction déterministe. On montre d'abord que nécessairement la fonction F est linéaire. En effet, $f(t,T)$ et r_t s'écrivent sous la forme suivante (avec des notations évidentes) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(t,T) & = & \sum_{k=1}^{t} \sigma(T-k)\varepsilon_k + \beta(T-t) \\ \\ r_t & = & \sum_{k=1}^{t} \sigma(t-k)\varepsilon_k + \beta(0) \end{array}\right. \tag{8.14}$$

On peut inverser la représentation de r_t de telle sorte que ε_t s'exprime en fonction de $r_t, r_{t-1}, \ldots, r_1$. Ainsi $f(t,T)$ peut lui-même s'écrire en fonction de $r_t, r_{t-1}, \ldots, r_1$, c'est-à-dire (les parties déterministes sont omises afin de simplifier les écritures) :

$$f(t,T) \# \sum_{k=1}^{t} \tilde{\sigma}(T-k) r_k$$

Nécessairement, la fonction F est linéaire en r_t. Enfin pour que $f(t,T)$ s'écrive :

$$f(t,T) \# \alpha(T-t) r_t$$

il faut que, d'après (8.14) :

$$\sigma(T-k) = \alpha(T-t)\sigma(t-k), \;\; \forall\, k \leq t \leq T$$

Faisant $u = t-k$, $T = t+1$, on a :

$$\sigma(u+1) = \alpha(1)\sigma(u), \;\; \forall\, u \geq 0$$

ce qui implique que la quantité $\sigma(u)$ est exponentielle en u. Ainsi, si on souhaite avoir un modèle de taux dépendant d'une variable d'état identifiable à un taux, alors nécessairement les volatilités sont exponentielles. Remarquons également que la linéarité des taux à terme en fonction du taux court permet, en inversant la formule, d'identifier la variable d'état particulière prise ici (en l'occurrence le taux court r_t) à tout autre taux ou même à une combinaison de taux. Le fait de choisir le taux court comme variable d'état n'est donc pas ici restrictif. Enfin, ce modèle est un début de justification aux représentations factorielles linéaires étudiées au chapitre précédent ; il est de plus beaucoup plus précis puisque nous avons montré que, pour être compatible avec l'absence d'opportunités d'arbitrage, les sensibilités aux facteurs d'une représentation factorielle linéaire sur les taux devaient avoir une forme particulière (de type exponentiel).

Une seconde caractérisation de ce modèle a trait à la dynamique particulière des taux. En effet, l'équation de la dynamique de (r_t) donnée par l'équation (8.13), on voit que :

$$r_t = e^{-\lambda} r_{t-1} + \mu_t + \sigma \epsilon_t$$

où μ_t est une fonction déterministe de t. On constate donc que, sous la probabilité risque-neutre, (r_t) est un processus autorégressif d'ordre 1 (AR(1)). Sous cette forme, on interprète λ comme un paramètre de retour à la moyenne. Inversement, si (r_t) suit un AR(1), alors les volatilités $\sigma(T-t)$ sont nécessairement de type exponentiel. De plus, comme tous les taux sont fonctions linéaires de r_t, ils suivent également des processus AR(1). Dans le cas particulier du modèle de Ho et Lee ($\lambda = 0$), (r_t) est donc une marche aléatoire, donc sans retour à la moyenne.

Enfin, il faut remarquer que (r_t) n'a pas la même dynamique sous la vraie probabilité p puisque (ϵ_t) n'est plus centrée sous p. Pour résumer, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 15 *Sous l'hypothèse 1, le modèle à volatilité exponentiel peut être défini par les 3 caractérisations suivantes équivalentes :*

1. *la volatilité des taux à terme instantanés est de la forme :* $\sigma(t,T) = \sigma e^{-\lambda(T-t)}$
2. *les taux à la date t sont des fonctions linéaires d'un taux particulier (par exemple, le taux court) :* $f(t,T) = e^{-\lambda(T-t)} r_t + \tilde{b}(T-t)$
3. *le taux court (ainsi que tous les autres taux) est un AR(1) sous la probabilité risque-neutre :* $r_t = \mu_t + e^{-\lambda} r_{t-1} + \sigma \epsilon_t$.

On voit qu'à ce stade et à la lumière des différentes caractérisations proposées, on peut envisager de nombreuses extensions possibles :
- augmenter le nombre d'aléa,
- supposer que (r_t) suit un AR(q) avec $q \geq 2$,
- proposer d'autres fonctions de volatilité,
- relâcher l'hypothèse de base en supposant que π dépend du temps, $\sigma(t,T)$ fonction de t et T (et non plus de la maturité $T-t$)...

Nous développons maintenant quelques unes de ces pistes.

8.4.2 Modèle à plusieurs aléa

On étudie ici le cas de plusieurs aléa, ce qui avec nos notations donne :

$$Ln\ \frac{H_t(T-t)}{H_t(T+1-t)} = \sigma_1(T-t)\varepsilon_{1t} + \sigma_2(T-t)\varepsilon_{2t} + b(t,T)$$

où $(\varepsilon_{1t}, \epsilon_{2t})$ sont deux perturbations indépendantes (sous la probabilité risque-neutre) de loi de Bernoulli de paramètres respectifs π_1 et π_2. Il y a donc 4 réalisations possibles de la fonction H_t. On peut alors imposer des fonctions de volatilité du type exponentiel :

$$\begin{cases} \sigma_1(T-t) &= \sigma_1 e^{-\lambda_1(T-t)} \\ \sigma_2(T-t) &= \sigma_2 e^{-\lambda_2(T-t)} \end{cases}$$

A titre d'exemple, Heath, Jarrow et Morton (1990) propose de prendre $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$. On obtient ainsi un modèle à deux facteurs. En suivant la même démonstration que précédemment, on constate que les taux sont des fonctions linéaires de deux taux particuliers, qu'on peut identifier, par exemple au taux court et à un taux "long".

8.4.3 Modèle de Black, Derman et Toy

Ce modèle prend un point de vue un peu différent. Il considère toujours que π est constant au cours du temps mais la fonction de volatilité dépend de t et de T et pas seulement de $T-t$. De plus, il ne cherche pas d'emblée à imposer une forme fonctionnelle précise pour cette fonction de volatilité. Plus précisément, ce modèle suppose trois choses :
- la courbe des taux à la date initiale 0 est connue (hypothèse déjà faite jusqu'à présent),
- la courbe des volatilités initiales est également connue (la notion de courbe de volatilités est précisée ci-après),
- il y a indépendance du chemin suivi.

Traduisons d'abord l'hypothèse d'indépendance du chemin suivi dans ce contexte. En remarquant que les fonctions h et h^* dépendent de t, on a :

$$\frac{h_t(u)}{h_t^*(u)} = \frac{h_{t-1}(u+1)}{h_{t-1}^*(u+1)} \frac{h_{t-1}^*(1)}{h_{t-1}(1)}, \quad \forall u \geq 1 \tag{8.15}$$

En terme de volatilité, cette équation s'écrit :

$$\sigma(t,T) = \sigma(t-1,T)$$

et donc :

$$\sigma(t,T) = \sigma(0,T)$$

Par conséquent, la donnée de la courbe des volatilités initiales, $(f(0,T))_T$ permet donc de reconstituer toutes les volatilités ultérieures et donc d'expliciter les fonctions $h_t(.)$ et $h_t^*(.)$.

Une autre approche consiste à se donner la volatilité du taux court $\sigma(t,t+1)$ pour tout t. En effet, on peut toujours dérouler la récurrence de l'équation (8.15) pour obtenir :

$$\frac{h_t(u)}{h_t^*(u)} = \prod_{k=0}^{u-1} \frac{h_{t+k}(1)}{h_{t+k}^*(1)} \tag{8.16}$$

soit, en terme de volatilité :

$$\sigma(t,T) = \sigma(T,T+1)$$

Par conséquent, si on se donne à la date 0 la fonction $\sigma(t,t+1)$ pour tout t, on a alors toutes les fonctions de volatilité. Ces deux approches sont donc très souples puisqu'on ne contraint pas les fonctions de volatilité à avoir une forme particulière ; en revanche, elle nécessite beaucoup d'information notamment sur les volatilités initiales.

8.5 Applications à la valorisation des biens contingents

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés aux déformations de la structure des taux et principalement aux contraintes imposées par l'absence d'opportunités d'arbitrage sur ces déformations. Nous allons maintenant nous concentrer sur l'application à l'évaluation des biens contingents. En effet, la principale application des modèles décrits aux paragraphes précédents est de donner un prix (d'arbitrage) aux biens contingents dépendant de la structure des taux et de ses évolutions. Pour simplifier nous nous limitons au cas où l'hypothèse 1 est satisfaite.

8.5.1 Principe d'évaluation

Il s'agit d'une évaluation par arbitrage, et donc très similaire aux raisonnements déjà tenus, notamment pour faire apparaître la probabilité risque-neutre. Considérons un actif dont le processus de prix sera noté (C_t) tel que C_t soit une fonction connue de $H_1(.), ..., H_t(.)$:

$$C_t = F_t\left[H_1, ..., H_t\right]$$

Ainsi C_t est connu à partir de la date t. Constituons un portefeuille, à la date t comprenant :
- l'actif C_t (en quantité x)
- un zéro-coupon d'échéance T

Le prix à la date t de ce portefeuille est :

$$V_t = xC_t + B(t,T)$$

En $t+1$, ce portefeuille ne peut prendre que deux valeurs :

$$V_{t+1} = \begin{cases} xF_{t+1}(H_1, ..., H_t, H_{t+1} = h) + \frac{B(t,T)}{B(t,t+1)} h(T-t-1) \\ \\ xF_{t+1}(H_1, ..., H_t, H_{t+1} = h^*) + \frac{B(t,T)}{B(t,t+1)} h^*(T-t-1) \end{cases}$$

On peut donc choisir à la date t, x de telle sorte que les 2 valeurs soient égales. Il faut pour cela connaître à la date t : la fonction F_{t+1} (mais nous l'avons supposé), les fonctions h et h^* et la structure des taux $B(t,.)$. On obtient donc un portefeuille sans risque puisque sa valeur en $t+1$ est connue quelque soit l'aléa survenant entre t et $t+1$. Par absence d'opportunité d'arbitrage, son rendement doit être égal au rendement une période :

$$\frac{V_{t+1}}{V_t} = \frac{1}{B(t,t+1)}$$

ce qui conduit à :

$$C_t = B(t,t+1).\left[\pi.F_{t+1}\left(H_1...H_t, H_{t+1} = h\right) + (1-\pi)F_{t+1}\left(H_1...H_t, H_{t+1} = h^*\right)\right]$$

en utilisant :

$$\pi = \frac{1 - h^*(.)}{h(.) - h^*(.)}$$

Par conséquent, on a la relation fondamentale d'évaluation :

$$C_t = B(t,t+1)E^{\pi}(C_{t+1} \;/\; F_t)$$

Le prix d'un bien contingent est donc sa valeur espérée (sous π), actualisée. Par récurrence :

$$C_t = \beta_t E^{\pi} \left(\frac{C_s}{\beta_s} \ / \ \mathcal{F}_t \right) \tag{8.17}$$

avec

$$\beta_t = \prod_{k=0}^{t-1} \frac{1}{B(k, k+1)}$$

Connaissant l'ensemble des paramètres qui gouvernent le modèle, on peut donner un prix à tout actif contingent pour peu que son prix en t soit une fonction connue des aléa survenus jusqu'en t. Ainsi une option sur un zéro-coupon, d'échéance t est un actif qui donne droit en s à :

$$[B(s, T) - K]^+$$

où K est le prix d'exercice de l'option.

Le prix en s de l'option est bien une fonction déterministe des aléa $H_1, ..., H_s$ et donc le prix en t de cette option est :

$$C(t, s, T, K) = \beta_t . E^{\pi} \left[\frac{[B(s, T) - K]^+}{\beta_s} \ / \ \mathcal{F}_t \right]$$

Avant de donner quelques applications, il est utile d'introduire d'autres probabilités qui permettent d'exprimer plus simplement les formules d'évaluation.

8.5.2 Autres probabilités - Probabilités forward-neutres

Quand la probabilité risque-neutre (π) a été construite, nous avons remarqué qu'elle rendait martingale le processus des prix actualisés (par le taux court) ; cette propriété incite, en renversant l'argument, à chercher d'autres probabilités rendant martingale d'autres processus que les prix actualisés. Ces probabilités sont appelés forward-neutres ; elles rendent martingales les processus :

$$\frac{B(t, T)}{B(t, m)}$$

où m est une date quelconque donnée. Intuitivement, ceci revient à changer de point de vue : au lieu d'utiliser le numéraire de la date 0 (comme c'est le cas en prenant β_t), on considère le numéraire de la date m.

Pour faire apparaître ces nouvelles probabilités, notées π_m^f, partons de l'équation désirée :

$$E^{\pi_m^f} \left[\frac{B(s, T)}{B(s, m)} \ / \ \mathcal{F}_t \right] = \frac{B(t, T)}{B(t, m)}, \ \forall \ t < s < m, T$$

et de la propriété correspondante sur π :

$$E^{\pi} \left(\frac{B(s, T)}{\beta_s} \ / \ \mathcal{F}_t \right) = \frac{B(t, T)}{\beta_t}$$

On peut l'écrire :

$$E^{\pi} \left(\frac{B(s, T)}{B(s, m)} . \frac{B(s, m)}{\beta_s} \ / \ \mathcal{F}_t \right) = \frac{B(t, T)}{\beta_t} \tag{8.18}$$

Ainsi apparaît naturellement, la quantité :

$$\mathcal{E}_{s,m} = \frac{B(s, m)}{\beta_s}$$

qui s'interprète comme le rapport du prix en s d'1F de la date m et le prix (plus exactement de la valeur acquise) en s d'1F de la date 0. C'est en ce sens qu'on parle de changement de numéraire. Ce processus

$(\mathcal{E}_{s,m})_s$ est martingale sous π :

$$\begin{aligned} E^{\pi}\left(\mathcal{E}_{s,m} \ / \ \mathcal{F}_t\right) &= E^{\pi}\left(\frac{B(s,m)}{\beta_s} \ / \ \mathcal{F}_t\right) \\ &= \frac{B(t,m)}{\beta_t} = \mathcal{E}_{t,m} \end{aligned}$$

On peut réécrire (8.18) sous la forme :

$$E^{\pi}\left(\frac{B(s,T)}{B(s,m)}.\mathcal{E}_{s,m} \ / \ \mathcal{F}_t\right) = \frac{B(t,T)}{B(t,m)}.\mathcal{E}_{t,m}$$

ou :

$$E^{\pi}\left(\frac{B(s,T)}{B(s,m)}.\frac{\mathcal{E}_{s,m}}{\mathcal{E}_{t,m}} \ / \ \mathcal{F}_t\right)\frac{B(t,T)}{B(t,m)}$$

Définissons alors l'espérance par rapport à la probabilité π_m^f par :

$$E^{\pi_m^f}\left[X_s \ / \ \mathcal{F}_t\right] = E^{\pi}\left[X_s.\frac{\mathcal{E}_{s,m}}{\mathcal{E}_{t,m}} \ / \ \mathcal{F}_t\right]$$

pour toute variable aléatoire X_s, et on a la forme cherchée :

$$E^{\pi_m^f}\left(\frac{B(s,T)}{B(s,m)} \ / \ \mathcal{F}_t\right) = \frac{B(t,T)}{B(t,m)}$$

à condition que π_m^f puisse s'interpréter comme une probabilité (pour que $E^{\pi_m^f}$ soit une véritable espérance). C'est effectivement le cas puisque $\frac{\mathcal{E}_{s,m}}{\mathcal{E}_{t,m}}$ est positif et que :

$$E^{\pi_m^f}\left(1 \ / \ \mathcal{F}_t\right) = E^{\pi}\left(\frac{\mathcal{E}_{s,m}}{\mathcal{E}_{t,m}} \ / \ \mathcal{F}_t\right) = 1$$

On a de plus la formule de passage :

$$\begin{aligned} E^{\pi_m^f}\left[X_s \ / \ \mathcal{F}_t\right] &= E^{\pi}\left(X_s\frac{\mathcal{E}_{s,m}}{\mathcal{E}_{t,m}} \ / \ \mathcal{F}_t\right) \\ &= E^{\pi}\left(X_s.\frac{B(s,m)}{B(t,m)}.\frac{\beta_t}{\beta_s} \ / \ \mathcal{F}_t\right) \end{aligned} \tag{8.19}$$

Faisant $s = t + 1$, on obtient :

$$E^{\pi_m^f}\left[X_{t+1} \ / \ \mathcal{F}_t\right] = E^{\pi}\left[X_{t+1}H_{t+1}(m-t-1) \ / \ \mathcal{F}_t\right]$$

de telle sorte que, formellement les espérances sous π_m^f s'utilisent comme l'espérance sous π en remplaçant dans les calculs le terme π par $\pi_{m,t+1}^f$ avec :

$$\pi_{m,t+1}^f = \pi h(m-t-1)$$

On remarque que les probabilités forward-neutre dépendent nécessairement du temps t.

8.6 Passage à la limite dans les modèles discrets

Il est naturel de chercher la limite des modèles discrets présentés ici lorsque le pas de temps tend vers 0. En effet, si on prend l'exemple du modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein pour évaluer les options sur action, celui-ci converge (pour un choix adéquat des paramètres) vers le modèle de Black-Scholes. Nous verrons ici que les modèles binomiaux de la structure des taux étudiés dans ce chapitre convergent vers certains modèles détaillés au chapitre suivant.

Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cas où la probabilité risque-neutre π ne dépend pas de t et où la fonction de volatilité ne dépend que de la maturité $T-t$. Posons Δ le pas de temps élémentaire. Jusqu'à maintenant, Δ était pris conventionnellement pris égal à 1. Nous allons donc réécrire le modèle pour Δ quelconque. donner Pour cela nous partons des taux forward déjà définis dans les autres sections en introduisant explicitement ce pas de temps. Nous supposons par ailleurs que toutes les conditions de régularité nécessaires sont satisfaites. L'équation de base s'écrit désormais :

$$B(n\Delta, m\Delta) = \frac{B((n-1)\Delta, m\Delta)}{B((n-1)\Delta, n\Delta)} H_{n\Delta}((m-n)\Delta) \tag{8.20}$$

pour n et m deux entiers tels que $n \leq m$.

Pour t et T deux réels positifs tels que $t \leq T$, nous choisirons n et m de telle sorte que :

$$\begin{cases} \lim_{\Delta \to 0} n\Delta & = & t \\ \lim_{\Delta \to 0} m\Delta & = & T \end{cases}$$

En déroulant la récurrence (8.20), on obtient :

$$\frac{B(n\Delta, (m+1)\Delta)}{B(n\Delta, m\Delta)} = \frac{B(0, (m+1)\Delta)}{B(0, m\Delta)} \prod_{k=1}^{n} \frac{H_{k\Delta}((m+1-k)\Delta)}{H_k((m-k)\Delta)} \tag{8.21}$$

La définition naturelle du taux à terme instantané devient :

$$f(n\Delta, m\Delta) = -\frac{1}{\Delta} Ln \, \frac{B(n\Delta, (m+1)\Delta)}{B(n\Delta, m\Delta)}$$

de telle sorte que pour Δ tendant vers 0, on ait :

$$\lim_{\Delta \to 0} f(n\Delta), m\Delta) = -\frac{dLn \; B(t,T)}{dT}$$

qui est bien le taux à terme instantané du temps continu.

D'après l'équation (8.21), $f(n\Delta, m\Delta)$ s'écrit :

$$f(n\Delta, m\Delta) = f(0, (m+1)\Delta) + \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} Ln \, \frac{H_{k\Delta}((m-k)\Delta)}{H_{k\Delta}((m+1-k)\Delta)} \tag{8.22}$$

Le premier terme converge vers $f(0,T)$ et il reste donc à étudier la convergence du second. Nous adoptons le paramétrage en fonction des volatilités car c'est le paramétrage naturel des modèles en temps continu. La volatilité du taux à terme instantané s'écrit :

$$\begin{aligned} Var(f(n\Delta, m\Delta) \,/\, \mathcal{F}_{(n-1)\Delta}) &= \pi(1-\pi)\frac{1}{\Delta^2} \\ & \quad \left[Ln \, \frac{h((m-n)\Delta)}{h((m+1-n)\Delta)} - Ln \, \frac{h^*((m-n)\Delta)}{h^*((m+1-n)\Delta)} \right]^2 \\ &= \sigma((m-n)\Delta)^2 \Delta \end{aligned}$$

On peut alors reparamétrer les fonctions $h(.)$ et $h^*(.)$ en fonction de la volatilité pour obtenir comme précédemment :

$$\begin{cases} h(u\Delta) & = & \frac{1}{\pi + (1-\pi) exp\left[\frac{1}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} \sum_{s=0}^{u-1} \Delta^{3/2} \sigma(s\Delta) \right]} \\ h^*(u\Delta) & = & \frac{1}{(1-\pi) + \pi exp\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} \sum_{s=0}^{u-1} \Delta 3/2 \sigma(s\Delta) \right]} \end{cases}$$

Le second terme de l'équation (8.22) s'écrit donc en fonction des ϵ :

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{k=1}^{n}\sigma((m-k)\Delta)\epsilon_k+\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}b((m-k)\Delta)$$

où la fonction $b(.)$ est égale à :

$$b(u\Delta)=\pi Ln\,\frac{h(u\Delta)}{h((u+1)\Delta)}+(1-\pi)Ln\,\frac{h^*(u\Delta)}{h^*((u+1)\Delta)}$$

On a à nouveau deux termes, l'un stochastique et l'autre déterministe.

Convergence du terme déterministe

En utilisant l'expression des fonctions $h(.)$ et $h^*(.)$ et en effectuant un développement limité de la fonction $b(.)$ au voisinage de $\Delta=0$ (au deuxième ordre en $\Delta^{3/2}$), on obtient :

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}b((m-k)\Delta)=\frac{1}{2}[(\sum_{s=0}^{m-1}\sigma(s\Delta))^2-(\sum_{s=0}^{m-n-1}\sigma(s\Delta))^2]\Delta^2+o(\Delta^2)$$

qui converge donc vers :

$$\frac{1}{2}[(\int_0^T\sigma(s)ds)^2-(\int_0^{T-t}\sigma(s)ds)^2]$$

Convergence du terme stochastique

Ce terme s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{k=1}^{n}\sigma((m-k)\Delta)\varepsilon_k$$

En utilisant le théorème Central Limite, on déduit que cette quantité converge en loi vers une loi normale centrée (sous la probabilité risque neutre) de variance :

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}[\sigma((m-k)\Delta)]^2=\int_0^t\sigma(T-s)^2ds$$

Plus généralement, en utilisant le théorème Central Limite Fonctionnel, on aurait :

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{k=1}^{n}[\sigma((m-k)\Delta)]\varepsilon_k\Longrightarrow_{\Delta\to 0}\int_0^t\sigma(T-s)dW_s$$

où (W_t) est un mouvement brownien standard sous la probabilité risque neutre.

Au total, on a :

$$f(t,T)=f(0,T)+\frac{1}{2}[(\int_0^T\sigma(s)ds)^2-(\int_0^{T-t}\sigma(s)ds)^2]+\int_0^t\sigma(T-s)dW_s$$

Plus généralement, si la volatilité dépendant explicitement du temps, on aurait :

$$f(t,T)=f(0,T)+\int_0^t\sigma(s,T)(\int_s^T\sigma(s,u)du)ds+\int_0^t\sigma(s,T)dW_s \tag{8.23}$$

Par exemple, dans le cas du modèle de Ho et Lee où $\sigma(t,T)=\sigma$, on obtient :

$$f(t,T)=f(0,T)+\sigma^2(Tt-\frac{t^2}{2})+\sigma W_t.$$

On remarque que la limite du modèle discret dépend de la fonction de base $\sigma(.)$ mais ne dépend plus de la probabilité π. Ainsi lorsqu'on cherche à ajuster un modèle de Ho et Lee, il y a a priori deux paramètres à estimer, σ et π. Or, dans le modèle limite, seul σ intervient. Ceci signifie que tout procédure visant à estimer à la fois σ et π produira des estimateurs très instables puisque ces deux paramètres ne sont pas identifiables simultanément dans le modèle limite. En fait, il suffit de fixer une valeur arbitraire pour π et d'estimer seulement σ. Néanmoins, la valeur de π joue sur la vitesse de convergence ; en particulier, si on regarde le terme suivant en Δ^6 du développement de la fonction $b(.)$, on constate qu'il est minimum pour $\pi = 1/2$. Cette valeur de π est donc optimale.

Enfin, notons que p n'intervient pas non plus dans la dynamique risque-neutre de $f(t,T)$ et donc non plus dans les calculs de prix puisque les prix sont des espérances prises sous la probabilité risque-neutre. Ces processus-limite réapparaîtront naturellement au chapitre suivant.

9

Introduction aux modèles en temps continu.

9.1 Introduction

Les principaux concepts (absence d'opportunité d'arbitrage, probabilité risque-neutre,...) ont été abordés dans le cadre des modèles en temps discret. Il apparaît cependant vite nécessaire de travailler dans un cadre continu pour au moins deux raisons : les modèles en temps continu doivent certes être discrétisés pour être utilisables (à des fins d'estimation, ou d'ajustement aux données), mais prendre pour point de départ un modèle en temps discret impose de fixer une unité de temps qui peut ne pas être simultanément adaptée à toutes les situations de marché. De plus, travailler en continu impose une théorie mathématique bien plus complexe mais produit des formules d'évaluation souvent directement exploitables (alors que, dans les modèles discrets, des simulations sont nécessaires), et rend d'une certaine façon, les calculs plus tractables.

Comme dans toutes les théories financières, deux voies ont été étudiées. La première, naturelle chez les économistes, est celle de l'équilibre général qui consiste à modéliser les préférences des agents (supposés rationnels) compte tenu de leur dotation initiale et d'en déduire les prix de tous les actifs. Cette approche globale a le défaut de reposer, pour être opérationnelle, sur des hypothèses difficilement vérifiables (comme par exemple la forme des fonctions d'utilité). La seconde voie est plus modeste car elle suppose donnés les processus de prix d'un certain nombre de titres existant et en déduit quels doivent être, pour des raisons de cohérence, les prix d'autres actifs financiers. Cette règle de cohérence est en fait l'absence d'opportunité d'arbitrage. De fait, on appellera ces modèles des modèles d'arbitrage. L'avantage de ces modèles est d'être beaucoup plus opérationnel et seront ceux étudiés dans ce chapitre.

Il y a en outre deux motivations dans la modélisation des déformations de la structure des taux. La première est explicative et consiste à rendre compte de la structure des taux à toute date (hiérarchie des taux, forme de la courbe...) ; la seconde réside dans le problème de l'évaluation par arbitrage des biens contingents (options, contrats à terme, swaps...). Les premiers modèles en temps continu sont apparus avant le modèle discret de Ho et Lee, vers le milieu des années 70, notamment à la suite des travaux de Black-Scholes sur l'évaluation des prix d'options sur actions. En effet, comme il apparaît clairement dans les chapitres précédents, les obligations, et plus généralement les titres dépendant de la structure des taux ne peuvent être considérés comme des actions, ne serait-ce que parce que les prix zéro-coupon sont non aléatoires à leur échéance. Il est alors nécessaire de développer une théorie propre au marché des titres dépendant de la structure des taux.

Nous suivrons un plan proche de celui du chapitre précédent, correspondant au cadre construit par Heath, Jarrow et Morton . Dans un premier temps, nous nous donnerons une structure probabiliste pour les évolutions possibles de la courbe des taux. Puis nous traduirons l'absence d'opportunités d'arbitrage pour aboutir au fait que ces modèles sont entièrement paramétrés par une fonction de volatilité (des taux à terme instantanés, par exemple). Enfin, des hypothèses additionnelles seront nécessaires pour obtenir une spécification complète des modèles. Ces hypothèses additionnelles consisteront, par exemple, à supposer l'existence de variables d'état. Ainsi tous les prix zéro-coupon à une date donnée deviennent fonctions de ces variables d'état. Cette idée a une traduction naturelle pour les applications financières puisque les stratégies de couverture se réduisent à une immunisation vis à vis de ces variables d'état sous-jacentes. De fait les financiers souhaitent pouvoir donner des prix qui ne dépendent que d'un petit nombre de variables financières.

Avant d'entrer dans les détails, nous rappelons les principales notations utilisées en temps continu. Comme toujours, nous noterons $B(t,T)$ le prix en t d'1 euro reçu en T avec, bien-sr $B(T,T) = 1$ pour tout T. Les taux à terme instantanés $f(t,T)$ seront également souvent utilisés ; ils sont définis par :

$$f(t,T) = -\frac{d}{dT} Ln\ B(t,T)$$

ce qui est équivalent à :

$$B(t,T) = exp - \int_t^T f(t,s)ds$$

Le processus du taux court (r_t) est défini par :

$$r_t = f(t,t).$$

La valeur acquise en t d'1 euro placé en 0 et réinvesti continûment au taux court (r_s) est donc :

$$\beta_t = exp \int_0^t r_s ds$$

On remarque alors que, dans le cas où les taux sont déterministes (i.e : non aléatoires) et uniquement dans ce cas, on a par absence d'opportunité d'arbitrage :

$$\forall\ t \leq T, \quad B(t,T) = exp - \int_t^T r_s ds$$

9.2 Le cadre probabiliste et l'absence d'opportunités d'arbitrage (Heath, Jarrow et Morton)

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, nous donnons une structure probabiliste pour la dynamique de l'ensemble de la structure des taux puis nous dérivons les contraintes imposées par l'absence d'opportunités d'arbitrage. De ce point de vue, les modèles exposés ici sont les prolongements continus des modèles discrets du chapitre précédent.

L'absence d'opportunité d'arbitrage est traduite par l'existence d'une probabilité risque-neutre. On a vu, en effet, dans le cas discret, que les deux hypothèses : absence d'opportunité d'arbitrage et existence d'une probabilité risque-neutre étaient équivalentes. Dans le cas continu, les choses sont plus compliquées. Nous admettrons que l'hypothèse jointe d'absence d'opportunité d'arbitrage et de complétude des marchés est équivalente à l'existence d'une unique probabilité rendant tous les prix actualisés martingales.

Nous retrouverons ensuite par des hypothèses additionnelles certains modèles traditionnels comme ceux de Vasicek et Cox, Ingersoll et Ross.

Comme point de départ du modèle, il faut bien se donner une structure stochastique. Ici, on modélise les taux à terme instantanés comme dans Heath, Jarrow et Morton mais on pourrait tout aussi bien partir des prix des zéro-coupon comme au chapitre précédent. Nous ferons le lien entre ces deux approches équivalentes.

9.2.1 Les mouvements de la structure des taux

Comme nous venons de le dire, nous utilisons une famille de processus pour l'ensemble de la structure des taux. Heath, Jarrow et Morton (1992) choisissent de spécifier les taux à terme instantanés. Cette famille est prise sous la forme suivante :

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)'.dW_s \tag{9.1}$$

où $(f(0,T))_T$ décrit la structure des taux initiale et est supposée donnée et où (W_t) un mouvement Brownien de dimension K sous la probabilité P, où P est la probabilité "objective" des événements. $\sigma(t,T)$ est la volatilité des taux à terme instantanés et $\sigma(t,T)'$ sa transposée.

Sous forme d'équation de diffusion, on peut aussi écrire :

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sum_{i=1}^{K} \sigma_i(t,T)dW_{it}$$

qu'on écrira encore :

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)'.dW_t \tag{9.2}$$

Les fonctions $\alpha(t,T)$ et $\sigma(t,T)$ sont a priori quelconques et peuvent être en particulier aléatoires. Elles doivent toutefois satisfaire des conditions de régularité assurant l'existence d'une solution pour l'équation (9.1) et la légitimité des calculs qui vont suivre. D'une manière générale, nous n'insisterons pas sur ces conditions techniques. De plus la fonction volatilité vérifie une condition d'identifiabilité, qui assure qu'il n'y a pas d'aléa redondants :

Hypothèse La fonction de volatilité satisfait :

$$\begin{pmatrix} \sigma(t,T_1)' \\ \vdots \\ \sigma(t,T_K)' \end{pmatrix} \text{ est inversible pour tout } t \text{ et tout } (T_1,..,T_K) \tag{9.3}$$

Le processus du taux court est obtenu très simplement à partir de (9.1) en faisant $T = t$:

$$\begin{aligned} r_t &= f(t,t) \\ &= f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)'.dW_s \end{aligned} \tag{9.4}$$

On déduit enfin le processus des prix zéro-coupon à partir de la formule usuelle :

$$B(t,T) = exp - \int_t^T f(t,s)ds.$$

En remplaçant $f(t,s)$ par son expression (9.1), et en utilisant le théorème de Fubini pour les intégrales stochastiques (valide d'après les conditions de régularité imposées aux processus de dérive et de volatilité), on obtient :

$$Ln\ B(t,T) = -\int_t^T f(0,\tau)d\tau - \int_0^t ds \int_t^T \alpha(s,\tau)d\tau - \int_0^t \left(\int_t^T \sigma(s,\tau)d\tau\right)'.dW_s \tag{9.5}$$

On peut arranger cette expression en utilisant l'expression du taux court. En effet, d'après l'équation (9.4), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t r_\tau d\tau &= \int_0^t f(0,\tau)d\tau + \int_0^t d\tau \left(\int_0^\tau \alpha(s,\tau)ds\right) + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \sigma(s,\tau)'.dW_s \\ &= \int_0^t f(0,\tau)d\tau + \int_0^t ds \left(\int_s^t \alpha(s,\tau)d\tau\right) + \int_0^t \left(\int_s^t \sigma(s,\tau)d\tau\right)'.dW_s \end{aligned}$$

ce qui donne avec (9.5) :

$$Ln\ B(t,T) = Ln\ B(0,T) + \int_0^t \left[r_s - \int_s^T \alpha(s,\tau)d\tau \right] ds + \int_0^t \left[- \int_s^T \sigma(s,\tau)d\tau \right]' .dW_s \tag{9.6}$$

L'équation de diffusion correspondante s'écrit alors :

$$dLn\ B(t,T) = \left[r_t - \int_t^T \alpha(t,\tau)d\tau \right] dt + \left[- \int_t^T \sigma(t,\tau)d\tau \right]' .dW_t$$

ou encore, en utilisant le lemme d'Itô :

$$dB(t,T) = [r(t) + b(t,T)]B(t,T)dt + B(t,T)\tilde{\sigma}(t,T)'.dW_t \tag{9.7}$$

où $b(t,T)$ et $\tilde{\sigma}(t,T)$ désignent :[1]

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{\sigma}(t,T) & = & -\int_t^T \sigma(t,\tau)d\tau \\ b(t,T) & = & -\int_t^T \alpha(t,\tau)d\tau + \frac{1}{2}\|\tilde{\sigma}(t,T)\|^2 \end{array} \right.$$

A ce stade, aucune contrainte n'est imposée : les équations (9.5) et (9.7) ne sont que les conséquences du modèle général (9.1) :

Proposition 16 *Si la dynamique des taux à terme instantanés s'écrit :*

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)'.dW_s$$

alors les prix zéro-coupon et le taux court instantané s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} B(t,T) & = & B(0,T)exp[\int_0^t \left[r_s - \int_s^T \alpha(s,\tau)d\tau \right] ds + \int_0^t \left[- \int_s^T \sigma(s,\tau)d\tau \right]' .dW_s] \\ r_t & = & f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)'.dW_s \end{array} \right.$$

Disposant des processus de prix, nous pouvons maintenant traduire les contraintes induites par l'absence d'opportunité d'arbitrage.

9.2.2 Absence d'opportunités d'arbitrage

Le raisonnement heuristique habituelle consiste à construire un portefeuille localement sans risque dont le rendement instantané doit alors être le même qu'un placement au taux court r_t.

Considérons un portefeuille de $K+1$ titres zéro-coupon d'échéance $T_1 ... T_{K+1}$, en proportion $x_1 ... x_{K+1}$. La valeur de ce portefeuille à la date t est donc :

$$V_t = \sum_{k=1}^{K+1} x_k B(t, T_k)$$

Choisissons $x_1 ... x_{K+1}$ de telle sorte que V_t soit localement sans risque, et exprimons le fait que V_t a alors le même rendement que le rendement sans risque ; on a alors la condition suivante :

$$[\sum_{k=1}^{K+1} x_k B(t, T_k) \tilde{\sigma}_j(t, T_k) = 0, \qquad j = 1...K] \Longrightarrow [\sum_{k=1}^{K+1} x_k B(t, T_k) b(t, T_k) = 0]$$

[1] $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne de $\mathcal{R}^K$.

D'après le lemme de Farkas, il faut et il suffit que :

$$\exists\, \varphi_1 ... \varphi_K, \ \ \forall\, j, \quad b\,(t, T_j) + \sum_{k=1}^{K} \varphi_k\,(t, T_1 ... T_{K+1})\,\tilde{\sigma}_k\,(t, T_j) = 0 \tag{9.8}$$

qu'on peut écrire encore :

$$\exists\, \varphi = (\varphi_1 ... \varphi_K)', \ \ \forall\, j, \quad b(t, T_j) = -\varphi(t, T_1, \ldots, T_{K+1})'.\tilde{\sigma}(t, T_j) \tag{9.9}$$

Les φ_k dépendent a priori, de t, $T_1, ..., T_{K+1}$. Cependant comme les dates d'échéance $T_1, \ldots, T_{K+1}$ sont quelconques, ils ne dépendent pas de $T_1, \ldots, T_{K+1}$. On les notera par la suite $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{K+1}(t)$. Ils s'interprètent comme des prix du risque associés à chacun des processus Browniens. La contrainte d'absence d'opportunités d'arbitrage impose donc des restrictions sur les termes de dérive et de volatilité de la dynamique des prix zéro-coupon. En dérivant par rapport à T cette condition, on obtient de façon équivalente une contrainte sur les termes de dérive et de volatilité correspondant aux taux à terme instantanés :

Proposition 17 *L'absence d'opportunités d'arbitrage implique la contrainte suivante sur la dynamique des prix et des taux à terme instantanés :*

$$\exists\, \varphi = (\varphi_1 ... \varphi_K)' \ \textit{tel que}\ b(t, T) = -\varphi(t)'.\tilde{\sigma}(t, T), \ \ \forall\, T \geq t \tag{9.10}$$

ou de façon équivalente :

$$\alpha(t, T) + \tilde{\sigma}(t, T)'.\sigma(t, T) = -\varphi(t)'.\sigma(t, T) \tag{9.11}$$

9.2.3 Changement de probabilité

Comme dans les modèles en temps discret, l'absence d'opportunités d'arbitrage implique l'existence d'une nouvelle mesure de probabilité dite risque-neutre, notée Q, sous laquelle les processus de prix actualisés sont martingales. En injectant (9.10) dans l'équation de diffusion des prix, on voit que :

$$dB\,(t, T) = r_t B(t, T) + B(t, T)\tilde{\sigma}(t, T)'.d\tilde{W}_t \tag{9.12}$$

avec

$$d\tilde{W}_t = dW_t - \varphi(t)dt$$

avec $\varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_K(t))'$.

Le processus des prix actualisés $(Z\,(t, T))_t$ est alors martingale sous la mesure de probabilité qui fait de $\left(\tilde{W}_t\right)$ un mouvement Brownien standard. Ceci résulte du théorème de Girsanov.[2]

Ce changement de probabilité s'écrit :

$$\begin{aligned} L_t &= \frac{dQ}{dP} = exp\left[\int_0^t \varphi(s)'dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \parallel \varphi(s) \parallel^2 ds\right] \\ &= exp\left[\int_0^t \varphi(s)'d\tilde{W}_s + \frac{1}{2}\int_0^t \parallel \varphi(s) \parallel^2 ds\right] \end{aligned}$$

Le processus $\left(Z(t, T) = \frac{B(t,T)}{\beta_t}\right)_t$ est donc martingale sous Q puisque, d'après (9.12) :

$$dZ(t, T) = \sigma(t, T)'.d\tilde{W}_t$$

Comme $B(T, T) = 1$, on a alors :

$$\begin{aligned} B(t, T) &= E^Q\left[\tfrac{\beta_t}{\beta_T} \ / \ \mathcal{F}_t\right] \\ &= E^P\left[exp - \textstyle\int_t^T r_s ds \ / \ \mathcal{F}_t\right] \end{aligned} \tag{9.13}$$

[2] Le prix du risque φ est supposé de carré intégrable.

ou encore, en utilisant la probabilité P :

$$B(t,T) = E^P\left[exp - \int_t^T r_s ds.\frac{L_T}{L_t} \;/\; \mathcal{F}_t\right]$$

En résumé, il faut retenir que sous l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, il existe une nouvelle mesure de probabilité Q sous laquelle les prix ont la dynamique donnée par l'équation (9.12). Comme on le verra, tous les problèmes d'évaluation se posent sous cette probabilité ; on peut dès lors "oublier" la probabilité initiale P.

De plus, ayant défini ce changement de probabilité, on peut exprimer tous les processus de diffusion donnés jusqu'à présent (taux à terme instantanés, prix zéro-coupon, taux court...) sous cette nouvelle mesure de probabilité.

Exemple 5 *Utilisation du théorème de Girsanov*
Nous donnons un exemple très simple pour montrer comment le théorème de Girsanov peut s'utiliser en pratique. Plaçons nous dans le cas $K = 1$ (un seul Brownien) et $\varphi(t) = \varphi$. Montrons par exemple que la variable aléatoire $\tilde{W}_t$ suit, sous Q, une loi normale d'espérance nulle et de variance t. Pour toute fonction ψ, on a :

$$\begin{aligned}
E^Q(\psi(\tilde{W}_t) \;/\; \mathcal{F}_0) &= E^P(\psi(\tilde{W}_t)(\frac{dQ}{dP})_t \;/\; \mathcal{F}_0) \\
&= \int_0^t \psi(\tilde{W}_t) exp[\varphi\tilde{W}_t + \frac{1}{2}\varphi^2 t] dP(\omega) \\
&= \int_\Omega \psi(W_t - \varphi t) exp[\varphi W_t - \frac{1}{2}\varphi^2 t] dP(\omega)
\end{aligned}$$

Sous la probabilité P, W_t suit une loi normale d'espérance nulle et de variance t ; on a donc :

$$\begin{aligned}
E^Q(\psi(\tilde{W}_t) \;/\; \mathcal{F}_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - \varphi t) e^{\varphi x - \frac{1}{2}\varphi^2 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy
\end{aligned}$$

en posant $y = x - \varphi t$. Il est alors clair que $\tilde{W}_t$ suit, sous Q, une loi normale d'espérance nulle et de variance t.

9.3 Le modèle sous la probabilité risque-neutre

9.3.1 Les taux à terme instantanés

On obtient très simplement la dynamique des taux à terme instantanés à partir de l'équation de base :

$$\begin{aligned}
df(t,T) &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)'.dW_t \\
&= \left[\int_t^T \sigma(t,\tau)d\tau\right]'.\sigma(t,T)dt + \sigma(t,T)'.d\tilde{W}(t) \qquad (9.14)
\end{aligned}$$

Exemple 6 *Volatilité constante*
Nous nous intéressons ici au cas où la fonction de volatilité est supposée constante : $\sigma(t,T) = \sigma$ et où $K = 1$. Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'une des caractéristiques du modèle de Ho et Lee était d'avoir justement des volatilités des taux à terme instantanés constantes. De plus nous avions donné la limite en temps continu de ce modèle que nous allons retrouver ici. Nous avons en effet :

$$df(t,T) = \sigma^2(T-t)dt + \sigma d\tilde{W}_t.$$

soit en intégrant :

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma^2(Tt - \frac{t^2}{2}) + \sigma\tilde{W}_t$$

qui est bien conforme à l'expression obtenue au chapitre précédent par passage à la limite. On retrouve ainsi comme cas particulier le modèle de Ho et Lee. On pourrait retrouver de même les modèles à volatilité exponentielle en prenant $\sigma(t,T)$ sous la forme $e^{-\lambda(t-s)}$.

9.3.2 Processus du taux court

L'équation (9.4) nous a donné la forme de (r_t), qui s'écrit désormais à l'aide de $\left(\tilde{W}_t\right)$:

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \left[\alpha(s,t) + \varphi(s)'.\sigma(s,t)\right] ds + \int_0^t \sigma(s,t)'.d\tilde{W}_s$$

soit :

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \left(\int_s^t \sigma(s,\tau)d\tau\right)' .\sigma(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)'.d\tilde{W}_s \tag{9.15}$$

Ainsi, sous Q, le processus suivi par (r_t) ne dépend plus du prix du risque de même que les prix des titres zéro-coupon.

Exemple 7 *Volatilité constante et volatilité exponentielle. Si les volatilités sont constantes, l'équation (9.15) devient :*

$$r_t = f(0,t) + \sigma^2\frac{t^2}{2} + \sigma\tilde{W}_t$$

ou

$$dr_t = \mu(t)dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

avec

$$\mu(t) = \sigma^2 t + \partial_2 f(0,t)$$

Le processus (r_t) est donc une marche aléatoire avec dérive.

Lorsque la fonction de volatilité est exponentielle : $\sigma(s,\tau) = \sigma e^{-\lambda(\tau-s)}$, alors r_t est égale à :

$$r_t = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{\lambda}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}(1-e^{-\lambda(t-s)})ds + \sigma\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}d\tilde{W}_s.$$

Il est alors facile de voir que (r_t) suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de la forme :

$$dr_t = (\theta(t) - \lambda r_t)\, dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

avec $\theta(t) = \partial_2 f(0,t) + \lambda f(0,t) + \sigma^2 \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2\lambda}$. Il faut remarquer que le processus du taux court est également un processus de type Ornstein-Uhlenbeck sous P, uniquement si le prix du risque est une fonction non aléatoire du temps. Dans ce cas, seule la fonction $\theta(t)$ est modifiée.

9.3.3 Les prix zéro-coupon

Sous la mesure Q, le processus des prix vérifie :

$$dB(t,T) = r(t)B(t,T)dt + B(t,T)\tilde{\sigma}(t,T)'.d\tilde{W}_t$$

Comme attendu, le taux de rendement espéré (instantané) est égal, dans l'univers corrigé du risque (i.e : sous la probabilité Q), au taux court sans risque r_t. Nous récapitulons ces résultats sous la proposition suivante :

Proposition 18 *Sous la probabilité risque-neutre Q, les taux à terme instantanés et les prix zéro-coupon suivent les équations de diffusion suivantes :*

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \left[\int_t^T \sigma(t,\tau)d\tau\right]'.\sigma(t,T)dt + \sigma(t,T)'.d\tilde{W}(t) \qquad (9.16)\\ dB(t,T) &= r(t)B(t,T)dt + B(t,T)\tilde{\sigma}(t,T)'.d\tilde{W}_t \qquad (9.17)\end{aligned}$$

où :

$$\tilde{\sigma}(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,\tau)d\tau.$$

et la dynamique du taux court instantané s'écrit :

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \left(\int_s^t \sigma(s,\tau)d\tau\right)'.\sigma(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)'.d\tilde{W}_s \qquad (9.18)$$

où $(\tilde{W}_t)$ *est un mouvement Brownien standard sous* Q.

On voit à ce stade qu'on aurait pu spécifier directement les prix zéro-coupon en disant qu'il existe une mesure de probabilité Q telle que les prix zéro-coupon suivent une diffusion du type (9.16). Le modèle est alors paramétré par la fonction $\tilde{\sigma}(.,.)$ et non plus par $\sigma(.,.)$. La dynamique des taux à terme instantanés s'en déduit par la formule :

$$f(t,T) = -\partial_2 Ln\ B(t,T)$$

en remarquant que les deux paramétrages $\tilde{\sigma}(.,.)$ et $\sigma(.,.)$ sont équivalents :

$$\left[\tilde{\sigma}(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,\tau)d\tau\right] \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \sigma(t,T) & = & -\partial_2\tilde{\sigma}(t,T) \\ \tilde{\sigma}(t,t) & = & 0\ \forall\, t \end{array}\right.$$

Cette approche est celle du modèle El Karoui, Myneni et Viswanathan.

9.3.4 Exemple : forme de la courbe des taux dans le cas d'une volatilité constante

Il s'agit d'une application directe des calculs sous la probabilité Q :

$$B(t,T) = E^Q\left[\frac{\beta_t}{\beta_T} \ / \ \mathcal{F}_t\right]$$

soit :

$$B(t,T) = E^Q\left[exp - \int_t^T r_s ds \ / \ \mathcal{F}_t\right]$$

La loi de (r_t) et donc de la variable $\int_t^T r_s ds$ est donnée sous Q par l'équation (9.18). Dans le cas où les fonctions de volatilité sont déterministes, (r_t) est un processus gaussien sous Q ; la variable $\int_t^T r_s ds$ est donc gaussienne également et $B(t,T)$ est donnée par la formule usuelle :

$$B(t,T) = exp\left[-M(t,T) + \frac{V(t,T)}{2}\right]$$

où

$$\begin{aligned} M(t,T) &= E^Q\left[\int_t^T r_s ds \ / \ \mathcal{F}_t\right] \\ V(t,T) &= Var^Q\left[\int_t^T r_s ds \ / \ \mathcal{F}_t\right]\end{aligned}$$

Partons de la dynamique de (r_t) sous l'hypothèse de volatilité constante (avec $K = 1$) :

$$r_t = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \sigma\tilde{W}_t$$

Par conséquent, le taux r_τ suit conditionnellement à F_t une loi gaussienne d'espérance $r_t - f(0,t) + f(0,\tau) + \frac{\sigma^2}{2}(\tau^2 - t^2)$ et de variance $\sigma^2(\tau - t)$. La variable aléatoire $Y = \int_t^T r_\tau d\tau$ suit donc elle-même une loi gaussienne :

$$Y \;/\; \mathcal{F}_t \overset{(Q)}{\rightsquigarrow} N(M(t,T)\;;\;V(t,T))$$

où

$$M(t,T) = (T-t)(r_t - f(0,t)) + \int_t^T f(0,\tau)d\tau + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^2(T+2t)$$

et

$$\begin{aligned} V(t,T) &= Var^Q\left(\int_t^T \sigma\tilde{W}_\tau d\tau \;/\; \mathcal{F}_t\right) \\ &= Var^Q\left(\int_t^T d\tau \int_0^\tau d\tilde{W}_s \;/\; \mathcal{F}_t\right) \\ &= Var^Q\left(\int_t^T (T-s)d\tilde{W}_s \;/\; \mathcal{F}_t\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{3}(T-t)^3 \end{aligned}$$

et donc :

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} exp - (T-t)[r_t - f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)]$$

Le fait d'imposer une volatilité constante implique donc que toute la structure des taux en t ne dépend que du taux court r_t (et de termes déterministes). On obtient ainsi un modèle de taux à une variable d'état.

On pourrait de même calculer les prix zéro-coupon lorsque les volatilités sont exponentielles ($\sigma(s,t) = \sigma e^{-\lambda(t-s)}$). Les calculs sont du même type que précédemment. Le coefficient de r_t est alors $\frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}$.

9.4 L'introduction de variables d'état dans les modèles HJM

Le modèle de taux décrit ici est entièrement paramétré, sous la probabilité risque-neutre Q, par la fonction de volatilité $\sigma(t,T)$. A ce stade, ce modèle est encore trop général puisque cette fonction de volatilité est a priori quelconque. Comme au chapitre précédent, il est donc nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires. La première idée est de prendre des fonctions de volatilités particulières (volatilité constante, exponentielle...). Nous avons vu cependant que, dans certains cas, ce genre d'hypothèse était équivalente à l'existence de variables d'état. Nous allons systématiser cette idée et nous verrons que cette hypothèse est dans certains cas suffisamment contraignante pour permettre une paramétrisation "parcimonieuse" de la volatilité $\sigma(t,T)$.

Nous traitons essentiellement deux cas. Le premier suppose que la fonction de volatilité $\sigma(t,T)$ est déterministe ; le second permet à $\sigma(t,T)$ d'être fonction de variables d'état.

9.4.1 Généralités sur les modèles factoriels

Nous précisons dans ce paragraphe les différentes hypothèses de variables d'état qui peuvent être faites. Elles consistent à supposer que toute la courbe des taux à la date t est fonction de variables d'état particulières. Nous supposons ainsi :

Hypothèse : [Structure factorielle linéaire] Il existe K variables d'état F_{1t}, ..., F_{Kt} telles que :

$$\begin{aligned} \forall\, t \leq T,\quad f(t,T) &= b(t,T) + a_1(t,T)F_{1t} + \ldots + a_K(t,T)F_{Kt} \\ &= b(t,T) + a(t,T)'.F_t \end{aligned}$$

où les fonctions $b(t,T)$ et $a(t,T) = (a_1(t,T), \ldots, a_K(t,T))'$ sont déterministes.

Avec la terminologie des chapitres précédents, les fonctions $a_i(.,.)$ sont les sensibilités aux facteurs (factor loadings). En éliminant les variables F_{kt}, on peut toujours identifier les variables d'état à des taux particuliers (ou même des combinaisons de taux) de telle sorte qu'on aura la caractérisation équivalente suivante :

$$\forall\, t \leq T,\quad f(t,T) = b(t,T) + a_1(t,T)f(t,t+\theta_1) + \ldots + a_K(t,T)f(t,t+\theta_K)$$

où θ_1, ..., θ_K sont K maturités quelconques distinctes. Sous cette forme, les fonctions $b(.,.)$ et $a(.,.)$ doivent satisfaire les conditions de compatibilité suivantes :

$$\begin{cases} b(t,t+\theta_i) &= 0 \\ a_i(t,t+\theta_i) &= 1 \\ a_j(t,t+\theta_i) &= 0 \;\; (j \neq i) \end{cases}$$

9.4.2 Volatilité déterministe et variables d'état

Pour simplifier la présentation, nous supposons ici que la volatilité $\sigma(t,T)$ est déterministe et homogène au sens où elle ne dépend que de la maturité $T-t$:

Hypothèse :

$$\sigma(t,T) = \sigma(T-t)$$

où $\sigma(.)$ est une fonction déterministe.

Les taux à terme instantanés sont donc gaussiens sous la probabilité Q et également sous la probabilité historique P si le prix du risque $\varphi(t)$ est déterministe. Ce modèle est appelé également modèle linéaire gaussien dans le cas plus général où la fonction de volatilité $\sigma(t,T)$ dépend de t et T (et non pas seulement de $T-t$).

Se plaçant maintenant dans le cadre de l'hypothèse factorielle linéaire, nous allons traduire les conséquences de cette hypothèse en calculant la forme de la volatilité $\sigma(.)$, des sensibilités $a(.,.)$ et du terme $b(.,.)$.

Pour cela, nous utiliserons la notation suivante :[3]

$$\tilde{\sigma}(x) = \int_0^x \sigma(y)dy$$

qui permet d'écrire :

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma(T-s)'.\tilde{\sigma}(T-s)ds + \int_0^t \sigma(T-s)'.d\tilde{W}_s$$

ou encore :

$$df(t,T) = \sigma(T-s)'.\tilde{\sigma}(T-t)dt + \sigma(T-t)'.d\tilde{W}_t \tag{9.19}$$

Il nous faut également la dynamique des variables d'état que nous prenons sous la forme :

$$dF_t = D_t dt + V_t.d\tilde{W}_t \tag{9.20}$$

où les D_t est le vecteur de dérive et V_t la matrice de volatilité, D_t étant a priori aléatoires.

[3] Il s'agit, au signe près, de la même notation que précédemment.

Si on identifie les représentations (9.19) et (9.20), on obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\sigma(T-t)'.\tilde{\sigma}(T-t) & = & a(t,T)'.D_t + \partial_1 a(t,T).F_t + \partial_1 b(t,T) \\ \sigma(T-t) & = & V_t'.a(t,T)\end{array}\right. \tag{9.21}$$

Sous cette forme, on voit déjà que V_t est nécessairement une matrice déterministe. Par ailleurs, limitons nous au cas $a(t,T) = a(T-t)$ ce qui implique que V_t est une matrice constante V ; on a alors en remplaçant la fonction $a(T-t)$ par $V'^{-1}.\sigma(T-t)$ dans la première équation du système (9.21) :

$$\sigma(T-t)'.\tilde{\sigma}(T-t) = \sigma(T-t)'.[V^{-1}.D_t] - \partial\sigma(T-t)'.V^{-1}.F_t + \partial_1 b(t,T)$$

Ce système est vérifié quelque soit $T \geq t$. On peut alors empiler cette équation prise en différentes valeurs de T : $t+\theta_1$, ..., $t+\theta_K$ pour obtenir un système de K équations dont les inconnues seraient les composantes du vecteur $V^{-1}.D_t$. Ce système est de plus inversible par les conditions imposées par l'hypothèse initiale 9.2.1. La résolution du système montre que $V^{-1}.D_t$ est affine en F_t. De plus le coefficient de F_t dans cette combinaison affine doit être constant (i.e : indépendant de t). On écrira donc D_t sous la forme :

$$D_t = \phi(t) - \Gamma.F_t$$

Remplaçant D_t par cette expression dans la première équation du système (9.21), on obtient :

$$\sigma(T-t)'.\tilde{\sigma}(T-t) = (-\Gamma'.V'^{-1}.\sigma(T-t) - V'^{-1}.\partial\sigma(T-t))'.F_t + \partial_1 b(t,T) + \sigma(T-t)'.V^{-1}.\phi(t)$$

Puisque $\tilde{\sigma}(.)$ et $\sigma(.)$ sont déterministes, il faut donc que la partie stochastique s'élimine ; la fonction $\sigma(.)$ doit donc vérifier :

$$\partial\sigma(x) = -[V^{-1}.\Gamma.V]'.\sigma(x) \tag{9.22}$$

dont la solution est de la forme :

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{K} e^{-\lambda_i x}\sigma_{0i},$$

où les paramètres λ_i sont les valeurs propres de la matrice Γ et σ_{0i} des vecteurs constants. De la même façon, la fonction $a(.)$ suit le même type d'équation différentielle : $\partial a(x) = -\Gamma'.a(x)$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 19 *Sous l'hypothèse de structure factorielle et sous l'hypothèse de volatilité $\sigma(t,T)$ déterministe et homogène, la dynamique des variables d'état a la forme particulière suivante :*

$$dF_t = (\phi(t) - \Gamma.F_t)dt + V.d\tilde{W}_t.$$

De plus, la volatilité est nécessairement de type exponentiel ainsi que les sensibilités aux facteurs $a(.)$. Ces deux fonctions sont solution de :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\partial\sigma(x) & = & -[V^{-1}.\Gamma.V]'.\sigma(x) \\ \partial a(x) & = & -\Gamma'.a(x)\end{array}\right.$$

Il n'est pas difficile de démontrer la réciproque de cette proposition ; il suffit pour cela de s'inspirer du chapitre précédent où nous avions montré que les volatilités exponentielles induisaient des relations (linéaires) entre les taux. La matrice Γ étant quelconque, il est clair que les valeurs propres λ peuvent être multiples ou complexes. Si elles sont multiples, les termes exponentiels dans l'expression de la volatilité sont précédés de polyn"mes. Lorsqu'elles sont complexes, la matrice Γ étant réelle, la volatilité contient des termes en cosinus et sinus (éventuellement amortis). Nous supposerons en général que les valeurs propres de la matrice Γ sont simples et réelles.

Compte-tenu de la forme de D_t, il faut remarquer que la dynamique des facteurs (F_t) est d'un type très particulier ; on peut la voir comme un processus de type Ornstein-Uhlenbeck généralisé. Remarquons également qu'à ce stade il reste des problèmes d'identifiabilité puisqu'un modèle factoriel linéaire est toujours défini à une transformation linéaire près des facteurs. Il est facile de voir que, pour l'instant, seules les valeurs propres de la matrice Γ sont bien identifiables. Ainsi, ces valeurs propres sont intrinsèques au modèle au sens où elles ne dépendent pas de la base particulière choisie pour les facteurs. En revanche la matrice de volatilité des facteurs V en dépend évidemment.

Pour achever l'identification complète du modèle, il suffit d'identifier F_t à un vecteur de taux particuliers $(f(t,t+\theta_1,...,f(t,t+\theta_K))'$, ce qui revient à imposer les conditions de compatibilité :

$$\begin{cases} b(t,t+\theta_i) &= 0 \\ a_i(\theta_i) &= 1 \\ a_j(\theta_i) &= 0 \ \ (j \neq i) \end{cases}$$

Cette contrainte permet d'imposer des conditions initiales pour l'équation différentielle sur les fonctions $a(.)$ et $\sigma(.)$.

Il reste alors à déterminer la fonction $b(t,T)$. D'après le système (9.21), il vient :

$$\partial_1 b(t,T) = \sigma(T-t)'.\tilde{\sigma}(T-t) - \sigma(T-t)'.V^{-1}.\phi(t).$$

Tout revient donc à déterminer la fonction $\phi(t)$. En intégrant et en faisant $T = t+\theta_i$, on obtient :

$$-b(0,t+\theta_i) = \int_0^t \sigma(t+\theta_i-s)'.\tilde{\sigma}(t+\theta_i-s)ds - \int_0^t a(t+\theta_i-s)'.V^{-1}.\phi(s)ds$$

La fonction $b(0,t)$ est connue pour tout t dès que la courbe des taux initiale est connue ($b(0,t) = f(0,t) - a(t)'.F_0$) ; par conséquent, en empilant l'équation précédente pour $i = 1,...,K$, on obtient un système de K équations permettant d'expliciter les K composantes de la fonction $\phi(.)$. Le terme de dérive $\phi(t)$ est donc fonction de la courbe des taux initiale.

Remarque 1 *Puisqu'on a obtenu l'expression de $f(t,T)$, on peut calculer les prix zéro-coupon par la formule :*

$$B(t,T) = exp[-\int_t^T f(t,s)ds]$$

Il existe d'autres moyens. En effet, sous Q, $B(t,T)$ vérifie également :

$$B(t,T) = E^Q(exp[-\int_t^T r_s ds] \ / \ \mathcal{F}_t)$$

qu'on peut calculer directement puisque (r_t) est un processus gaussien. Par ailleurs, puisque $B(t,T)$ est une fonction déterministe $B(t,T,F_t)$ de t, T et F_t, on peut lui appliquer le lemme d'Itô et traduire le fait que le terme de dérive dans la dynamique de $(B(t,T))$ est égale à $r_t B(t,T)$. On obtient alors une équation aux dérivées partielles dont $B(t,T)$ est la solution :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial F'}.(\phi(t) - \Gamma F) + \frac{1}{2}Tr[V'.\frac{\partial^2 B}{\partial F \partial F'}.V] = rB$$

avec :

$$B(t,t,r) = 1, \ \ \forall t$$

Exemple 8 *Le modèle de Vasicek. Les développements précédents permettent de reconsidérer le modèle proposé par Vasicek. Pour cela, on se place dans le cas particulier où $K = 1$ et où l'unique facteur F_t est identifié au taux court r_t, ce qui impose :*

$$\begin{cases} b(t,t) &= 0 \\ a(0) &= 1 \end{cases}$$

La dynamique du taux court s'écrit donc :

$$dr_t = (\phi(t) - \lambda r_t) + \sigma d\tilde{W}_t$$

La fonction de volatilité est égale à :

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{-\lambda(T-t)}$$

et la sensibilité au facteur :

$$a(x) = e^{-\lambda x}$$

Puisque $b(t,t) = 0$*, on a :*

$$b(t,T) = \int_t^T a(T-s)\phi(s)ds - \int_t^T \sigma(T-s)\tilde{\sigma}(T-s)ds$$

Connaissant la structure des taux initiale (c'est-à-dire $b(0,.)$*), on déduit l'expression de la fonction* $\phi(.)$ *:*

$$\phi(t) = \partial_2 f(0,t) + \lambda f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda t})$$

On en déduit plus généralement l'expression de la fonction $b(.,.)$ *:*

$$b(t,T) = f(0,T) - e^{-\lambda(T-t)} f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\lambda} e^{-\lambda(T-t)}(1 - e^{-\lambda(T-t)})(1 - e^{-2\lambda t})$$

Au total, la courbe des taux à la date t a la forme suivante :

$$B(t,T) = B^f(0,t,T)exp - [\alpha(T-t)(r_t - f(0,t)) + \frac{\sigma^2}{4\lambda}(1 - e^{-2\lambda t})\alpha(T-t)^2]$$

où la fonction $\alpha(T-t)$ *est égale à* $\frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}$.

Remarque 2 *Si on fait* $\lambda = 0$*, on retrouve bien la formule donnée dans le cas de la volatilité constante).*

Le modèle de Vasicek proprement dit consiste à supposer que la fonction $\phi(t)$ est une constante ϕ, ce qui implique une forme particulière de la courbe des taux initiale. Les prix zéro-coupon se simplifient pour donner :

$$B(t,T) = exp[-(\frac{\phi}{\lambda} - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2})(T-t) - (r_t - (\frac{\phi}{\lambda} - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2}))\alpha(T-t) - \frac{\sigma^2}{4\lambda}\alpha(T-t)^2]$$

9.4.3 Volatilités non déterministes et variables d'état

Nous supposons désormais que les volatilités sont non déterministes ; plus précisément la fonction $\sigma(t,T)$ est de la forme :

$$\sigma(t,T) = \sigma(F_t, T-t)$$

où F_t est comme précédemment un vecteur de variables d'état et $\sigma(.,.)$ une fonction déterministe.

Introduisons à nouveau la notation suivante :

$$\tilde{\sigma}(F_t, x) = \int_0^x \sigma(F_t, y)dy.$$

Le modèle linéaire gaussien décrit au paragraphe précédent est évidemment le cas particulier où la volatilité ne dépend pas des facteurs F_t. Nous nous plaçons sous l'hypothèse de structure factorielle linéaire. La démarche adoptée ici est très similaire à celle du paragraphe précédent. Ainsi, identifiant les parties dt et $d\tilde{W}_t$, on obtient à partir de :

$$\begin{aligned} f(t,T) &= a(T-t)'.F_t + b(t,T) \\ dF_t &= D_t dt + V_t.d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\sigma(F_t,T-t)'.\tilde{\sigma}(F_t,T-t) & = & a(T-t)'.D_t-\partial a(T-t)'.F_t+\partial_1 b(t,T) \\ \sigma(F_t,T-t) & = & V_t'.a(T-t)\end{array}\right. \tag{9.23}$$

Afin de simplifier les écritures, on pose :

$$A(T-t)=\int_0^{T-t} a(y)dy$$

ce qui implique :

$$\tilde{\sigma}(F_t,T-t)=V_t'.A(T-t)$$

En remplaçant la fonction $\sigma(.,.)$ par son expression en fonction de $a(.)$, on obtient l'équation :

$$a(T-t)'.V_t.V_t'.A(T-t)=a(T-t)'.D_t-\partial a(T-t)'.F_t+\partial_1 b(t,T)$$

Cette équation est satisfaite pour toute valeur de $T\geq t$. On peut alors utiliser le même argument que dans le paragraphe précédent. Ainsi, prenant suffisamment de valeurs T, on obtient un système d'équations d'inconnus D_t et $V_t.V_t'$ qu'on peut inverser. [4] Par conséquent, D_t et $V_t.V_t'$ apparaissent comme des fonctions affines de F_t. On écrira donc :

$$\begin{array}{lcl}V_t.V_t' & = & \left[\begin{array}{ccc}\alpha_{11}'.F_t+\beta_{11}(t) & \dots & \alpha_{1m}'.F_t+\beta_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}'.F_t+\beta_{m1}(t) & \dots & \alpha_{mm}'.F_t+\beta_{mm}(t)\end{array}\right] \\ D_t & = & \phi(t)-\Gamma.F_t\end{array}$$

Le carré de la volatilité des facteurs est donc nécessairement affine en les facteurs. La forme donnée ci-dessus est en outre contrainte pour des raisons de symétrie par :

$$\begin{array}{lcl}\alpha_{ij} & = & \alpha_{ji},\quad \forall\, i\neq j \\ \beta_{ij} & = & \beta_{ji},\quad \forall\, i\neq j\end{array}$$

Si on remplace maintenant D_t et $V_t.V_t'$ par leur expression dans la première équation du système, on voit que nécessairement les sensibilités aux facteurs (plus exactement la fonction $A(.)$) doivent vérifier l'équation différentielle suivante (en intégrant une fois) :

$$\partial A(x)=\partial A(0)-\Gamma' A(x)-\frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{K}\alpha_{ij}A_i(x)A_j(x)) \tag{9.24}$$

qui est une équation de Riccati à K dimensions. On retrouve à nouveau le modèle linéaire gaussien (et donc les solutions de type exponentiel) en prenant comme cas particulier $\alpha_{ij}=0$. On a donc :

Proposition 20 *Sous l'hypothèse de structure factorielle linéaire et si la volatilité des taux à terme instantanés est stochastique (de la forme $\sigma(F_t,T-t)$), alors la dynamique des variables d'état a la forme particulière :*

$$dF_t=(\phi(t)-\Gamma.F_t)dt+V_t.d\tilde{W}_t$$

où $V_t.V_t'$ s'écrit :

$$V_t.V_t'=\left[\begin{array}{ccc}\alpha_{11}'.F_t+\beta_{11}(t) & \dots & \alpha_{1m}'.F_t+\beta_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}'.F_t+\beta_{m1}(t) & \dots & \alpha_{mm}'.F_t+\beta_{mm}(t)\end{array}\right]$$

La fonction de volatilité des taux à terme instantanés s'écrit :

$$\sigma(t,T)=V_t'.a(T-t)$$

[4] En fait, il n'est pas certain qu'on puisse toujours inverser ce système.

où les sensibilités aux facteurs $A(x) = \int_0^x a(y)dy$ suivent l'équation de Riccati suivante :

$$\partial A(x) = \partial A(0) - \Gamma' A(x) - \frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{K} \alpha_{ij} A_i(x) A_j(x))$$

Faisons quelques remarques. Premièrement, contrairement au modèle linéaire gaussien, on ne peut en général résoudre explicitement cette équation de Riccati sauf dans le cas d'une seule variable d'état $K = 1$. Il y a cependant un cas où l'équation de dimension K peut être résolue. Il s'agit intuitivement du cas où ce système de Riccati peut s'écrire comme K équations de Riccati à une dimension. D'après la forme de l'équation (9.24), on voit que ceci n'est possible que pour des valeurs très particulières des paramètres Γ et α_{ij}.

Deuxièmement, rien n'assure que la matrice $V_t.V_t'$ soit positive ; c'est la raison pour laquelle on propose des formes particulières de cette matrice qui conservent le caractère linéaire mais qui assurent la positivité.

Troisèmement, comme dans les modèles à volatilité déterministe, tous les paramètres ne sont pas identifiables tant qu'on n'a pas précisé quelle base de facteurs on choisit.

Enfin, il reste à déterminer la fonction $b(.,.)$ qui se déduit des fonctions $\phi(t)$ et $\beta(t)$:

$$\partial_1 b(t,T) = \sum_{i,j=1}^{K} \beta_{ij}(t) a_i(T-t) A_j(T-t) - a(T-t)'.\phi(t)$$

soit :

$$b(t,T) - b(0,T) = \sum_{i,j=1}^{K} \int_0^t \beta_{ij}(s) a_i(T-s) A_j(T-s) ds - \int_0^t a(T-s)'.\phi(s) ds$$

Si on identifie les facteurs à des taux particuliers $F_t = (f(t, t+\theta_1, ..., f(t, t+\theta_K))'$, on alors par les relations de compatibilité :

$$\begin{aligned} -b(0, t+\theta_i) &= -f(0, t+\theta_i) + a(t+\theta_i)'.F_t \\ &= \sum_{i,j=1}^{K} \int_0^t \beta_{ij}(s) a_i(t+\theta_i - s) A_j(t+\theta_i - s) ds \\ -\int_0^t a(t+\theta_i - s)'.\phi(s) ds, \ \forall\, i &= 1, ..., K \end{aligned}$$

On voit alors que la courbe des taux initiales ne suffit pas pour déterminer les $\frac{K(K+1)}{2}$ fonctions $\beta_{ij}(.)$ et les K fonctions $\alpha_i(.)$. Il reste donc des degrés de liberté supplémentaires. On peut imposer que certaines de ces fonctions sont constantes, par exemple les $\beta_{ij}(.)$.

Afin de donner des illustrations de ce modèle, nous regardons les cas particuliers proposés dans la littérature.

9.5 Exemples de modèles linéaires à volatilité stochastique

9.5.1 *Le modèle à un facteur (Cox, Ingersoll et Ross)*

Il consiste à se placer dans le cas $K = 1$. Comme nous l'avons dit précédemment, il est alors possible d'obtenir des formules explicites pour les prix zéro-coupon. Dans le cas $K = 1$, nous pouvons sans perte de généralité, identifier l'unique facteur au taux court r_t (soit $\theta_1 = 0$).

Les équations précédentes donnent alors :

$$\begin{cases} V_t^2 & = & \alpha r_t + \beta(t) \\ D_t & = & \phi(t) - \lambda r_t \\ \partial A(x) & = & 1 - \lambda A(x) - \frac{1}{2}\alpha A(x)^2 \\ dr_t & = & (\phi(t) - \lambda r_t)dt + \sqrt{\alpha r_t + \beta(t)}d\tilde{W}_t \end{cases} \tag{9.25}$$

La résolution de l'équation de Riccati suivie par $A(.)$ se résoud sous la forme :

$$A(x) \; = \frac{1+k}{\mu}\frac{1-e^{-\mu x}}{1+ke^{-\mu x}}$$

où :

$$\begin{cases} \mu & = & \lambda\sqrt{1+\frac{2\alpha}{\lambda^2}} \\ k & = & \frac{\sqrt{1+\frac{2\alpha}{\lambda^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{2\alpha}{\lambda^2}}+1} \end{cases}$$

On voit bien sous cette forme comment le modèle linéaire gaussien se déduit du modèle général. Si on prend $\alpha = 0$, alors le paramètre k est lui-même égal à 0 (et réciproquement). De plus, μ est égal à λ. On retrouve bien une expression exponentielle pour $A(.)$ et donc pour $a(.)$. Ici la structure factorielle peut être explicitement écrite :

$$f(t,T) = (1+k)^2\frac{e^{-\mu(T-t)}}{(1+ke^{-\mu(T-t)})^2}\; r_t + b(t,T).$$

où la fonction $b(t,T)$ est égale à :

$$b(t,T) = -\int_t^T \beta(s)a(T-s)A(T-t)ds + \int_t^T a(T-s)\phi(s)ds$$

On voit alors que la connaissance de la courbe des taux initiale (c'est-à-dire en fait $b(0,.)$) n'est pas suffisante pour déterminer les deux fonctions $\phi(.)$ et $\beta(.)$.

Les prix zéro-coupon s'obtiennent alors par :

$$\begin{aligned} B(t,T) &= exp - \int_t^T f(t,s)ds] \\ &= exp - [A(T-t)r_t + \int_t^T b(t,s)ds] \end{aligned}$$

avec :

$$\int_t^T b(t,s)ds = -\frac{1}{2}\int_t^T \beta(u)A(T-u)^2du + \int_t^T \phi(u)A(T-u)du$$

On ne peut donc pas avoir une forme explicite en fonction de la courbe des taux initiale mais seulement par l'intermédiare des fonctions $\phi(.)$ et $\beta(.)$.

Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (1985) proprement dit consiste à imposer $\phi(.)$ et $\beta(.)$ constantes au cours du temps, ce qui impose des contraintes sur la courbe des taux initiale. Dans ce cas, on peut expliciter la fonction $\int_t^T b(t,s)ds$ en fonction des paramètres ϕ et β, ce qui donne au total :

$$B(t,T) = exp - [A(T-t)(r_t + \frac{\beta}{\alpha}) + (\tilde{\phi} - \frac{\beta}{\alpha})(T-t) + 2\frac{\tilde{\phi}}{\alpha}Ln\; \frac{1+ke^{-\mu(T-t)}}{1+k}] \tag{9.26}$$

avec :

$$\tilde{\phi} = \phi + \frac{\lambda\alpha}{\beta}$$

Remarquons que (r_t) n'est évidemment pas gaussien sous Q ; on montrera au chapitre suivant que la loi conditionnelle de r_t sachant F_s $(s < t)$ est une loi du χ^2 décentrée. Néanmoins le calcul précédent montre qu'on sait calculer :

$$E^Q(e^{-\int_t^T r_s ds} \ / \ \mathcal{F}_t)$$

puisque cette quantité est exactement égale à $B(t,T)$. Par ailleurs, $B(t,T)$ comme fonction de t, T et r_t est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r}(\phi - \lambda r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}(\alpha r + \beta) = rB$$

sous $B(t,t,r) = 1$ dont la solution est donc donnée par l'équation (9.26).

9.5.2 Le modèle de Duffie et Kan

Ce modèle consiste à considérer une famille particulière de volatilité pour les variables d'état sous la forme :

$$V_t = \Sigma.Diag[\sqrt{\alpha_1'.F_t + \beta_1(t)}, ..., \sqrt{\alpha_K'.F_t + \beta_K(t)}]$$

où Σ est une matrice $K \times K$ (inversible) et $Diag(., ..., .)$ une matrice diagonale. Il s'agit d'un cas particulier dans la mesure où toute matrice V telle que $V.V'$ aient ses éléments linéaires en F_t ne peut en général pas s'écrire sous cette forme. De fait, ce modèle contient moins de paramètres libres et est donc certainement plus facile à calibrer. Par ailleurs, les problèmes d'existence de solution à l'équation différentielle stochastique suivie par (F_t) sont plus faciles à résoudre dans ce cas.

La partie factorielle du modèle est toujours du même type, à savoir une forme linéaire en les variables d'état pour les taux ; toutefois, l'équation de Riccati correspondante est plus simple (mais toujours non résoluble analytiquement) et s'écrit :

$$\partial A(x) = \partial A(0) - \Gamma.A(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} \alpha_i A(x)'.\sigma_i.\sigma_i'.A(x)$$

où les vecteurs σ_i sont tels que $\Sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_K)$. On voit donc que les K formes quadratiques qui apparaissent dans le système d'équations différentielles se diagonalisent, dans ce modèle, dans la même base orthonormée.

9.5.3 Le modèle quadratique gaussien (El Karoui, Myneni et Viswanathan)

Ce modèle propose un moyen d'introduire des non-linéarités dans les structures factorielles, c'est-à-dire de se dégager partiellement de l'hypothèse de structure factorielle linéaire.

A titre d'illustration, plaçons nous dans le cas d'une seule variable d'état, notée (Z_t). Le modèle quadratique gaussien consiste à partir de formes factorielles quadratiques du type :

$$f(t,T) = a_1(t,T)Z_t^2 + a_2(t,T)Z_t + b(t,T) \tag{9.27}$$

Ce modèle peut être vu comme une modèle factorielle linéaire avec contrainte :

$$f(t,T) = a_1(t,T)F_{1t} + a_2(t,T)F_{2t} + b(t,T)$$

avec :

$$F_{1t} = F_{2t}^2, \ \ \forall \ t$$

Postulant la dynamique suivante pour (F_t) :

$$dF_t = D_t dt + V_t.d\tilde{W}_t$$

où $(\tilde{W}_t)$ est une mouvement Brownien bi-dimensionnel, alors d'après les résultats qui précèdent, D_t et $V_t.V_t'$ sont linéaires en F_t :

$$\begin{aligned} D_t &= \phi(t) - \Gamma(t).F_t \\ V_t.V_t' &= (\alpha_{ij}(t)'.F_t + \beta_{ij}(t))_{i,j} \end{aligned}$$

Tous les paramètres dépendent du temps dans la mesure où nous ne faisons plus d'hypothèses d'homogénéité sur les fonctions $\sigma(t,T)$ et $a(t,T)$.

Si on impose alors $F_{1t} = F_{2t}^2$ et si on pose :

$$dF_{2t} = (\phi_2(t) - \gamma_2(t)'.F_t)dt + \sigma_{2t}'.d\tilde{W}_t$$

alors :

$$D_t = \begin{pmatrix} 2(\phi_2(t) - \gamma_2(t)'.F_t)F_{2t} + \parallel \sigma_{2t} \parallel^2 \\ \\ \phi_2(t) - \gamma_2'.F_t \end{pmatrix}$$

et :

$$V_t.V_t' = \parallel \sigma_{2t} \parallel^2 \begin{pmatrix} 4F_{1t} & 2F_{2t} \\ \\ 2F_{2t} & 1 \end{pmatrix}$$

On voit donc que, pour assurer la linéarité de la matrice $V_t.V_t'$ en F_t, il faut que $\parallel \sigma_{2t} \parallel^2$ soit déterministe. De même, pour que D_t soit linéaire en F_t, il faut que la première coordonnée de γ_2 soit nulle. Au total, les matrices Γ et $V_t.V_t'$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \begin{pmatrix} 2\gamma(t) & -2\phi(t) \\ \\ 0 & \gamma(t) \end{pmatrix} \\ V_t.V_t' &= \parallel \sigma(t) \parallel^2 \begin{pmatrix} 4F_{1t} & 2F_{2t} \\ \\ 2F_{2t} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $\gamma(t)$, $\phi(t)$ et $\sigma(t)$ sont les paramètres de la dynamique de la variables d'état $Z_t = F_{2t}$:

$$dZ_t = (\phi(t) - \gamma(t)Z_t)dt + \sigma(t)'.d\tilde{W}_t$$

La dynamique du modèle est entièrement résumée par celle de (Z_t), qui est du type Ornstein-Uhlenbeck. La partie factorielle est donc un polyn"me de degré 2 en Z_t et l'équation de Riccati dont les fonctions $a_1(.,.)$ et $a_2(.,.)$ sont solution s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_1 a_1(t,T) &= 2\gamma(t)a_1(t,T) + 4 \parallel \sigma(t) \parallel^2 a_1(t,T)A_1(t,T) \\ \partial_1 a_2(t,T) &= -2\phi(t)a_1(t,T) + \gamma(t)a_2(t,T) \\ & \quad +2 \parallel \sigma(t) \parallel^2 (a_1(t,T)A_2(t,T) + A_1(t,T)a_2(t,T)) \end{aligned} \right.$$

qu'on peut résoudre explicitement puisque l'équation qui donne la fonction $a_1(.,.)$ est uni-dimensionnelle. L'identification complète du modèle ne peut se faire en imposant à Z_t d'être égal à un taux particulier[5] ; on peut en revanche identifier Z_t^2 à un taux particulier.

Enfin, on peut faire les remarques suivantes. On constate premièrement que ce modèle est équivalent à un modèle où il n'y aurait qu'un seul Brownien en prenant $\parallel \sigma(t) \parallel^2$ pour la volatilité de (Z_t). Deuxièmement, on pourrait montrer qu'on ne peut pas construire un modèle pour lequel la structure factorielle serait cubique en Z_t et plus généralement un polyn"me en Z_t de degré supérieur ou égal à 3. Troisièmement, on peut également chercher tous les modèles factoriels :

$$f(t,T) = a_1(t,T)F_{1t} + a_2(t,T)F_{2t} + b(t,T)$$

pour lesquels on aurait une relation déterministe entre les facteurs du type $q(F_{1t}, F_{2t}, t) = 0$. On montrerait qu'on aboutit nécessairement au cas où $q(.,.,.)$ est une forme quadratique dégénérée, c'est-à-dire le modèle quadratique gaussien.

[5] On aboutit alors à $a_1(t,T)$ identiquement nul.

10
Exemples de produits de taux d'intérêt

On s'intéresse ici à des produits typiques de taux d'intérêt. Certains sont négociés de gré à gré et les autres sur des marchés organisés. Nous aborderons la question de l'évaluation de ces produits : la technologie de base repose sur l'évaluation par arbitrage telle que décrite précédemment à la nuance près que nous tiendrons compte des conventions de marché utilisées en pratique. Nous donnerons également pour chaque produit des exemples d'utilisation et des raisons pour lesquelles ce produit peut intéresser tel ou tel acteur.

10.1 Forward rate agreement (FRA)

Le forward rate agreement est un contrat entre deux parties A et B par lequel A s'engage à prêter à un taux d'intérêt convenu à l'avance. L'entrée dans un FRA permet donc de fixer dès aujourd'hui les conditions de taux d'intérêt pour une opération de prêt ou emprunt. Il s'agit donc d'un outil naturel de couverture contre une hausse ou une baisse des taux d'intérêt (selon qu'on souhaite emprunter ou prêter à une date future). Ce type de contrat permet par exemple à une entreprise qui sait qu'elle devra emprunter dans quelques mois de se couvrir contre une hausse des taux d'intérêt entre aujourd'hui et la date de l'emprunt. L'entreprise entrera dans ce contrat soit parce qu'elle anticipe une remontée des taux d'intérêt, soit tout simplement parce qu'elle souhaite ne pas prendre de risque : le métier d'une entreprise non financière consiste à prendre plutôt des risques industriels que des risques financiers.

Plus précisément, un FRA ne donne pas lieu à la mise en place effective d'une opération d'emprunt / prêt à terme. Considérons un FRA conclu à la date t, les deux parties choisissent :
- un montant dit notionnel N sur lequel seront calculés les intérêts ;
- une date de départ de la garantie T et la date d'échéance $T + n$;
- un taux de référence $r(s, s + \delta)$, par exemple un taux d'intérêt à 3 mois, 6 mois, ..., i.e. l'euribor 3 mois ($\delta = 3$ mois), 6 mois etc.

Le flux entre A et B sera alors calculé comme la différence entre le taux à terme $f(t, T, T+\delta)$ (donc connu lors de la mise en place du FRA) et le taux effectivement constaté à la date de départ de la garantie :

$$N.\left(r(T, T+\delta) - f(t, T, T+\delta)\right).\frac{n}{Base}$$

où $Base$ est la convention de jours annuels (par exemple 360 jours). On voit qu'il s'agit d'une convention de taux linéaire et non actuariel. Ce flux est versé en $T + n$. Toutefois, si le versement a lieu à la date de départ de la garantie (on parle de settlement in advance), il est nécessaire de l'actualiser. Le flux devient donc :

$$\frac{N.\left(r(T, T+\delta) - f(t, T, T+\delta)\right).\frac{n}{Base}}{1 + r(T, T+\delta).\frac{n}{Base}}$$

L'acheteur du FRA est celui qui reçoit ce flux et le vendeur celui qui le verse. Le taux d'intérêt du FRA $f(t,T,T+\delta)$ sur lequel s'accordent les deux parties s'appelle le taux à terme ou taux forward. On a déjà vu dans les chapitres précédents que, par un raisonnement d'arbitrage, ce taux à terme pouvait se calculer à partir de la courbe des taux aujourd'hui. Si on reprend l'exemple d'une entreprise en t qui souhaite emprunter en T sur une période $\delta = n$. Pour se protéger, elle "achète" un FRA en t et donc aboutit aux flux suivants :

- date t : 0
- date T : l'entreprise reçoit le montant de son emprunt N ;
- date $T+\delta$: l'entreprise rembourse le nominal N de son prêt, les intérêts $N.\frac{\delta}{Base}.r(T,T+\delta)$ et reçoit le flux correspondant à son FRA, soit :

$$N.\left(r(T,T+\delta) - f(t,T,T+\delta)\right).\frac{\delta}{Base}$$

soit au total :

$$-N-N.\frac{\delta}{Base}.r(T,T+\delta)+N.\left(r(T,T+\delta) - f(t,T,T+\delta)\right).\frac{\delta}{Base} = -N.\left[1+f(t,T,T+\delta).\frac{\delta}{Base}\right]$$

Ex post, l'entreprise a donc pu emprunter au taux à terme et non au taux effectif le jour de la mise en place du prêt. Si dans l'intervalle entre t et T, les taux ont beaucoup monté, l'entreprise ne souffre pas de cette hausse. Inversement, si ses craintes d'une hausse des taux étaient infondées et qu'au contraire les taux ont baissé, elle ne bénéficie pas de cette baisse : elle n'aurait pas dû rentrer dans le FRA.

Enfin, si on actualise en t les deux flux futurs (parfaitement connus en t), on obtient la valeur de l'échéancier qui est nulle en t puisqu'il n'y a aucun flux en t :

$$0 = N.B(t,T) - N.\left[1+f(t,T,T+\delta).\frac{\delta}{Base}\right].B(t,T+\delta)$$

soit :

$$f(t,T,T+\delta) = \frac{Base}{\delta}\left(\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)} - 1\right)$$

et on retrouve bien l'idée que les taux à terme peuvent être calculés à partir de la courbe des taux d'intérêt aujourd'hui.

En pratique, l'entreprise ne trouvera pas toujours un FRA ayant exactement les caractéristiques souhaitées. En particulier, δ et n peuvent être proches sans être égaux : la couverture n'est pas parfaite et il reste un risque résiduel (dit risque de base).

10.2 Contrat Future

Le contrat FRA génère un unique flux, ce flux correspondant à la différence entre le taux à terme négocié en t et le taux de marché effectivement réalisé à la maturité du FRA. En particulier, ce contrat ne génère pas de flux à la date de conclusion du contrat (date t) : le contrat a une valeur de marché nulle à la date t. Toutefois, dès la date $t+1$, les anticipations des marchés se sont modifiées et il n'y a plus aucune raison que ce contrat ait une valeur de marché nulle. Le même type de contrat se négociera à un taux $f(t+1,T,T+\delta)$ probablement différent de $f(t,T,T+\delta)$.

Dans le cas du Future, cette variation de valeur de marché est constatée et enregistrée chaque jour : on dit que le contrat est marked-to-market. Ainsi, à chaque date, si le contrat Future signé par A et B en t a une valeur en $t+1$ négative pour A (et donc positive pour B), alors A est contraint de payer la différence de valorisation (appelée appel de marge) et la partie B est créditée du même montant. D'une certaine façon, la perte (ou le gain) final (différence taux à terme et taux réalisé) est réparti tout au long de la vie du contrat. Dit autrement, le contrat Future s'apparente à une série de contrats forward renouvelés tous les jours : chaque jour, le contrat forward précédent est débouclé et un autre se met en place pour une maturité d'un jour.

En outre, les contrats Future sont standardisés et gérés par une chambre de compensation, de telle sorte que les contreparties A et B ne contractent pas directement entre elles. Enfin, à la date t de mise en place de l'opération, un dépôt de garantie est demandé puis restitué par la suite. On trouvera ci-après les spécifications du contrat Euribor 3 mois du MATIF (www.matif.fr). Le contrat est coté sous la forme $100 - f(t, T, T + \delta)$. Ainsi, selon le sens de leur position, les parties A et B recevront ou paieront :

$$N.\frac{\delta}{Base}\left[(100 - f(t + k, T, T + \delta)) - (100 - f(t + k - 1, T, T + \delta))\right]$$

en $t + k$, et, si le contrat va à son terme, le flux :

$$N.\frac{\delta}{Base}\left[r(T, T + \delta) - f(T - 1, T, T + \delta)\right]$$

en T, avec $N = 1000000$ euros et $\delta = 3$ mois $= 90$ jours dans le cas du contrat euribor 3 mois.

En pratique, A (ou B) détient un compte sur lequel il doit verser son dépôt de garantie initial, et ce compte est débité ou crédité des appels de marge correspondant aux variations de prix du contrat Future. Si on fait la somme des flux reçus ou versés par les parties A et B, on constate bien que cette somme ne dépend en T que de $r(T, T + \delta) - f(t, T, T + \delta)$, comme pour le FRA. Toutefois, il faut remarquer que, dans la mesure où des flux intermédiaires ont lieu, ce contrat est un produit financier différent du FRA. En particulier, le taux Future $f(t, T, T + \delta)$ n'a pas de raison d'être égal au taux forward du FRA.

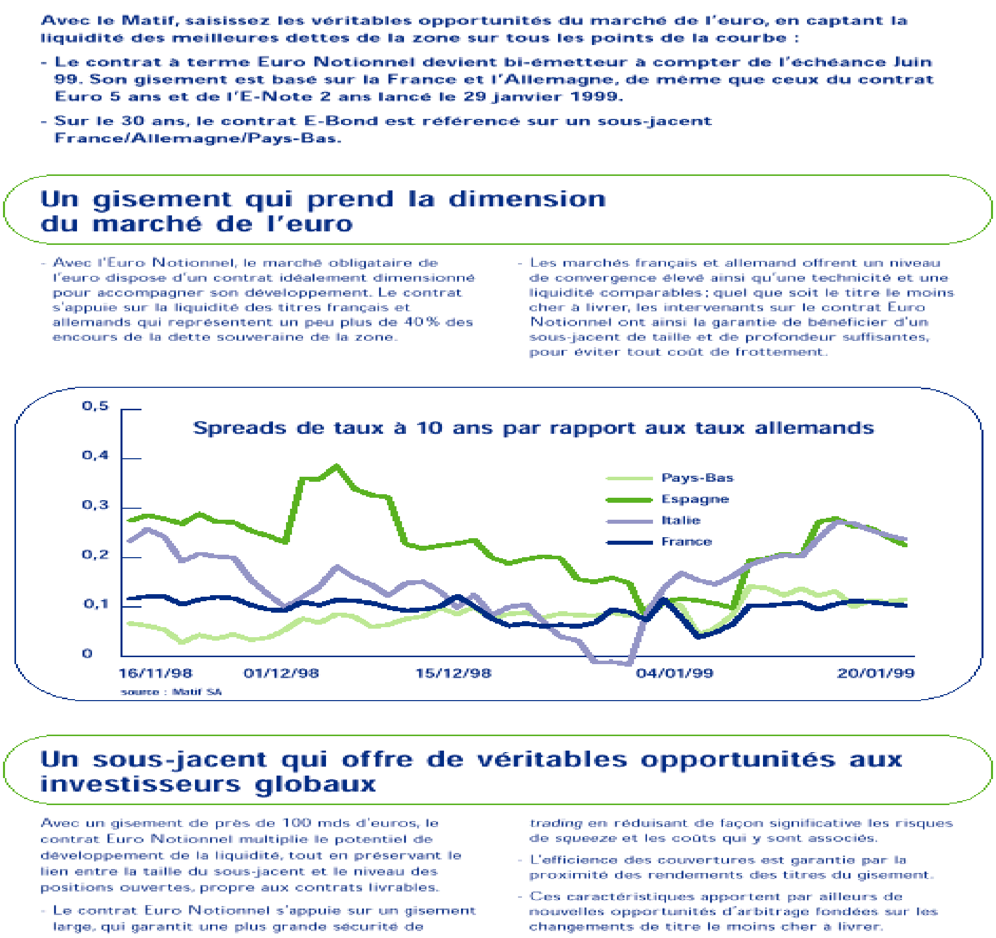
Contract	**3-MONTH EURIBOR FUTURE (EST)**
Exercise style	
Underlying instrument	3 month Euribor: European Interbank Offered Rate on 3-month deposits, calculated by the Banking Federation of the European Union (FBE)
Trading unit	1 000 000 €
Strike prices	
Price quotation	The index quoted to the 3rd decimal point, corresponding to : 100 minus the 3-month **Euribor**
Minimum price fluctuation (tick)	A 0.2 of a basis point, equivalent to 5 €
Contract cycles	2 monthly and 20 successive quarterly contract cycles out of: March (H), June (M), September (U), December (Z)
Last trading day	The 2nd trading day preceding the third Wednesday of the contract month at 11:00 a.m.
First trading day	1st trading day following the closing of a contract month
Settlement	Cash settlement. The closing settlement price equal to 100 minus the 3-month Euribor, published on the last trading day, rounded off to the tick
Trading hours	NSC Pre-opening : 7 :45 a.m – 8 :00 a.m Session : 8 :00 a.m – 10 :00 p.m Settlement day changeover: 5:00 p.m

D'autres contrats Futures existent pour lesquels le sous-jacent est une obligation : A (par exemple) prend donc en t l'engagement avec B (via la chambre de compensation) d'acheter l'obligation sous-jacente en

T à un prix décidé en t. Il s'agit d'un contrat à terme sur obligation d'Etat de maturité 10 ans. Plus exactement, cette obligation est fictive, d'où le terme de contrat notionnel. Ceci a sa logique : le contrat doit porter à chaque instant sur une obligation de maturité 10 ans. Or il n'existe jamais à tout instant une telle obligation.

Si le contrat est dénoué avant le terme du contrat, A et B s'échangent des flux correspondant aux variations des prix à terme (comme dans le contrat euribor). Si le contrat va jusqu'à son terme, il y a livraison physique. Comme l'obligation sous-jacente n'existe pas, il existe un système d'équivalence entre le prix de cette obligation fictive et le prix des obligations réellement existantes. Le gisement du Matif désigne l'ensemble des OAT qui peuvent être livrées au titre des contrats à terme notionnels. Le facteur de conversion est le facteur mathématique qui permet de faire une correspondance entre le prix de l'obligation fictive et le prix des obligations du gisement.

Un tel contrat permet de se couvrir contre les variations du taux à 10 ans (alors que le contrat euribor 3 mois permet de se couvrir contre une variation du taux à 3 mois). Les caractéristiques des différents contrats notionnels du Matif sont les suivantes (www.matif.fr) :


Avec le Matif, saisissez les véritables opportunités du marché de l'euro, en captant la liquidité des meilleures dettes de la zone sur tous les points de la courbe :

- **Le contrat à terme Euro Notionnel devient bi-émetteur à compter de l'échéance Juin 99. Son gisement est basé sur la France et l'Allemagne, de même que ceux du contrat Euro 5 ans et de l'E-Note 2 ans lancé le 29 janvier 1999.**
- **Sur le 30 ans, le contrat E-Bond est référencé sur un sous-jacent France/Allemagne/Pays-Bas.**

Un gisement qui prend la dimension du marché de l'euro

- Avec l'Euro Notionnel, le marché obligataire de l'euro dispose d'un contrat idéalement dimensionné pour accompagner son développement. Le contrat s'appuie sur la liquidité des titres français et allemands qui représentent un peu plus de 40 % des encours de la dette souveraine de la zone.
- Les marchés français et allemand offrent un niveau de convergence élevé ainsi qu'une technicité et une liquidité comparables ; quel que soit le titre le moins cher à livrer, les intervenants sur le contrat Euro Notionnel ont ainsi la garantie de bénéficier d'un sous-jacent de taille et de profondeur suffisantes, pour éviter tout coût de frottement.

Un sous-jacent qui offre de véritables opportunités aux investisseurs globaux

Avec un gisement de près de 100 mds d'euros, le contrat Euro Notionnel multiplie le potentiel de développement de la liquidité, tout en préservant le lien entre la taille du sous-jacent et le niveau des positions ouvertes, propre aux contrats livrables.

- Le contrat Euro Notionnel s'appuie sur un gisement large, qui garantit une plus grande sécurité de *trading* en réduisant de façon significative les risques de squeeze et les coûts qui y sont associés.
- L'efficience des couvertures est garantie par la proximité des rendements des titres du gisement.
- Ces caractéristiques apportent par ailleurs de nouvelles opportunités d'arbitrage fondées sur les changements de titre le moins cher à livrer.

Gisement et caractéristiques

GISEMENT EURO NOTIONNEL - Échéances juin 99 (M9) et septembre 99 (U9)

Émetteur	Coupon (%)	Maturité	Encours (mds d'euros)	Échéance
France OAT	5,25	25-avr-08	25	M9/U9
France OAT	8,5	25-oct-08	16	M9/U9
France OAT	4	25-avr-09	9	M9/U9
Allemagne Bund	5,25	04-janv-08	15	M9
Allemagne Bund	4,75	04-juil-08	9	M9/U9
Allemagne Bund	4,125	04-juil-08	14	M9/U9
Allemagne Bund	3,75	04-janv-09	8	M9/U9
Total			**Juin 99 : 96 - Sept. 99 : 81**	

<table>
<tr><th>Contrats</th><th>E-Note 2 ans</th><th>Euro 5 ans</th><th>Euro Notionnel</th><th>E-Bond 30 ans</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Sous-jacent</td><td colspan="4">Emprunt fictif d'Etat(s) de l'UEM, libellé en euros, remboursable in fine, de maturité résiduelle comprise entre :</td></tr>
<tr><td>1,5 et 2,5 ans
coupon 3,5 %
mars (H9), juin (M9)
et septembre 99 (U9) : France et Allemagne</td><td>4 et 5,5 ans
mars 99 (H9) : coupon 4,5% France uniquement
juin (M9) et septembre 99 (U9) : coupon 3,5% France et Allemagne</td><td>8,5 et 10,5 ans
mars 99 (H9) : coupon 5,5% France uniquement
juin (M9) et septembre 99 (U9) : coupon 3,5% France et Allemagne</td><td>25 et 35 ans
coupon 5,5%
mars (H9), juin (M9)
septembre 99 (U9) : France, Allemagne et Pays-Bas</td></tr>
<tr><td colspan="4">Echéances ultérieures : liste des Etats souverains de l'UEM fixée avant l'ouverture de l'échéance</td></tr>
<tr><td>Nominal</td><td colspan="4">100 000 euros</td></tr>
<tr><td>Mode de cotation</td><td colspan="4">Pourcentage du nominal exprimé avec 2 décimales</td></tr>
<tr><td>Tick</td><td colspan="4">0,01 % du nominal, soit 10 euros</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Échéances</td><td>2 ou 3 échéances</td><td>2 ou 3 échéances</td><td>3 échéances</td><td>2 ou 3 échéances</td></tr>
<tr><td colspan="4">trimestrielles successives parmi mars (H), juin (M), septembre (U), décembre (Z)</td></tr>
<tr><td>Ouverture d'une échéance</td><td>Le 1er jour de négociation d'un mois de livraison, ouverture de la 3e échéance</td><td>Le 1er jour de négociation d'un mois de livraison, ouverture de la 3e échéance</td><td>Le 1er jour de négociation suivant la clôture d'une échéance</td><td>Le 1er jour de négociation d'un mois de livraison, ouverture de la 3e échéance</td></tr>
<tr><td>Clôture d'une échéance</td><td colspan="4">Le 2e jour de Bourse précédant le 3e mercredi du mois à 11h00</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Liquidation</td><td colspan="4">Sur la base du cours de liquidation, livraison de titres choisis par le vendeur dans le gisement d'emprunts d'Etat(s) de l'UEM :</td></tr>
<tr><td>de 1,5 à 2,5 ans encours minimum : 5 milliards d'euros</td><td>de 4 à 5,5 ans encours minimum : 5 milliards d'euros</td><td>de 8,5 à 10,5 ans encours minimum : 6 milliards d'euros</td><td>de 25 à 35 ans, encours minimum : 5 milliards d'euros</td></tr>
<tr><td colspan="4">réglés un mois avant la date de règlement-livraison de l'échéance</td></tr>
<tr><td>Horaires</td><td colspan="4">Pré-ouverture : 7h45 – 8h00
Session principale : 8h00 – 22h00
Changement de journée de compensation : 16h30</td></tr>
<tr><td>Code vendors :
Bloomberg
Reuters
Telerate</td><td>MDmy<CMD TY>
YR2:<F3>
3229E2Y</td><td>FM
YR5: <F3>
—</td><td>MN
PTB:<F3>
—</td><td>EH
EVL:<F3>
—</td></tr>
</table>

Pour finir, on pourra se reporter à la documentation très bien faite de l'équivalent anglais du Matif - le LIFFE - à la fin de ce chapitre.

10.3 Les swaps

Un swap est un contrat entre deux parties par lequel elles s'engagent à s'échanger (i.e. to swap) des flux à des dates spécifiées. Dans le cas d'un swap standard, les flux échangés sont des taux d'intérêt : A (par exemple) verse à B un taux d'intérêt fixe (spécifié initialement) et B verse à A un taux de marché, donc variable au cours du temps. Il n'y a pas de flux à la mise en place du contrat : le contrat a une valeur nulle. La variable de négociation est donc le taux fixe (versé ici par A). Plus exactement, comme pour les FRA ou les Futures, les flux sont calculés comme l'application des taux d'intérêt à un certain capital. L'échéancier de taux fixe (versé ici par A) s'appelle la jambe fixe du swap et l'échéancier de taux de marché la jambe variable.

De fait, le taux fixe cristallise les anticipations sur la valeur des taux d'intérêt de marché tout au long de la durée de vie du swap. Ces contrats sont très utilisés car ils permettent de transformer une dette à taux de marché en une dette à taux fixe. Il s'agit donc d'un outil essentiel utilisé par les entreprises financières ou non financières pour se couvrir contre les risques de variation des taux d'intérêt.

De nombreuses variantes sont évidemment possibles : le taux de marché peut être un taux à 3 mois, 6 mois etc., la maturité peut être de 1 an, 2 ans, etc., les flux peuvent être versés à des fréquences différents (tous les 6 mois pour B, tous les ans pour A, etc.

Prenons le cas standard où :
- le taux d'intérêt de marché est le taux d'intérêt $r(t, t+\delta)$:

$$B(t, t+\delta) = \frac{1}{1+\delta.r(t, t+\delta)}$$

- les flux sont versés aux mêmes dates $k\delta$;
- les paiements sont déterminés à l'avance : la différence entre le taux fixe et le taux variable $r(t, t+\delta)$ n'est versée qu'en $t+\delta$ (et non en t)

Il s'agira par exemple d'un swap sur l'euribor 6 mois ($\delta = 6$ mois) avec échange d'intérêt tous les 6 mois. La valeur de marché d'un swap lors de sa mise en place (en t) étant nulle, on doit avoir :

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \delta.N.E_t\left[(r(t+(k-1)\delta, t+k\delta) - R).\exp - \int_t^{t+k\delta} r_s ds\right]$$

où N est le capital notionnel sur lequel portent les calculs d'intérêt, R le taux fixe versé par A (par exemple) et r_s le taux court instantané habituel. En remplaçant $r(t+(k-1)\delta, t+k\delta)$ par sa définition, on obtient alors :

$$0 = -\delta.N.R.\sum_{k=1}^{n} B(t, t+k\delta) + N\sum_{k=1}^{n} E_t\left[\left(\frac{1}{B(t+(k-1)\delta, t+k\delta)} - 1\right)\exp - \int_t^{t+k\delta} r_s ds\right]$$

en utilisant :

$$B(t, t+k\delta) = E_t\left[\exp - \int_t^{t+k\delta} r_s ds\right]$$

De même, on a :

$$0 = -\delta.N.R.\sum_{k=1}^{n} B(t, t+k\delta) + N\sum_{k=1}^{n} E_t\left[(1 - B(t+(k-1)\delta, t+k\delta))\,(\exp - \int_t^{t+(k-1)\delta} r_s ds\right]$$

en utilisant :

$$B(t+(k-1)\delta, t+k\delta) = E_{t+(k-1)\delta}\left[\exp - \int_{t+(k-1)\delta}^{t+k\delta} r_s ds\right]$$

Ce qui donne finalement :

$$0 = -\delta.N.\sum_{k=1}^{n} R.B(t, t+k\delta) + N\sum_{k=1}^{n} B(t, t+(k-1)\delta) - B(t, t+k\delta)$$

en utilisant de nouveau la propriété de martingalité des prix actualisés sous la probabilité risque-neutre. On peut aussi écrire cette expression sous la forme :

$$0 = N\left[\sum_{k=1}^{n} B(t, t+k\delta).\left[f(t, t+(k-1)\delta, t+k\delta) - R\right].\delta\right]$$

où $f(t, t+(k-1)\delta, t+k\delta)$ est le taux à terme :

$$f(t, t+(k-1)\delta, t+k\delta) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B(t, t+(k-1)\delta)}{B(t, t+k\delta)} - 1\right)$$

Au total, on obtient la relation de valorisation suivante :

$$R = \frac{1 - B(t, t+n\delta)}{\delta\sum_{k=1}^{n} B(t, t+k\delta)}$$

Le taux du swap (qu'on appelle aussi le "prix" du swap) se détermine donc, par un raisonnement d'arbitrage et comme pour les taux à terme, en fonction de la courbe des taux à la date t. Bien évidemment, dès la date suivante $t+1$, le swap n'a plus une valeur nulle : annuler le swap implique qu'une deux contrepartie a une dette vis-à-vis de l'autre.

On peut remarquer qu'une position de swap est équivalente (pour A) à acheter une obligation dont le coupon est un taux variable et à émettre une obligation à taux fixe.

Les swaps sont par exemple beaucoup utilisés par les banques dans le cadre de leur politique de gestion actif-passif (ALM ou Asset Liability Management). Il s'agit pour la banque de couvrir le risque de taux de son bilan. A l'actif du bilan, on trouvera par exemple les prêts (immobiliers, personnels, etc.) qu'elle a accordés à ses clients et au passif ses ressources (refinancement de la banque sur les marchés de capitaux). Lorsque les taux de marché montent, les ressources de la banque deviennent plus coûteuses car son refinancement est principalement à taux de marché ; à l'inverse, les revenus générés par l'actif n'augmentent pas car, très souvent, les prêts accordés par la banque sont à taux constant. Une banque est donc généralement exposée à une hausse des taux : on dit qu'elle a un excédent d'emplois à taux fixe. Les banques mettent quotidiennement en place des programmes de swap qui leur permettent de ré-équilibrer leur bilan en transformant virtuellement des emplois à taux fixe en emplois à taux variable. Une couverture parfaite est telle que, lorsque les taux montent l'impact soit le même sur le passif et sur l'actif. Ainsi, le bénéfice de la banque : revenus des emplois - coûts des ressources ne varie plus lorsque les taux varient.

Dernière remarque : la relation liant les taux du swap et les taux zéro-coupon est utilisée pour reconstituer la courbe des taux zéro-coupon. Les observations sont les taux de swap R pour les différentes maturités et les inconnues les prix zéro-coupon.

10.4 Cap et Floor

On envisage à partir de maintenant des actifs optionnels. Dans ces cas, on ne peut plus obtenir une formule de valorisation ne dépendant que de la courbe des taux. Désormais la volatilité interviendra et donc de fait un modèle doit être spécifié. Les cap / floor sont les équivalents des call / put.

On définit d'abord un caplet comme une option qui délivre un flux égal à la différence - si elle est positive - entre un taux de marché et un taux d'exercice. En reprenant les notations précédentes, le payoff s'écrira :

$$\delta.N.\left[r(T, T+\delta) - F\right]^{+}$$

Le cap est alors une collection de caplets, c'est-à-dire un actif qui délivre les flux :

$$\delta.N.\left[r(t+(k-1)\delta,t+k\delta)-F\right]^{+}$$

aux dates $t+k\delta$. La valeur de marché de cet actif n'est évidemment pas nulle et vaut :

$$Cap=\delta.N.\sum_{k=1}^{n}E_t\left[\left[r(t+(k-1)\delta,t+k\delta)-R\right]^{+}.\exp-\int_t^{t+k\delta}r_s ds\right]$$

qu'on ne peut calculer explicitement que si on a spécifié un modèle particulier dans lequel on connait les densités des variables aléatoires qui apparaissent dans l'espérance.

On peut remarquer que le cap peut se concevoir comme une collection d'option sur zéro-coupon. En effet, en utilisant la définition du taux $r(t+(k-1)\delta,t+k\delta)$ et les mêmes "astuces" de calcul que dans la section précédente, on obtient :

$$Cap=(1+\delta R).N.\sum_{k=1}^{n}E_t\left[\left[\frac{1}{1+\delta R}-B(t+(k-1)\delta,t+k\delta)\right]^{+}.\exp-\int_t^{t+(k-1)\delta}r_s ds\right]$$

Enfin, on peut également écrire une relation de parité cap / floor. La différence entre un cap et un floor de mêmes caractéristiques est équivalente à un swap de taux fixe R :

$$cap-floor=swap$$

L'intérêt des caps et des floors est évidemment d'offrir une couverture contre un sens de variation particulier des taux d'intérêt. A l'inverse, les FRA, Futures et swaps permettaient de se couvrir contre toute variation des taux, que cette variation soit à la hausse ou à la baisse, alors que généralement seul l'un des deux sens est défavorable pour un intervenant donné (l'autre étant favorable).

10.5 Swaption

Une swaption est une option qui donne le droit d'entrer dans un swap à un taux convenu. Le flux généré par cet actif s'écrit donc :

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\delta.N.E_T\left[\left(r(T+(k-1)\delta,T+k\delta)-R\right).\exp-\int_T^{T+k\delta}r_s ds\right]\right]^{+}$$

si T est la date d'échéance de la swaption. Il s'agit donc de la valeur - si elle est positive - d'un swap mis en place en T de taux fixe R. Le prix s'écrit donc :

$$swaption=E_t\left[\exp-\int_t^{T}r_s ds.\left[\sum_{k=1}^{n}\delta.N.E_T\left[\left(r(T+(k-1)\delta,T+k\delta)-R\right).\exp-\int_T^{T+k\delta}r_s ds\right]\right]^{+}\right]$$

En utilisant toujours les mêmes "astuces" de calcul, on a :

$$swaption=N.E_t\left[\exp-\int_t^{T}r_s ds.\left[1-\left(\sum_{k=1}^{n}\delta.R.B(T,T+k\delta)+B(T,T+N\delta)\right)\right]^{+}\right]$$

ce qui permet d'interpréter la swaption comme une option de vente sur une obligation à taux fixe.

10.6 Annexe : extrait de la documentation du Liffe (www.liffe.com)