Note sur l'évaluation de l'option de remboursement anticipé

Paul Demey[1] Antoine Frachot[2] Gaël Riboulet[3]

Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France

Résumé :
Le but de l'étude est de proposer une méthode d'évaluation et de facturation des options cachées dans les prêts susceptibles d'être soumis à des remboursements anticipés. Dans ce papier, nous présenterons quelques méthodes d'évaluation envisageables, ainsi que des résultats obtenus par simulations de Monte Carlo.

Mai 2000

[1] paul.demey@creditlyonnais.fr
[2] antoine.frachot@creditlyonnais.fr
[3] gael.riboulet@creditlyonnais.fr

Introduction

Depuis quelques années, la baisse marquée des taux d'intérêt a entrainé un fort pourcentage de remboursements anticipés des prêts immobiliers. Même si la remontée récente des taux longs devrait conduire à une nette décrue de ce phénomène, la question demeure de savoir combien coûte réellement l'option de remboursement anticipé.

Concrètement, chaque emprunteur reçoit implicitement une option de remboursement anticipé, c'est-à-dire le droit de rembourser par anticipation à tout moment moyennant une pénalité (de 3 % du Capital Restant Dû). Souvent, le remboursement anticipé correspond à une renégociation du taux de l'emprunt.

L'objectif de cette étude est double :

- estimer la valeur de cette option accordée au client et voir quels sont ses déterminants ;
- évaluer le différentiel de taux (du prêt) qu'il faudrait rajouter si on souhaitait compenser la perte liée à cette option.

En elle-même, cette option ne pose pas trop de problème tant que le comportement de remboursement anticipé est purement "déterministe", c'est-à-dire lorsqu'on peut dire *a priori* : "tous les clients ont p_1 % de chance de rembourser par anticipation dans un an, p_2 % dans deux ans etc." et que ces probabilités de rembourser par anticipation sont indépendantes des conditions de marché (notamment des taux d'intérêt). Dans ce cas, le phénomène de remboursement anticipé est totalement prévisible (au sens statistique du terme) et peut être refacturé de façon forfaitaire aux emprunteurs.

Toutefois, en pratique, **les remboursements anticipés ne sont pas déterministes et dépendent des taux d'intérêt** : selon le niveau des taux d'intérêt et leur volatilité à un instant donné, l'option de remboursement anticipé incluse dans les prêts immobiliers du portefeuille d'une banque peut avoir une valeur nulle (par exemple quand les taux d'intérêt sont très hauts) ou très élevée (dans le cas contraire).

Au total et idéalement, il serait nécessaire de facturer au client, au moment de l'octroi du prêt, le coût de cette option, ce coût étant fonction à la fois des conditions financières courantes (niveau des taux et volatilité) et des anticipations des taux futurs. Dans le cas contraire, c'est-à-dire dans le cas où une facturation "forfaitaire" est appliquée, on induit une mauvaise facturation qui peut être en défaveur de la banque.

L'évaluation de créances supportant un risque de remboursement anticipé est généralement faite dans un cadre risque-neutre, la question étant de déterminer les flux futurs, plus exactement la dépendance de ces flux futurs en les variables d'état. Ainsi, dans D'Andria, Boulier, Elie - 1991 [2], le taux de remboursement est défini comme une fonction affine par morceaux du rapport du Mark-to-Market de la créance et du capital restant dû. En ajoutant une dynamique de taux d'intérêt du type Vasicek, l'évaluation de la créance s'apparente à un calcul d'option sur obligation (à coupon). De même, dans Schwartz et Torous - 1989 [17], le taux de remboursement anticipé est fonction des taux d'intérêt court et long et du capital restant dû. Ce type d'approche (voir Gouriéroux et Frachot - 1994 [7] pour une revue complète de ces modèles) a une analogie avec les méthodes d'évaluation de produits avec risque de crédit lorsqu'on modélise l'intensité du défaut en fonction de certaines variables d'état (Duffie et Lando - 1997 [4], Madan et Unal - 1998 [11]).

Or, dans les questions d'évaluation de produits de crédit, il existe une approche alternative dite approche structurelle (Merton - 1974 [13]), où le défaut d'une entreprise est modélisé comme le premier instant où l'entreprise n'est plus solvable, c'est-à-dire lorsque la valeur des actifs de l'entreprise devient inférieure à la valeur de la dette. On est alors ramené à un calcul analogue à un calcul d'option à barrière. C'est ce genre d'approche que nous explorons ici pour les remboursements anticipés. Ainsi, le remboursement anticipé aura lieu, par exemple, au premier instant où le Mark-to-Market de la créance passe en dessous d'un certain seuil.

Cette approche - encore peu explorée dans les problèmes de remboursement anticipé - a le mérite d'être réaliste d'un point de vue économique tout en permettant de faire des calculs utilisables.

Dans un premier temps, nous introduisons les notations nécessaires à l'obtention de la formule d'évaluation de cette option, ainsi que les différentes approches possibles pour le comportement du client. Dans un deuxième temps, nous présentons les résultats obtenus en effectuant des simulations par une méthode de Monte-Carlo. Ces résultats nous permettront de calculer le manque à gagner pour la banque dû à ces remboursements anticipés, et de proposer une méthode de facturation de cette option.

1 Modélisation du Problème

On considère un investisseur à qui sa banque a octroyé un prêt dont l'échéancier est représenté sur la figure (1). Il rembourse son emprunt à mensualités constantes et peut racheter son prêt par anticipation à n'importe quelle date entre le début et la fin du contrat. Le problème que nous nous posons dans un premier temps est de savoir combien cette option coûte à la banque, c'est-à-dire quelle doit être la différence de prix entre un emprunt où le remboursement anticipé est permis, et un emprunt où il ne l'est pas.

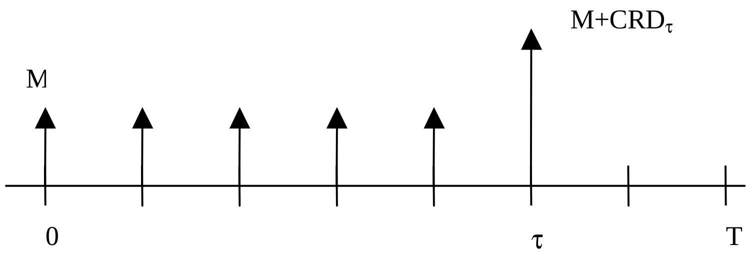

FIG. 1: Echéancier d'un prêt comportant un remboursement anticipé

1.1 Notations

Nous introduisons les notations suivantes :

- T est la date d'échéance de l'actif.
- M est la mensualité constante du prêt (notée m en temps continu).
- τ est la date de remboursement anticipé.
- CRD_t le capital restant dû à la date t. L'actif paie la mensualité M jusqu'à la date τ du remboursement anticipé, puis CRD_τ en τ.
- MtM_t est le Marked-to-Market du prêt à la date t, c'est-à-dire la valeur actuelle de l'échéancier à venir.

La durée jusqu'au remboursement anticipé est une variable aléatoire dont nous allons modéliser le comportement à l'aide des deux fonctions suivantes :

- Fonction de survie :

$$S(t) = \Pr(\tau > t \mid (r_s)_{s \leq t})$$

Fonction de hasard :

$$q(t, h) = \Pr(\tau \leq t \mid \tau > t - h, (r_s)_{s \leq t})$$

Ces deux fonctions constituent deux moyens **équivalents** de représenter la loi des remboursements anticipés. En effet, on a toujours la relation de récurrence :

$$S(t) = (1 - q(t, h))\, S(t - h)$$

avec la condition initiale $S(0) = 1$ et à condition de supposer que $\Pr(\tau \geq t - h \mid (r_s)_{s \leq t}) = \Pr(\tau \geq t - h \mid (r_s)_{s \leq t-h})$, hypothèse que nous ferons ici.

En temps continu, l'équation de récurrence précédente se généralise :

$$S(t) = \exp - \int_0^t q(s)ds$$

1.2 Formule générale d'évaluation de l'option

On suppose que r_t suit un processus stochastique que nous déterminerons par la suite. Le prix de notre actif est égal à l'espérance sous la probabilité risque-neutre de la somme des flux actualisés (on rappelle que sous la probabilité risque-neutre, les prix des actifs actualisés sont des martingales). En supposant un pas de temps de h et en définissant $N = \frac{T-t}{h}$, on peut considérer qu'à chaque instant $t + ih$, la banque reçoit :

- un flux $m.h$ (s'il n'y a pas eu de remboursement anticipé en $t + (i-1)h$) avec une probabilité :

$$S(t + (i-1)h) = \Pr(\tau > t + (i-1)h \mid \tau > t,\ (r_s)_{s \le t+ih})$$

- un flux $m.h + CRD_{t+ih}$ (s'il y a eu remboursement anticipé) avec une probabilité :

$$\Pr(t + (i-1)h < \tau \le t + ih \mid \tau > t,\ (r_s)_{s \le t+ih}) = q(t + ih, h).S(t + (i-1)h)$$

et finalement, le prix vaut :

$$P(t,h) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{i=1}^{N} e^{-\int_t^{t+ih} r_u du} S(t + (i-1)h)\left[m.h + q(t+ih,h)CRD_{t+ih}\right] \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{1}$$

où $\mathbb{Q}$ est la probabilité risque-neutre.

En **temps continu**, cette formule s'écrit (en faisant tendre h vers 0) :

$$P(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T e^{-\int_t^v (r_u + q(u))du}\left[m + q(v)CRD_v\right] dv \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{2}$$

Remarque 1 (Une seconde formule d'évaluation) *Si γ est le taux du prêt (supposé constant) et en décomposant la mensualité en un amortissement et des flux d'intérêt, on peut écrire en temps continu :*

$$m = -\frac{dCRD_v}{dv} + \gamma CRD_v$$

En injectant cette formule dans la formule d'évaluation (2) et en intégrant par partie, on obtient :

$$P(t) = CRD_t + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T e^{-\int_t^v r_u du}\left(\gamma - r_v\right).CRD_v^q.dv \mid \mathcal{F}_t\right]$$

où CRD_v^q est le capital restant dû modifié par les remboursements anticipés, i.e. $CRD_v^q = CRD_v. \exp - \int_t^v q(u)du$. Dans ces conditions, on voit que si les remboursements anticipés sont indépendants des taux d'intérêt et parfaitement déterministes, alors l'évaluation (et la couverture) peut se faire à partir de Swaps de type IAS (Indexed Amortizing Swaps). En revanche, dès que la fonction $q(.)$ dépend des taux d'intérêt, cette approche est difficile.

Le problème majeur dans l'évaluation de cette option est que la distribution des remboursements anticipés est inconnue *a priori* car elle dépend notamment des conditions de taux d'intérêt au moment du remboursement. Nous avons donc modélisé cette distribution de manière à obtenir les probabilités de remboursement à chaque instant.

Pour cela, il est nécessaire de distinguer deux types de remboursements anticipés (RA) :

- le RA "structurel" : ce sont des remboursements anticipés qui interviennent alors que les taux du marché n'incitent pas les emprunteurs à le faire. De ce fait, on considère que, pendant une période où les taux d'intérêt du marché sont élevés, le taux de remboursement anticipé atteindra son minimum (par exemple égal à 5% par an).

– le RA “conjoncturel”, dû à une renégociation de taux : il correspond au taux de remboursement anticipé qu’il faut rajouter au taux de RA structurel. Ces remboursements anticipés n’existent que lorsque les taux du marché sont assez faibles pour que les emprunteurs aient une incitation financière à renégocier.

On adopte trois types d’approche pour la modélisation du temps jusqu’au remboursement anticipé :

– Une **modélisation dite statistique** : on estime directement la probabilité de remboursement anticipé comme fonction des taux d’intérêt et de la durée restante à courir en prenant des spécifications ad-hoc qui soient simples et suffisamment réalistes.
– Une **modélisation dite “semi-rationnelle”** où on tente de modéliser directement le comportement des individus. Ainsi, on dira par exemple que pour un individu donné, le remboursement anticipé a lieu dès que le taux d’intérêt passe en dessous d’un certain seuil (propre à l’individu). Ceci permet de déduire une spécification particulière pour le taux de remboursement anticipé en fonction des taux d’intérêt. L’avantage de cette approche est que, sous cette forme, l’option est très proche de produits financiers existants sur les marchés de capitaux et pour lesquels la théorie financière a des solutions pour en évaluer le prix de marché.
– Une **modélisation dite “rationnelle”** où on cherche à optimiser le comportement des individus. Ainsi, on se ramène au problème classique de contrôle optimal où l’instant de remboursement anticipé est le temps d’arrêt qui maximise les flux actualisés du client.

Nous passons brièvement en revue ces trois approches. On notera que dans les modélisations “semi-rationnelle” et “rationnelle”, ce sont les RA conjoncturels qui sont modélisés.

1.3 Modélisation statistique

L’approche retenue dans cette partie modélise le taux mensuel de remboursement anticipé $q(v)$ comme une fonction de deux facteurs :

$$q(v) = f(\text{effet “durée restante à courir”}, \text{effet “conditions de marché”})$$

Le remboursement apparaît ainsi comme la résultante de deux phénomènes : un effet lié à la durée restante à courir du prêt et un effet lié aux conditions de marché. Le premier représente le remboursement anticipé structurel, c’est-à-dire le fait que les emprunteurs remboursent par anticipation à des périodes particulières de leur prêt (peu de remboursement au début ou à la fin, remboursement plutôt aux alentours des 7 ans etc.). Quant au second, il capte l’influence des baisses de taux d’intérêt de marché sur les renégociations de prêts.

Concrètement, l’effet “durée restante à courir” sera pris comme une fonction de la durée résiduelle du prêt, par exemple une courbe en cloche dont le sommet se trouve aux alentours des 7 ans. L’effet “conditions de marché” est plus délicat à modéliser. En première approche, on pourrait penser mettre une fonction de l’écart entre le taux du prêt et les taux d’intérêt disponibles au moment du remboursement. Ceci n’est pas satisfaisant : passé un certain temps, la part des intérêts dans la mensualité du prêt devient négligeable devant les remboursements du capital (i.e. l’amortissement) ; ainsi renégocier a alors peu d’intérêt même si le nouveau taux qu’on pourrait obtenir est nettement inférieur.

Pour tenir compte de cette idée, l’approche retenue consiste à prendre, non pas une fonction de l’écart de taux, mais une fonction de l’écart entre la “valeur de marché” du prêt (qu’on appelle par la suite Mark-to-Market du prêt) et le capital restant dû. Par ce biais, le Mark-to-Market du prêt est très proche, en fin de prêt, du capital restant dû (donc proche de 0) même si les taux d’intérêt ont significativement diminué.

Bien évidemment, on ne prétend pas que les emprunteurs calculent explicitement la valeur de marché de leur créance et la comparent à leur capital restant dû. On suppose simplement que les emprunteurs font un calcul grossier dans lequel ils mesurent approximativement l’impact financier (sur leur mensualité) d’une renégociation de taux : l’écart entre Mark-to-Market et capital restant dû est alors une approximation de ce type de raisonnement.

1.4 Modélisation “semi-rationnelle”

Au lieu de prendre une spécification *ad-hoc* pour l'effet Mark-to-Market, on peut chercher à la dériver d'une modélisation du comportement de l'emprunteur. En effet, il suffit alors de se fixer une règle que l'emprunteur aura tendance à suivre. On peut pour cela décrire la durée avant remboursement anticipé comme le premier instant pour lequel l'emprunteur a un intérêt financier suffisant à rembourser par anticipation. Cet instant correspond au moment où le Mark-to-Market du prêt est supérieur au capital restant dû (à la pénalité près) plus un seuil s.

Ce seuil s tient compte de tous les coûts, autres que la pénalité (coûts de déplacement, temps passé à renégocier avec son chargé de clientèle etc.). Il représente également le gain minimal attendu pour engager la procédure de remboursement anticipé. Cette approche permet de rendre compte du fait qu'en pratique, un individu ne rembourse pas par anticipation dès que le Mark-to-Market est supérieur au capital restant dû.

Du point de vue de la facturation de l'option, cette modélisation permet de ne pas assigner le même seuil à tous les individus, certains étant plus “dynamiques” (i.e. ont un seuil plus bas) que d'autres. Ainsi, il sera possible de facturer le droit au remboursement par anticipation en fonction des caractéristiques propres à l'emprunteur.

Nous proposons ici deux définitions de τ qui soient réalistes et pour lesquelles nous allons développer les calculs :

1. $$\tau = \inf\{t, r_t < r^* - s\} \tag{3}$$

   Cette approche permet de considérer un sous-jacent de la durée jusqu'à remboursement anticipé assez simple : quand les taux sont hauts, l'individu ne rembourse pas, mais il profite d'une baisse des taux dès qu'ils passent en dessous d'un certain seuil. D'un point de vue psychologique, il semble que l'emprunteur aura tendance à comparer des taux. Dans ce cas, la variable s représente, pour un emprunteur donné, l'écart critique entre le taux de l'emprunt et le taux du marché qui fait que l'emprunteur ira se refinancer sur le marché. Les individus “dynamiques”, qui profiteront rapidement d'une baisse des taux, auront un s plus faible que les autres. On notera Φ_s la fonction de répartition de la loi de s.

2. $$\tau = \inf\{t, MtM_t > CRD_t + s\} \tag{4}$$

   où MTM_t est le Mark-to-Market du Prêt. Cette définition du temps de remboursement anticipé est issue d'une comparaison entre la valeur actuelle de l'echéancier à venir (MtM) et le prix du remboursement anticipé (CRD). Elle permet de prendre en compte l'effet maturité restante. En effet, on imagine assez bien qu'un emprunteur n'aura pas tendance à rembourser par anticipation lorsque son prêt arrive bientôt à échéance. Ainsi, lorsqu'il ne reste plus que quelques mensualités à régler, seules de très violentes variations de taux inciteront les remboursements anticipés.

Nous traiterons par la suite le problème du calcul du prix avec une modélisation du type (3). On pourra cependant faire des calculs tout à fait similaires pour une modélisation du type (4).

1.4.1 Loi du remboursement anticipé

Nous appliquons ici la définition (3) de τ aux définitions de la partie (1.1). La fonction de survie s'écrit alors :

$$\begin{aligned} S(t) &= \Pr(\tau \geq t \mid (r_s)_{s\leq t}) \qquad (5)\\ &= \Pr\left(\min_{u\leq t}(r_u) \geq r^* - s\right) \\ &= 1 - \Phi_s\left(r^* - \min_{u\leq t}(r_u)\right) \end{aligned}$$

Φ_s la fonction de répartition de la loi de s. On notera par la suite $\underline{r_t} = \min_{u\leq t}(r_u)$.

De même, on peut exprimer le taux instantané de remboursement anticipé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} q(t,h) &= \Pr(\tau < t+h \mid \tau \geq t, (r_s)_{s\leq t+h}) \\ &= \frac{\Pr(r^* - r_{t+h} > s \geq r^* - \underline{r_t} \mid (r_s)_{s\leq t+h})}{\Pr(s \geq r^* - \underline{r_t} \mid (r_s)_{s\leq t})} \\ &= \max\left[\frac{\Phi_s(r^* - r_{t+h}) - \Phi_s(r^* - \underline{r_t})}{1 - \Phi_s(r^* - \underline{r_t})}; 0\right] \end{aligned} \tag{6}$$

1.4.2 Evaluation de l'option de remboursement anticipé

En utilisant les équations (5) et (1) on obtient finalement :

$$\begin{aligned} P(t,h) &= hm\sum_{i=0}^{N} E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{t+ih} r_u du}(1 - \Phi_s\left(r^* - \underline{r_{t+ih}}\right)|\mathcal{F}_t\right] \\ &+\sum_{i=0}^{N} E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{t+ih} r_u du} CRD_{t+ih}\max\left[\Phi_s(r^* - r_{t+(i+1)h}) - \Phi_s(r^* - \underline{r_{t+ih}}); 0\right]|\mathcal{F}_t\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Nous nous intéressons ici à un groupe homogène d'emprunteurs ayant le même seuil s et nous cherchons à paramétrer le prix de l'option de remboursement anticipé selon ce seuil. Aussi, dans la suite, nous nous fixons un seuil s donné. Dans un second temps, nous pourrons éventuellement décomposer la loi du seuil en somme de Dirac, c'est à dire en strates de s_i. Cette approche suppose implicitement que la loi du seuil est indépendante des mouvements des taux. Cette hypothèse semble réaliste.

Nous sommes donc ramenés à considérer des fonctions de répartition de Dirac :

$$\Phi_s(x) = \mathbf{1}_{\{x\geq s\}}$$

L'expression (7) donne pour un s donné :

$$\begin{aligned} P_s(t,T,h) &= hm\sum_{i=0}^{N} E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{t+ih} r_u du}\left(1 - \mathbf{1}_{\{r^* - \underline{r_{t+ih}} \geq s\}}\right)|\mathcal{F}_t\right] \\ &+\sum_{i=0}^{N} CRD_{t+ih} E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{t+ih} r_u du}\mathbf{1}_{\{r^* - r_{t+(i+1)h} \geq s \geq r^* - \underline{r_{t+ih}}\}}|\mathcal{F}_t\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Nous voyons apparaître deux termes qui correspondent aux prix de deux actifs. Le premier est celui d'un actif qui verse la mensualité tant que le taux ne passe pas sous une barrière. Le second paye le Capital Restant Dû, dès que le taux passe sous le seuil, et que la barrière n'a pas été franchie auparavant. Le sous-jacent des deux produits considérés est jusqu'ici le taux court. L'interaction entre le coefficient d'actualisation et le flux n'est donc pas négligeable. Une manière de pallier ce problème est de passer sous probabilité forward-neutre $\mathbb{Q}_t$. Nous mettons ici de côté la dynamique suivie par le sous-jacent. Nous ne cherchons qu'à préciser le type de flux à évaluer. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} P_s(t,T,h) &= hm\sum_{i=0}^{N} B(t,t+ih) E_{\mathbb{Q}_{t+ih}}\left[1 - \mathbf{1}_{\{r^* - \underline{r_{t+ih}} \geq s\}}|\mathcal{F}_t\right] \\ &+\sum_{i=0}^{N} B(t,t+ih) CRD_{t+ih} E_{\mathbb{Q}_{t+ih}}\left[\mathbf{1}_{\{r^* - r_{t+(i+1)h} \geq s \geq r^* - \underline{r_{t+ih}}\}}|\mathcal{F}_t\right] \end{aligned} \tag{9}$$

Cette dernière expression permet de faire un lien entre le problème posé et celui du pricing d'options à barrières, en l'occurence de type binaire. Les prix d'options à barrières sont assez bien connus lorsque le sous-jacent suit une dynamique de type Black-Scholes. Or, il est peu probable que le taux court suive une diffusion log-normale sous $\mathbb{Q}_u$. Une telle diffusion se rencontre plus facilement pour le prix d'un actif. Il peut alors s'avérer que la définition (4) du remboursement anticipé soit plus adaptée à notre situation. Par analogie avec la dernière expression (9) qui fournit le prix de l'obligation avec option de remboursement anticipée, nous pouvons aussi retenir :

$$\begin{aligned} P_s(t,T,h) &= hm\sum_{i=0}^{N} B(t,t+ih)E_{\mathbb{Q}_{t+ih}}\left[1-\mathbf{1}_{\left\{\left(\underline{MtM-CRD}\right)_{t+ih}\geq s\right\}}|\mathcal{F}_t\right] \\ &\quad +\sum_{i=0}^{N} B(t,t+ih)CRD_{t+ih}E_{\mathbb{Q}_{t+ih}}\left[\mathbf{1}_{\left\{(MtM-CRD)_{t+(i+1)h}\geq s>\left(\underline{MtM-CRD}\right)_{t+ih}\right\}}|\mathcal{F}_t\right] \end{aligned} \tag{10}$$

Notons que les calculs aboutissent à une formule quasi-fermée en utilisant les résultats connus sur le pricing des options à barrière. Nous renvoyons à (E. Reiner, M. Rubinstein [1991] [15] et [16]) pour un détail des calculs. Le processus suivi par le Mark-to-Market sous les probabilités forward-neutres est détaillé en annexe.

1.5 Modélisation "rationnelle"

Dans cette approche, on cherche le prix auquel l'option de remboursement anticipé serait vendue sur les marchés financiers. Ainsi, elle n'a d'autre intérêt que de servir de référence et de mesurer le degré de rationnalité du pool de prêts considéré. D'un point de vue mathématique, cette approche pose peu de problème. En effet, une fois formalisée, cette modélisation se ramène à la recherche de l'instant où il est optimal pour le client de rembourser par anticipation. On cherche donc à minimiser, sur l'ensemble $\mathcal{T}(t,T)$ des temps d'arrêt inférieurs à T, et adaptés à la filtration des taux , la valeur actualisée des flux versés par le client :

$$V(t,r_t) = \inf_{\tau\in\mathcal{T}(t,T)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_t^\tau me^{-\int_t^v r_u du}dv + CRD_\tau \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{11}$$

Ce problème se ramène à une inéquation variationnelle qu'on résoud par différences finies :

$$\min\left(\frac{\partial V}{\partial t} + a\,(b-r)\,\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV, V(t,r_t) - CRD_t\right) = 0$$

La résolution de cette inéquation variationnelle permet également d'obtenir la frontière d'exercice, c'est-à-dire de connaître la politique optimale à suivre pour le client.

2 Facturation de l'option

Trois voies sont envisageables pour facturer au client l'option qui lui est vendue :

– calculer une marge d'intérêt - facturant le remboursement anticipé - incluse dans le taux nominal accordé au client ;
– faire payer en une fois à l'octroi du prêt la contrevaleur de cette option ;
– faire payer ex post, lors du remboursement anticipé.

La dernière voie est évidemment liée à la question du niveau de la pénalité et dépend de la réglementation, et ne sera donc pas explorée ici. La deuxième n'est pas très naturelle et pas forcément praticable. La première l'est beaucoup plus et sera donc privilégiée ici. Toutefois, elle peut poser de sérieux problèmes : en effet, un individu dont on sait, au vu de ses caractéristiques, qu'il sera très enclin à rembourser par anticipation, dès que les conditions de marché le lui permettront, devrait logiquement payer un taux pour son prêt relativement plus élevé que le taux proposé à d'autres clients moins "réactifs". Ce faisant, on risque d'inciter encore davantage cet individu à renégocier le taux de son prêt dès qu'il le pourra. Ce bouclage "circulaire" peut ne pas converger et on montre ici qu'il n'est pas toujours possible de trouver le taux d'équilibre.

2.1 Principe

La facturation de l'option consiste à calculer le taux nominal de l'emprunt qui n'induit pas de perte pour la banque à cause des remboursements anticipés. Plus précisément, la notion de "perte de la banque" s'analyse comme suit. Considérons que la banque comprend deux entités : une entité commerciale qui accorde des prêts et qui se refinance auprès de la seconde entité supposée couvrir le risque de taux de cette créance en se refinançant elle-même sur les marchés de capitaux. Le "profit" de l'entité commerciale est de fait la différence entre la valeur de rachat (interne) de la créance et le capital nominal prêté. Le refinancement se faisant sur les marchés de capitaux, la seconde entité rachète la créance à son prix de marché, option de remboursement anticipé comprise.

On calcule ici le taux nominal du prêt qu'il convient de facturer au client pour que le "profit" de l'entité commerciale ne soit pas affecté par l'existence d'une option de remboursement anticipé.

La démarche de calcul est donc la suivante :

- calcul de la valeur de marché d'un prêt de caractéristiques données (en particulier de taux nominal γ) dans le cas où l'emprunteur n'a pas le droit au remboursement par anticipation. Notons $V(\gamma)$ cette valeur. Le profit de l'entité commerciale serait alors de $V(\gamma) - Nominal$;
- calcul de la valeur de marché du même prêt (mais de taux nominal γ^*) dans le cas où les remboursements anticipés sont possibles (et suivent un des deux modèles décrits plus haut). Notons $V_{RA}(\gamma^*)$ la valeur à laquelle la seconde entité "rachète" la créance à l'entité commerciale ;
- calcul du taux nominal du prêt γ^* tel que les deux valeurs coïncident $V(\gamma) = V_{RA}(\gamma^*)$, c'est-à-dire tel que le "profit" de l'entité commerciale - une fois qu'elle s'est refinancée auprès de la seconde entitée - ne soit pas affecté.

Cette démarche est illustrée sur la figure 2 : si $\gamma = 6\%$ alors $\gamma^* = 8.3\%$. On notera que ces valeurs sont données à titre d'exemple et n'ont pas de réelle signification financière.

2.2 Application

On utilise le modèle de Vasicek comme modèle de diffusion des taux courts, c'est-à-dire que le taux court suit un processus du type $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$. On étudie la valeur de l'échéancier (figure 1) ainsi que le spread de taux $\gamma^* - \gamma$ qui devrait être facturé au client. Cette étude se fera (a) dans le cas de taux de remboursement anticipé déterministe, (b) dans le cas du modèle semi-rationnel, et (c) dans le cas du modèle rationnel. Nous laissons de côté la modélisation statistique, dont l'intérêt est plus pratique que théorique.

On étudie deux configurations sur les anticipations des taux d'intérêt futurs :

- les taux d'intérêt passent de 10% à environ 4% sur une période de 10 ans[4]. La valeur de l'échancier est représentée sur la figure 3, le spread de taux facial $\gamma^* - \gamma$ à rajouter au titre de l'option de remboursement anticipé est représenté sur la figure 4. Cette configuration de taux correspond à celle qui a pu être observée sur les 10 dernières années.
- les taux croissent à partir de 4% pour finir vers 6.5%, également sur une période de 10 ans[5]. La valeur de l'échancier est représentée sur la figure 5, le spread de taux facial $\gamma^* - \gamma$ est représenté sur la figure 6. Cette configuration de taux correspond à la situation actuelle.

Sur chacun des graphiques, "*Sans RA*" correspond au prix de l'échéancier lorsque les remboursements anticipés ne sont pas autorisés, "$RA = 10\%$" correspond à un taux de remboursement constant, "$seuil = x\%$" correspond au modèle "semi-rationnel" (i.e. $\tau = \inf\{t, MtM_t > (1 + \textit{pénalité})CRD_t + s\}$) avec un seuil s égal à $x\%$ du nominal, et "*Americaine*" correspond au modèle "rationnel".

La résolution numérique a été réalisée de la manière suivante :

[4] Les paramètres du modèle de Vasicek sont : $r_0 = 0.1$, $a = 0.5$, $b = 0.04$, $\sigma = 0.015$.
[5] Les paramètres du modèle de Vasicek sont : $r_0 = 0.04$, $a = 0.5$, $b = 0.065$, $\sigma = 0.015$.

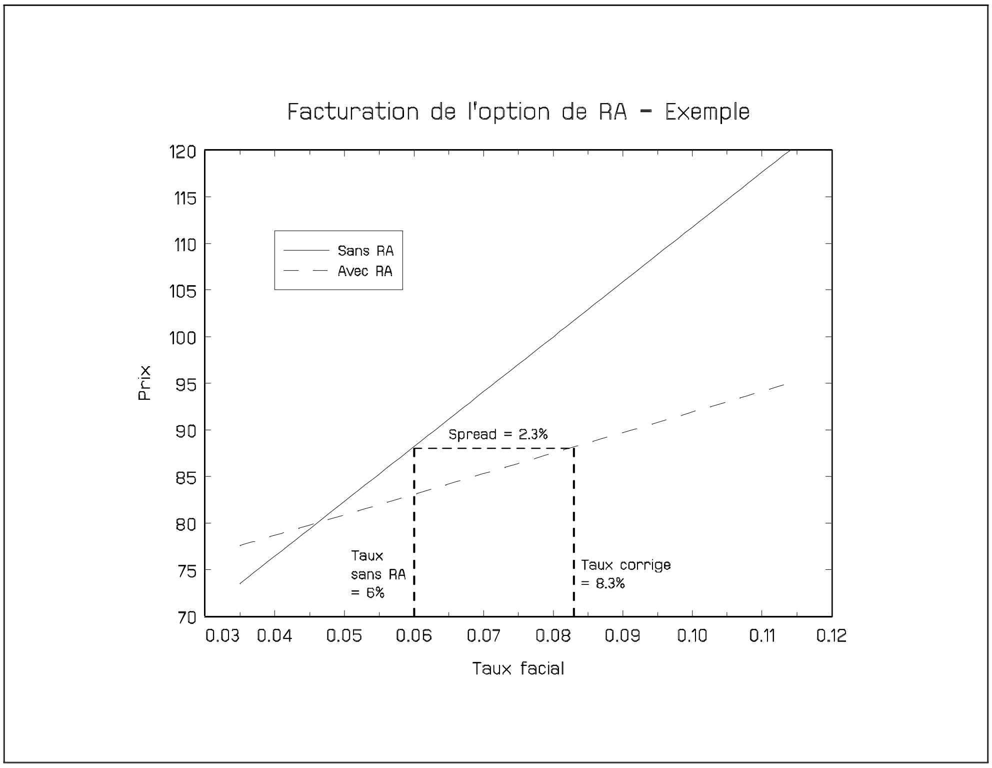

Fig. 2: Méthodologie utilisée pour la facturation de l'option de remboursement anticipé

- taux de remboursement anticipé déterministe : utilisation d'une formule explicite.
- modèle semi-rationnel : simulations de Monte-Carlo.
- modèle rationnel : résolution d'EDP par différences finies, schéma de Crank-Nicholson ($\theta = \frac{1}{2}$), avec 1000 points de discrétisation dans le temps, et 250 points de discrétisation dans l'espace.

Le prêt considéré a les caractéristiques suivantes : maturité = 10 ans, nominal = 100. Attachons-nous, maintenant, à interpréter les résultats numériques présentés sur les graphiques 3, 4, 5, et 6.

2.2.1 Cas du remboursement anticipé déterministe

Il s'agit du cas où le taux du prêt est calé sous l'hypothèse que les remboursements anticipés surviennent à un taux fixe. On dira par exemple que 10 % des emprunteurs remboursent par anticipation, chaque année, quels que soient les mouvements des taux d'intérêt. Compte-tenu de ce qui a été dit plus haut, ce type d'hypothèse est évidemment assez irréaliste, mais permet de cerner certains effets du remboursement par anticipation sur le prix de la créance.

On constate, en premier lieu, que, pour un taux facial assez élevé (8% par exemple sur la figure 3), la valeur de l'échéancier (i.e. le gain de la banque) est inférieure à celle du cas *"sans RA"*. Ce résultat est très intuitif : le taux du prêt est élevé, donc l'investisseur a intérêt à rembourser par anticipation. Ce remboursement de 10% par an fait perdre de l'argent à la banque.

Dans ce cas simple, il est relativement facile d'obtenir le taux de l'emprunt qui neutralise cette option de remboursement anticipé. Qualitativement, plus le taux de remboursement anticipé est élevé et plus le taux du prêt doit l'être également. En effet, même si pour l'entité commerciale le refinancement est moins cher (car la durée effective du prêt est plus courte), ce gain ne compense pas le manque à gagner dû au fait qu'elle ne reçoit pas une partie des intérêts du prêt.

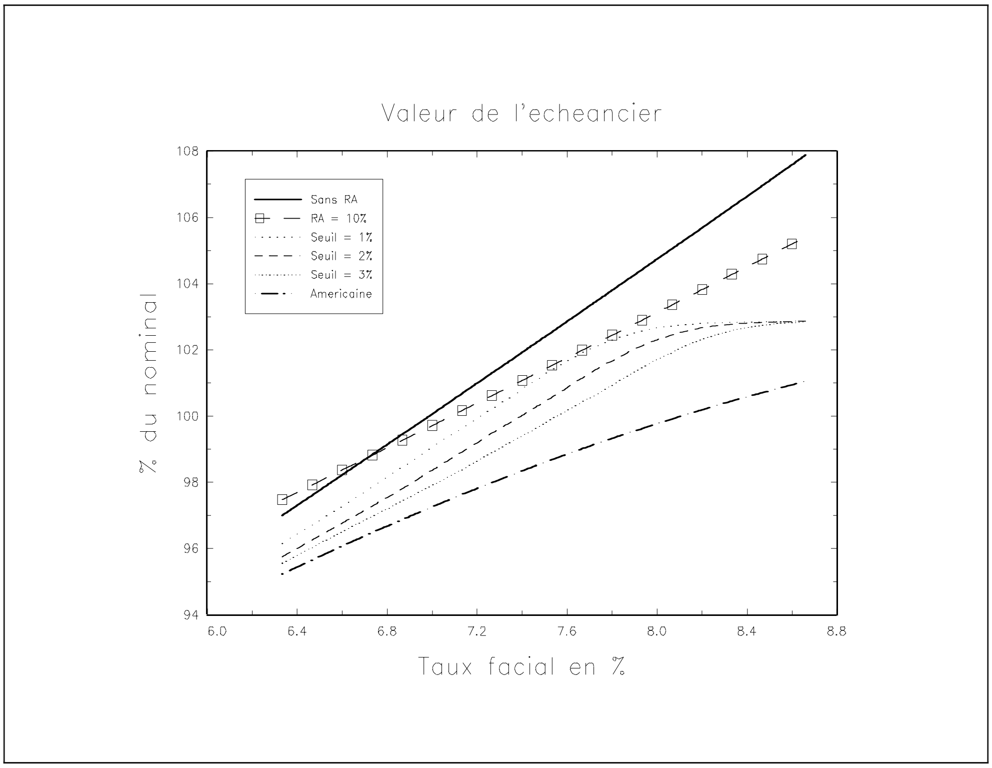

FIG. 3: Valeur de l'échéancier dans le cas d'une anticipation d'une baisse des taux d'intérêt

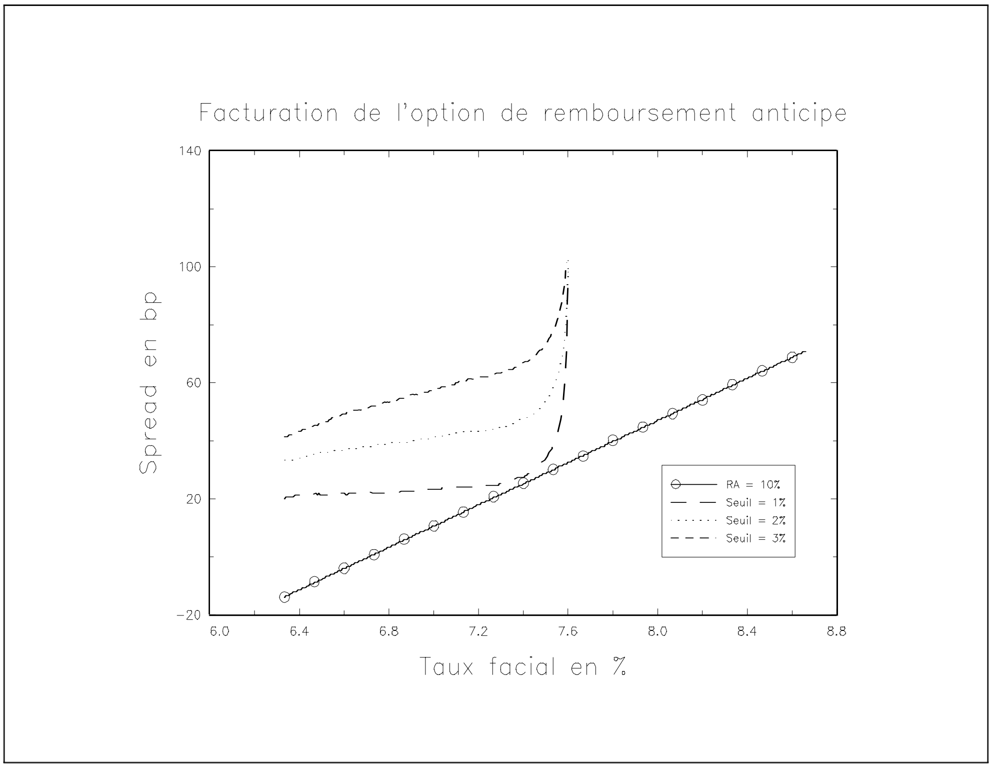

FIG. 4: Facturation de l'option dans le cas d'une anticipation d'une baisse des taux d'intérêt

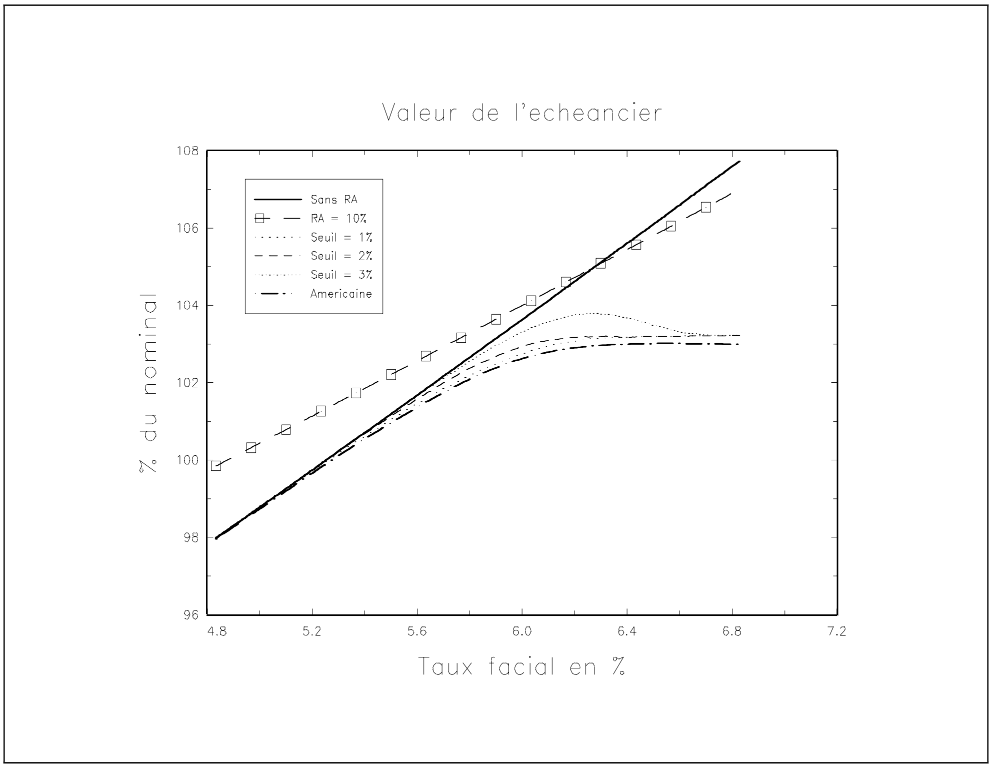

Fig. 5: Valeur de l'échéancier dans le cas d'une anticipation d'une hausse des taux d'intérêt

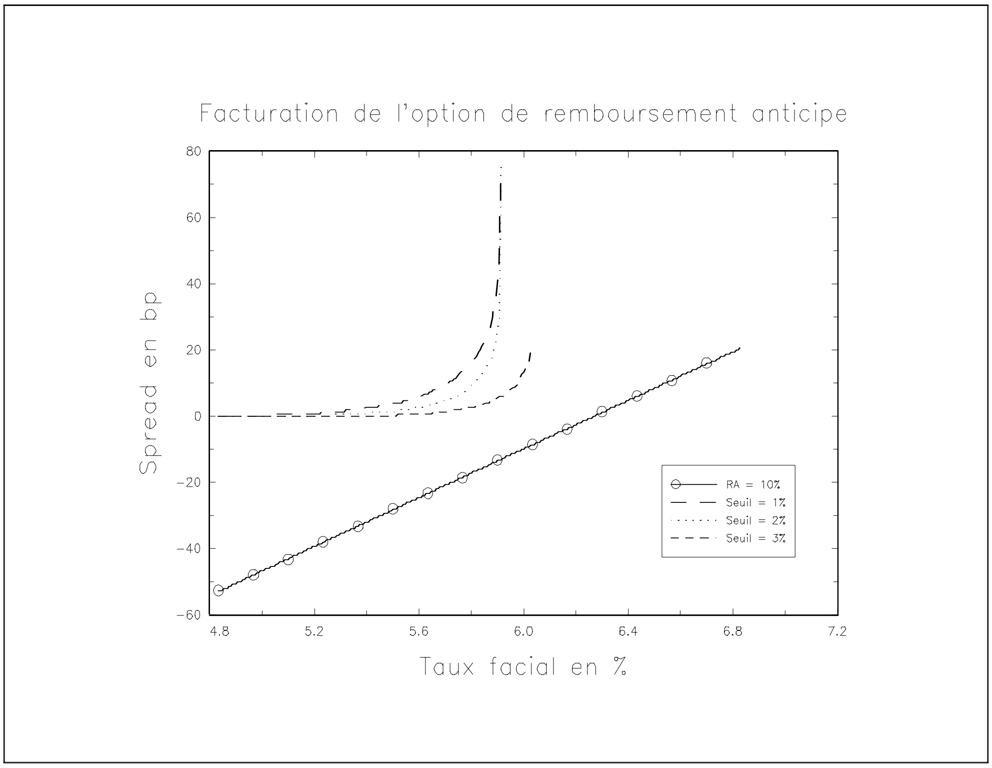

Fig. 6: Facturation de l'option dans le cas d'une anticipation d'une hausse des taux d'intérêt

Dans l'exemple des figures 3 et 4, si le taux facial est de 7.4%, le spread à rajouter au titre de l'option de remboursement anticipé est de 20 bp.

2.2.2 Cas du remboursement anticipé fonction des taux d'intérêt

Dans ce cas, il y a une sorte de rétroaction entre le taux de l'emprunt et le comportement de remboursement anticipé. Plus concrètement, augmenter le taux du prêt pour tenir compte du remboursement anticipé a deux effets :

- cela améliore la marge de la banque (car les mensualités augmentent) ;
- mais cela accroît l'incitation des emprunteurs à rembourser par anticipation dans le futur.

Dans ces conditions, cet effet de rétroaction rend les calculs plus compliqués mais surtout on verra qu'il peut ne pas y avoir de solution : il peut ainsi être impossible de trouver le taux du prêt qu'il conviendrait de facturer à un client très "dynamique", c'est-à-dire très prompt à rembourser par anticipation.

Méthode "semi-rationnelle" On s'intéresse maintenant à un investisseur qui adopte un comportement semi-rationnel, c'est-à-dire qui rembourse par anticipation dès qu'il a une incitation financière à le faire. On définit donc le temps jusqu'au remboursement anticipé par

$$\tau = \inf \{t, MtM_t > (1 + \textit{pénalité})CRD_t + \textit{seuil}\}$$

Lorsque le taux facial est trop élevé, tous les clients remboursent immédiatement par anticipation et paient le nominal plus la pénalité. Ce comportement traduit en réalité un refus des investisseurs à contracter un prêt à un tel taux facial. Ce phénomène a une conséquence importante : **il n'est pas toujours possible de facturer l'option par un spread de taux facial.** En fait, il existe un gain maximal que peut recevoir la banque. De ce fait, il existe également un taux facial limite au-delà duquel le prix est une fonction décroissante (ou constante) du taux facial. C'est le taux limite de facturation de l'option (voir le graphique (4), où le taux limite vaut 7.6% pour tous les seuils, et le graphique (6), où le taux limite est compris entre 5.8% (seuil 1%) et 6% (pour un seuil de 3%)).

Par ailleurs, on vérifie que le prix "avec option" est toujours inférieur au prix "sans option". Ceci traduit le fait qu'un individu "semi-rationnel" (et à seuil positif) ne rembourse par anticipation que lorsqu'il a une incitation financière à le faire.

Cette approche "semi-rationnelle" conduit à la notion de seuil optimal. En effet, pour chaque *scenario* de taux considéré (baisse ou hausse des taux), il semble légitime de se demander quel est le bon seuil à choisir *a priori*. Il s'agit en fait de trouver un compromis entre le gain à partir duquel on rembourse par anticipation et la probabilité qu'un tel gain apparaisse. Si un client est trop "gourmand", il risque de ne jamais pouvoir rembourser par anticipation. A l'inverse, un client pas assez "gourmand" aura tendance à rembourser trop vite par anticipation. On peut illustrer cette idée par la figure (5), où on considère des clients avec un taux facial γ de 6.2%. L'individu ayant un seuil de 3%, rembourse "trop peu souvent" par rapport au cas d'un seuil de 1 ou 2%. En définissant le seuil optimal comme le seuil qui, à taux facial fixé, minimise les flux actualisés versés par le client, on remarquera que ce seuil optimal dépend des conditions de marché et du taux facial. On peut alors comparer le gain réalisé avec ce seuil optimal à celui obtenu avec un modèle purement rationnel ; le gain obtenu avec une stratégie à seuil optimal constant n'atteint pas toujours (même rarement) le gain optimal (du modèle rationnel). Ceci s'explique par le fait que le modèle rationnel revient à considérer un seuil optimal endogène aléatoire[6] et variant avec le temps et les conditions de marché et n'est donc pas forcément constant.

Enfin, on notera que, dans le cas d'une hausse des taux d'intérêt, la différence entre les spreads du modèle semi-rationnel et du modèle déterministe est plus importante que dans le cas d'une baisse. Cependant, les spreads sont assez faibles, donc les risques de perte beaucoup plus faibles pour la banque. Le modèle déterministe est donc peu satisfaisant dans le cas d'une hausse des taux d'intérêt, mais une facturation de l'option paraît alors moins indispensable que dans le cas d'une baisse.

[6] Le temps d'arrêt optimal solution du problème d'arrêt (11), est adapté à la filtration des taux. Il ne dépend donc que de t et de r_t, ou de, manière équivalente, de t et de MtM_t, qui fait alors apparaitre l'idée de seuil endogène.

Méthode "rationnelle" Dans ce cas, le client optimise le moment auquel il va rembourser par anticipation en résolvant le problème (11). Evidemment, on constate sur les figures (3) et (5) que la valeur de l'échéancier est toujours la plus faible lorsqu'elle est calculée par la méthode rationnelle que lorsqu'elle est calculée par toute autre méthode. C'est donc ce type d'individu qui fera perdre le plus d'argent à la banque. Par conséquent, il est difficile de facturer l'option de remboursement anticipé dans la mesure où le spread de taux serait très important. L'avantage de cette méthode est qu'elle représente une borne supérieure de la perte possible pour la banque.

Conclusion

Nous avons présenté, au cours de cette étude, des idées permettant d'évaluer l'option de remboursement anticipé des prêts immobiliers. Nous avons envisagé plusieurs voies, selon les perspectives qu'elles offraient, et avons tenté de mettre en évidence leurs avantages et inconvénients :

- Le taux de remboursement anticipé est déterministe, indépendant des taux d'intérêt.
- Le taux de remboursement anticipé est supposé connu. Il est fonction de la durée restant à courir et du facteur Marked-to-Market ($= MtM - (1 + penalite) \times CRD$). Cette fonction est calculée à partir de données historiques.
- Le temps jusqu'au remboursement est modélisé en se donnant des règles sur le comportement du client. On a ainsi retenu trois spécifications particulières du remboursement anticipé.
  - $\tau = \inf\{t, r_t < r^* - s\}$. Il nous faut alors trouver un processus acceptable suivi par le taux, et qui nous permette de faire le pricing des options à barrière, de la même manière que nous sommes capable de le faire dans le cas d'un modèle du type Black & Scholes.
  - $\tau = \inf\{t, MtM_t > (1 + \textit{pénalité})CRD_t + s\}$. Il semble que cette modélisation, bien que moins intuitive, soit plus réaliste dans la mesure où elle s'intéresse réellement aux économies que peut faire l'investisseur en opérant un remboursement anticipé. On a exhibé, dans ce cas, le processus suivi par le MtM, sous les probabilités risque-neutre et forward-neutre. Quelques hypothèses supplémentaires permettent alors d'aboutir à une formule explicite pour le prix de l'option de remboursement anticipé.
  - L'option de remboursement anticipé est évaluée comme une option américaine où l'instant de remboursement est un temps d'arrêt optimal pour exercer l'option.

Nous avons proposé, dans chaque cas, une méthode d'estimation du taux facial qui doit être facturé au client contractant un prêt immobilier avec option de remboursement anticipé. On montre que l'entité commerciale qui octroie le prêt subit généralement un manque à gagner lorsque les remboursements anticipés sont possibles, bien qu'il existe une pénalité de sortie anticipée. Les résultats montrent par ailleurs que la facturation par un spread de taux n'est pas toujours possible. Il se peut, en effet, qu'un taux facial qui annule le manque à gagner de la banque n'existe pas. Enfin, la modélisation "semi-rationnelle" par le Mark-to-Market semble être un bon intermédiaire entre une modélisation purement rationnelle et une modélisation déterministe du taux de remboursement anticipé.

Un pas supplémentaire pourrait être envisagé dans cette étude. En effet, la méthode que nous avons utilisée consiste à fixer le taux d'emprunt en fonction des conditions de marché, sans distinction entre les individus. Cette méthode induit une certaine injustice puisque les "bons clients" (qui ne remboursent pas par anticipation), paient pour les "mauvais clients". Pour rétablir une tarification plus correcte, il faudrait logiquement facturer les prêts également en fonction de leurs caractéristiques personnelles (CSP, âge, situation familiale, lieu de domiciliation, etc.) dont on sait qu'elles conditionnent la propension à rembourser par anticipation.

Références

[1] M. Bellalah, E. Briys, F. De Varenne, H-M Mai, [1998], Options, Futures and Exotic Derivatives, University Edition, *John Wiley & Sons*

[2] P. D'Andria, J-F Boulier, L. Elie [1991], Modèle Analytique d'Evaluation des Options de Remboursement Anticipé, *Document de Travail*, Congrès AFFI 1992

[3] J-F Boulier, M. A. Levy, J.-F. Despoux [1991], Evaluer l'option de remboursement anticipé et optimiser la structure d'un fonds commun de créance, *Quants n°4*, CCF

[4] D. Duffie, D. Lando [1997], Term Structure of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information, *preprint*, CAF Copenhagen.

[5] N. El Karoui, [1999], Modèles Stochastiques de Taux d'Intérêts, *Polycopiés de Cours*, Université de Paris VI, Jussieu

[6] A. Frachot [1996], Les modèles de la structure des taux d'intérêt, *Polycopiés de Cours*, ENSAE

[7] A. Frachot, C. Gourieroux [1995], Titrisation et Remboursements Anticipés, *Economica*

[8] I. Karatzas, S. Shreve [1991], Brownian Motion and Stochastic Calculus, *Springer-Verlag,* New York

[9] I. Karatzas, S. Shreve [1998], Methods of Mathematical Finance, *Springer-Verlag,* New York

[10] F. Longstaff, E. Schwartz [1995], A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt, *Journal of Finance* vol. 50, pp. 789-819

[11] D. Madan, H. Unal [1998], Pricing the risk of default, *The Review of Derivatives Research,* 2, 121-160

[12] R. Merton [1973], Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Mangement Science* 4, pp 141-183

[13] R. Merton [1974], On the Pricing of Corporate Debt : the Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance,* 3, pp 449-470

[14] O. Vasicek [1977] An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* vol. 5, pp. 177-188

[15] E. Reiner, M. Rubinstein [1991], Breaking Down the Barriers, *RISK*, **September 1991**

[16] E. Reiner, M. Rubinstein [1991], Unscrambling the Binary Code, *RISK,* **October 1991**

[17] E. Schwartz, W. Torous [1989], Prepayment and the Valuations of Mortgage Backed Securities, *Journal of Finance, 44, 375 - 392*.

A Diffusion du Mark-to-Market

Le but dans cette section est d'étudier la possibilité d'appliquer les résultats obtenus avec un processus de Black & Scholes au cas où le temps jusqu'au remboursement anticipé est défini par

$$\tau = \inf\{t, MtM_t > CRD_t + s\}$$

Pour cela, on cherchera, dans un premier temps, le processus suivi par le MtM_t sous une probabilité forward-neutre.

A.1 Processus du Mark-to-Market sous la probabilité risque-neutre

Le marked-to-market MtM_t est défini par

$$MtM_t = \int_t^T mB(t,u)du$$

où $B(t,u)$ est le prix d'un zéro-coupon d'échéance u à la date t.

On se donne donc l'équation d'une diffusion pour le prix d'un zéro-coupon sous la probabilité risque-neutre :

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t dt + \Gamma(t,T)dW_t$$

où W_t est un mouvement brownien standard sous $\mathbb{Q}$. Ceci nous permet d'obtenir l'EDS vérifiée par le MtM_t. En effet :

$$\begin{aligned} MtM_{t+\Delta t} - MtM_t &= m\int_{t+\Delta t}^T (B(t,u) + \Delta B(t,u))du - m\int_t^T B(t,u)du \\ &= m\int_{t+\Delta t}^T \left(\int_t^{t+\Delta t} r_s B(s,u)ds + \Gamma(s,u)B(s,u)dW_s\right) du - m\int_t^{t+\Delta t} B(t,u)du \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini, nous voyons apparaître plus clairement le drift et la volatilité de MtM_t

$$= \int_t^{t+\Delta t} \left(r_s \left(\int_{t+\Delta t}^T mB(s,u)du\right) - mB(t,s)\right) ds + \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{t+\Delta t}^T m\Gamma(s,u)B(s,u)du\right) dW_s$$

En effet, lorsque Δt vers 0, et en négligeant les termes du second ordre (en $\circ(dt)$), nous avons

$$dMtM_t = (r_t MtM_t - m)\,dt + \left(\int_t^T mB(t,u)\Gamma(t,u)du\right) dW_t$$

où W_t est un mouvement brownien standard sous $\mathbb{Q}$.

A.2 Processus du Mark-to-Market sous la probabilité forward-neutre

Les expressions (9) et (10) d'évaluation des flux actualisés nécessitent des changements de probabilités pour annihiler les interférences entre les coefficients d'actualisation et les flux. Ce mécanisme a lieu en passant sous les probabilités forward-neutres. Nous donnons ici la diffusion suivie par MtM_t sous ces probabilités. Soit $\mathbb{Q}^u$ la probabilité définie par sa densité par rapport à $\mathbb{Q}$:

$$\frac{d\mathbb{Q}^u}{d\mathbb{Q}} = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \Gamma^2(s,u)ds + \int_0^t \Gamma(s,u)dW_s}$$

D'après le théorème de Girsanov, $\widehat{W}_t^u$ défini par $\widehat{W}_t^u = W_t - \int_0^t \Gamma(s,u)ds$ est un brownien standard sous $\mathbb{Q}^u$.

Comme $dW_t = d\widehat{W}_t^u + \Gamma(t,u)dt$, alors, sous la probabilité $\mathbb{Q}^u$, MtM_t suit un processus généré par :

$$\begin{aligned}
dMtM_t &= (MtM_t r_t - m)\, dt + \left(\int_t^T mB(t,s)\Gamma(t,s)ds\right)\left(d\widehat{W}_t^u + \Gamma(t,u)dt\right) \\
&= \left[MtM_t r_t - m + \Gamma(t,u)\left(\int_t^T mB(t,s)\Gamma(t,s)ds\right)\right] dt + \left(\int_t^T mB(t,s)\Gamma(t,s)ds\right) d\widehat{W}_t^u
\end{aligned}$$

L'idée d'appliquer les résultats obtenus dans le cadre d'un processus de Black & Scholes paraît alors difficile. En effet, le modèle obtenu est à volatilité et drift stochastiques. A ce stade, une hypothèse simplificatrice serait la bienvenue.

Remarque 2 *Dans le cas où la structure par terme de la volatilité est suffisamment "régulière", il semble légitime de supposer que :*

$$A_{t,T} = \frac{\int_t^T mB(t,s)\Gamma(t,s)ds}{\int_t^T mB(t,s)ds}$$

varie peu avec t. Alors :

$$\begin{aligned}
dMtM_t &= \left[(r_t + A_{t,T}\ \Gamma(t,u))\, MtM_t - m\right] dt + r_t + A_{t,T}\ MtM_t\ d\widehat{W}_t^u \\
&= (\alpha\ MtM_t - m)\, dt + \beta\ MtM_t\ d\widehat{W}_t^u
\end{aligned}$$

et on se ramène au cas de la valorisation d'options à barrières dans le cadre d'un modèle hybride.