Modélisation du risque de crédit et asymétrie d'information

David Kurtz, Groupe de Recherche Opérationnelle

10 juin 2004, Université de Poitiers

Introduction

(1) Le risque de crédit

(2) Modèles structurels

(3) Modèles à forme réduite

(4) Liens entre ces approches

(5) Conclusion

Introduction [2]

Nous supposons que toutes les variables économiques peuvent être décrites par des semi-martingales définies sur un espace probabilisé filtré

$$\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}, \mathsf{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}\right)$$

Nous notons $(r_t)_{t\geq 0}$ le processus des taux d'intérêt (=taux court).

Nous disposons d'une mesure de probabilité P^* équivalente à P telle que la valeur en t d'un actif versant 1 EUR à la date T si l'événement $A \in \mathcal{A}$ s'est produit s'écrit

$$\mathsf{E}^*\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)\,\mathrm{d}s\right) I_A \middle| \mathcal{G}_t\right]$$

Risque de crédit [1]

$=$ le risque qu'un débiteur ne soit pas en mesure d'honorer ses engagements (sur les coupons et/ou le principal d'une dette)

$\simeq$ le risque de contrepartie

$\simeq$ le risque de défaut

Risque de crédit [2]

Le risque de crédit est rémunéré par le paiement par le débiteur d'un taux supérieur au taux sans risque (= par ex. le taux auquel emprunte l'état).

$$\boxed{\text{spread émetteur} = \text{taux de la créance - taux sans risque}}$$

En pratique, on considère souvent le spread des *credit default swaps*.

Probabilités de défaut implicites [1]

$B(t,T)$ = valeur en t d'un titre rapportant 1 EUR en T (obligation zéro-coupon)

$\overline{B}(t,T)$ = valeur en t d'un titre rapportant 1 EUR en T si l'entreprise X n'a pas fait défaut à cette date (obligation zéro-coupon risquée)

Par AOA, on doit nécessairement avoir $\overline{B}(t,T) \leq B(t,T)$.

Ces titres n'existent pas réellement mais nous ferons l'hypothèse que leurs valeurs peuvent se déduire de celles des titres réellement échangés sur les marchés financiers.

Probabilités de défaut implicite [2]

On note τ l'instant de défaut de l'entreprise X et nous supposons que τ est indépendant du processus des taux d'intérêt $(r_t)_{t\geq 0}$. On a

$$B(t,T) = \mathsf{E}^*\Big[\exp\Big(-\int_t^T r(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big|\mathcal{G}_t\Big]$$
$$\overline{B}(t,T) = \mathsf{E}^*\Big[\exp\Big(-\int_t^T r(s)\,\mathrm{d}s\Big)I_{\{\tau>T\}}\Big|\mathcal{G}_t\Big] = B(t,T)\times\mathsf{P}^*[\tau>T|\mathcal{G}_t]$$

La quantité

$$P(t,T) := \mathsf{P}^*[\tau>T|\mathcal{G}_t] = \frac{\overline{B}(t,T)}{B(t,T)}$$

s'appelle *probabilité de survie implicite*.

Enjeux de la modélisation [1]

Le but de la modélisation du risque de crédit est double. Il s'agit

(1) de comprendre et d'expliquer les mécanismes économiques déterminant le défaut d'une entreprise,

(2) de retrouver les prix de marché observés dans le cadre d'un modèle qui pourra alors être utilisé pour extrapoler la valeur de produits financiers plus complexes.

Le but de la suite de l'exposé est de mettre en avant ce double aspect de la modélisation et les liens qui les unissent.

Modèles structurels [1]

Principe. On suppose qu'une entreprise est capable d'honorer ses engagements tant que la valeur de marché de ses actifs est suffisamment elevée.

Autrement dit, le défaut d'une entreprise est déclenché par le franchissement par le processus de valeur des actifs d'une barrière basse qui correspond au niveau de la dette.

On parle souvent de modèle de *premier instant de passage*.

Modèles structurels [2]

On suppose que l'entreprise considérée génère des cash-flows au taux δ qui est un processus $\mathbb{G}$-adapté tel que

$$\int_0^t |\delta_s| \, \mathrm{d}s < +\infty, \quad \forall t \geq 0.$$

À l'instant t La valeur de marché des actifs de la firme est donc

$$A_t = \mathrm{E}^* \Big[\int_t^\infty \mathrm{e}^{-r(s-t)\delta_s \, \mathrm{d}s} \Big],$$

et sous l'hypothèse que $\mathbb{G}$ est une filtration brownienne ceci entraîne que

$$\mathrm{d}A_t = (rA_t - \delta_t)\, \mathrm{d}t + \sigma_t \, \mathrm{d}B_t^* \, .$$

Modèles structurels [3]

On suppose que le passif de la firme est constitué

$\rightarrow$ d'actions (=pure equity),

$\rightarrow$ d'une obligation payant un coupon au taux continu c jusqu'à liquidation.

On suppose que les actionnaires qui dirigent l'entreprise ont le droit de se déclarer en cessation de paiement à tout temps d'arrêt τ. À cette date, ils donnent aux détenteurs de la dette leur droit sur tous les cash-flows futurs (=strict priority rule).

En pratique, les détenteurs de la dette peuvent avoir le droit d'obliger la liquidation de l'entreprise pour protéger leur investissement (=protective covenant).

Modèles structurels [4]

En l'absence de protective covenant, la valorisation des actions de la firme correspond à la résolution du problème de contrôle optimal stochastique suivant :

$$w(A_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathsf{E}^* \left[\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-rt} (\delta_t - c) \, \mathrm{d}t \right].$$

où $\mathcal{T}$ est l'ensemble des temps d'arrêt, qui peut être résolu explicitement pour un processus δ de la forme

$$\mathrm{d}\delta_t = \mu \delta_t + \sigma \delta_t \, \mathrm{d}B_t^*, \quad (\mu < r, \sigma > 0).$$

Dans ce cas, on peut montrer que

$$A_t = \frac{\delta_t}{r - \mu}.$$

Modèles structurels [5]

Si l'on cherche à résoudre le problème de contrôle stochastique précédent pour un temps d'arrêt optimal de la forme

$$\tau(A_B) = \mathrm{inf}\Big\{t \geq 0 \, : \, A_t \leq A_B\Big\},$$

on peut montrer que w est solution de l'équation de type Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\left\{ \begin{array}{rll} w'(x)\mu x + 0.5 w''(x)\sigma^2 x^2 - r w(x) & = (\mu - r)x + c, & x > A_B\,, \\ w(x) & = 0, & x \leq A_B\,, \\ w'(A_B) & = 0. & \end{array} \right.$$

Modèles structurels [6]

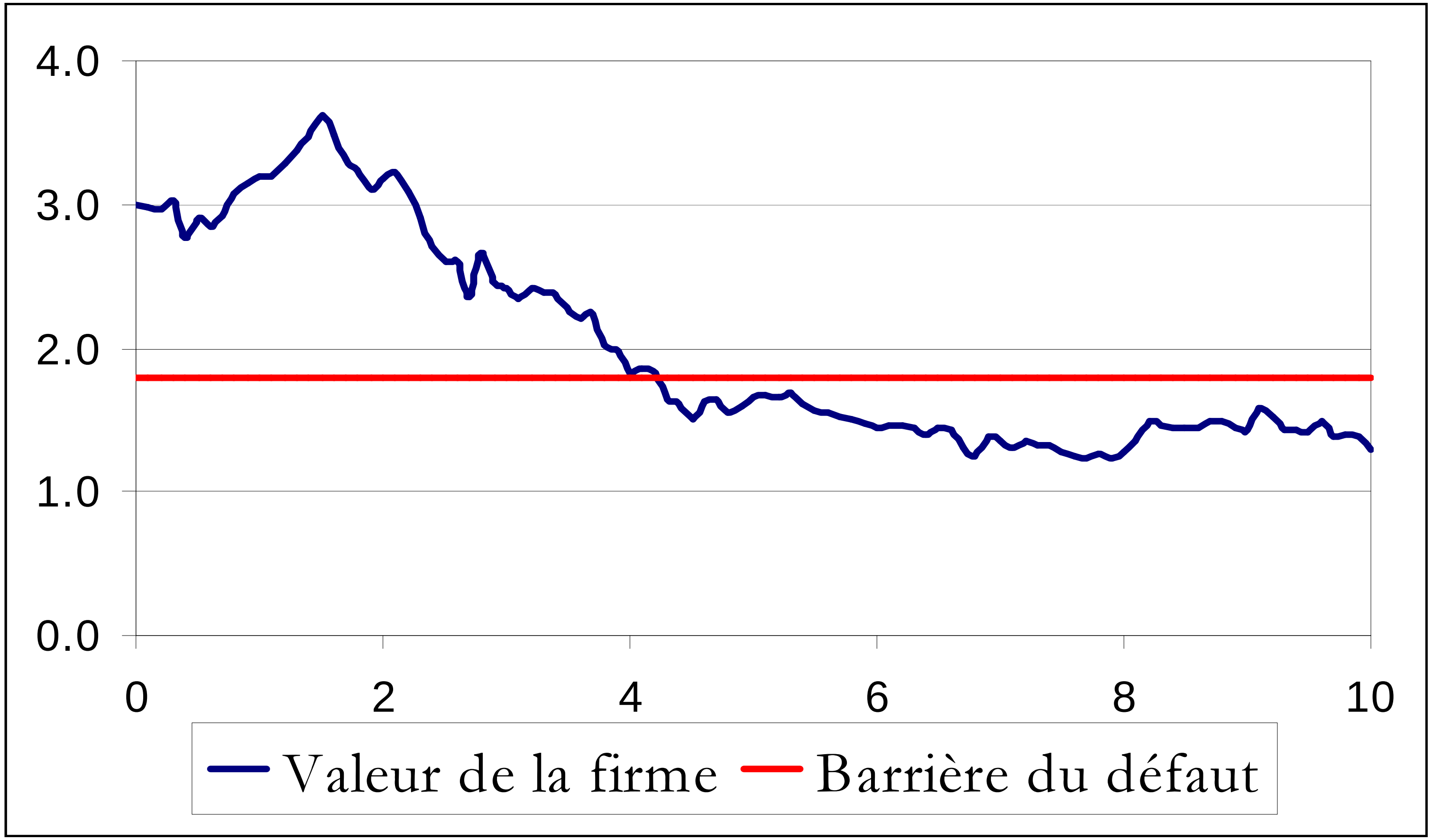
Partant de cette équation, on peut montrer en utilisant un théorème de vérification standard que la solution recherchée se met sous la forme

$$w(x) = x - A_B\left(\frac{x}{A_B}\right)^{-\gamma} - \frac{c}{r}\left[1 - \left(\frac{x}{A_B}\right)^{-\gamma}\right]$$

où

$$\gamma = \frac{m + \sqrt{m^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}, \quad m = \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \quad A_B = c \times \frac{\gamma}{r(1+\gamma)}$$

Modèles structurels



Modèles structurels [8]

Avantages et inconvénients.

(+) Modèle explicatif du risque de défaut

(+) Lien explicite entre risque de crédit et risque equity

(-) Difficile à calibrer sur des données de marché (= probabilités de défaut implicites)

(-) Les spreads court-terme ($\simeq$ taux de défaut instantané) dans un modèle de la firme sont proche de zéro. Nous verrons comment cette propriété de ces modèles est liée au fait que les temps d'arrêt de la filtration brownienne sont prévisibles.

Modèles à forme réduite [1]

Principe. Dans ce cadre, on ne cherche plus à expliquer l'arrivée de l'instant du défaut : on le modélise directement en spécifiant de manière exogène son *intensité* ou *taux de défaut*.

Définition. Soit τ un G-temps d'arrêt. On dit que le processus prévisible λ est l'intensité de τ si

$$I_{\{\tau \le t\}} - \int_0^{\min(\tau,t)} \lambda(s)\,\mathrm{d}s$$

est une G-martingale. Le processus λ s'interprète comme un taux de défaut instantané :

$$\mathrm{P}[\tau \in (t, t+\mathrm{d}t)|\mathcal{G}_t] = \lambda(t)\,\mathrm{d}t.$$

Modèles à forme réduite [2]

Le cadre doublement stochastique. On suppose qu'il existe une sous-filtration F de G. On modèlise l'instant de défaut τ d'une entreprise comme un G-temps d'arrêt tel qu'existe un processus F-prévisible vérifiant

(1) λ est la G-intensité de τ

(2)

$$\mathrm{P}[\tau > s|\mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t] = I_{\{\tau>t\}} \exp\left(-\int_t^s \lambda(u)\,\mathrm{d}u\right), \quad t \leq s$$

En fait, conditionnellement à $\mathcal{F}_\infty$, τ est le premier instant d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité λ et c'est cette propriété et la tractabilité analytique qui en découle qui intéresse tout particulièrement le praticien.

Modèles à forme réduite [3]

Processus de Cox. La méthode la plus couramment utilisée pour construire de tels temps d'arrêt est la suivante : partant

– d'une filtration F,

– d'un processus strictement positif et F-prévisible λ

– d'une v.a. de loi uniforme sur (0, 1) et indépendante de $\mathcal{F}_\infty$,

on pose

$$\tau = \inf\Big\{t > 0\,;\ \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s > -\ln U\Big\}, \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \wedge t).$$

Alors, τ est un temps d'arrêt de G-intensité λ et doublement stochastique relativement à la filtration F.

Modèles à forme réduite [4]

Évaluation des actifs risqués. Nous considérons un actif dont le payoff à maturité T est décrit par une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable F. Nous nous plaçons dans l'hypothèse *Fractional Recovery of Market Value* pour un taux de recouvrement $R \in (0,1)$. Autrement dit, nous supposons que la valeur en t du titre à évaluer est solution de l'équation différentielle stochastique backward

$$V(t) = \mathsf{E}^*\left[I_{\{\tau>T\}}\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\,\mathrm{d}s}F + I_{\{t<\tau\leq T\}}\mathrm{e}^{-\int_t^\tau r(s)\,\mathrm{d}s}RV(\tau-)\middle|\mathcal{G}_t\right]$$

qui admet pour unique solution

$$V(t) = I_{\{\tau>t\}}\mathsf{E}^*\left[\exp\left(-\int_t^T\Big(r(s)+(1-R)\lambda(s)\Big)\,\mathrm{d}s\right)F\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

Le processus $s=(1-R)\lambda$ s'interprête comme le *spread court-terme* du titre considéré (*inégalité du triangle*).

Modèles à forme réduite [5]

Avantages et inconvénients.

(+) Grande tractabilité analytique

(+) Interprétation immédiate de l'intensité en terme du spread court terme

(+) Facile à calibrer sur des données de marché (= probabilités de défaut implicites)

(-) Absence de liens structurels entre le risque equity et le risque de crédit

Liens entre les deux approches [1]

Les instants de premier passage n'admettent pas d'intensité relativement à la filtration brownienne.

L'instant de défaut modélisé comme un premier instant de passage ne peut pas admettre d'intensité. C'est une propriété de la filtration brownienne : en effet, dans le cas contraire et d'après le théorème de représentation existerait un processus prévisible H tel que

$$M_t = I_{\{\tau \leq t\}} - \int_0^{\min(\tau,t)} \lambda(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t H_s\,\mathrm{d}B_s$$

de sorte qu'on aurait

$$\Delta M_\tau = 1 = 0 \quad !!!!!$$

Liens entre les deux approches [2]

Asymétrie d'information.

Pour voir apparaître un taux de défaut différent de zéro dans un modèle structurel, il faut ré-introduire de la discontinuité dans l'information. En pratique, ceci peut être fait en supposant que les investisseurs disposent d'une information dégradée par rapport à celle dont disposent les actionnaires qui dirigent la firme et décident de l'instant de la liquidation (=défaut).

Nous allons supposer que l'investisseur n'observe la valeur des actifs de la firme qu'en des instants de temps discret et que cette observation est "bruités".

Liens entre les deux approches [3]

Modèle structurel avec asymétrie d'information.

Nous supposons que la filtration $\mathbb{G}$ représentant l'information dont disposent les actionnaires qui dirigent l'entreprise est brownienne et que l'instant de défaut est défini comme le premier instant de passage $\tau = \tau(v)$ du logarithme de la valeur des actifs de l'entreprise sous le niveau v.

Soient $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$ les instants où sont publiées les informations sur le bilan de l'entreprise. Nous supposons que l'information disponible aux investisseurs est décrite par la filtration

$$\mathcal{H}_t = \sigma(Y_{t_i}\,;\, i : t_i \leq t) \vee \sigma(\tau \wedge t)$$

$$\text{où } Y_t = Z_t + U_t \text{ avec } Z_t = \ln A_t \text{ et } U_t \sim N(u, a^2)$$

Liens entre les deux approches [4]

Calculs d'intensité.

Nous nous plaçons en l'instant $t = t_1$. Soient
$\rightarrow$ λ_{G} la G-intensité de τ
$\rightarrow$ λ_{H} la H-intensité de τ

Nous savons déjà que $\lambda_{\mathsf{G}} = 0$. Nous allons le re-vérifier.

Nous allons montrer qu'a contrario $\lambda_{\mathsf{H}} \neq 0$.

Ainsi, l'existence d'une intensité dans les modèles à forme réduite trouvera sa justification dans l'asymétrie d'information existant entre les actionnaires (ou le management de l'entreprise) et les investisseurs.

Liens entre les deux approches [5]

Densité de Z_t sachant l'observation bruitée Y_t et $\tau > t$.

Soit

$$\psi(z, x, \sigma\sqrt{t}) = \mathsf{P}^*\Big[\min_{\leq s\leq t} Z_s > 0 | Z_0 = z, Z_t = x\Big] = 1 - \exp\Big(-\frac{2zx}{\sigma^2 t}\Big)$$

D'après la formule de Bayes

$$b(x|Y_t, Z_0, t)\,\mathrm{d}x := \mathsf{P}^*\Big[Z_t \in (x, x + \mathrm{d}x)\,;\,\tau > t\Big|Y_t\Big]$$

$$= \frac{\psi(Z_0 - v, x - v, \sigma\sqrt{t})\phi_U(Y_t - x)\phi_Z(x)}{\phi_Y(Y_t)}\,\mathrm{d}x$$

et la densité recherchée s'écrit (cette quantité pouvant être explicitée)

$$g(x|Y_t, z_0, t) = \frac{b(x|Y_t, z_0, t)}{\int_v^\infty b(z|Y_t, z_0, t)\,\mathrm{d}z}$$

Liens entre les deux approches [6]

Taux de défaut instantanés.

Soit

$$\pi(t,x) := \mathsf{P}\Big[\min_{0\le s\le t}(x+ms+\sigma B_s) < 0\Big], \qquad (x>0).$$

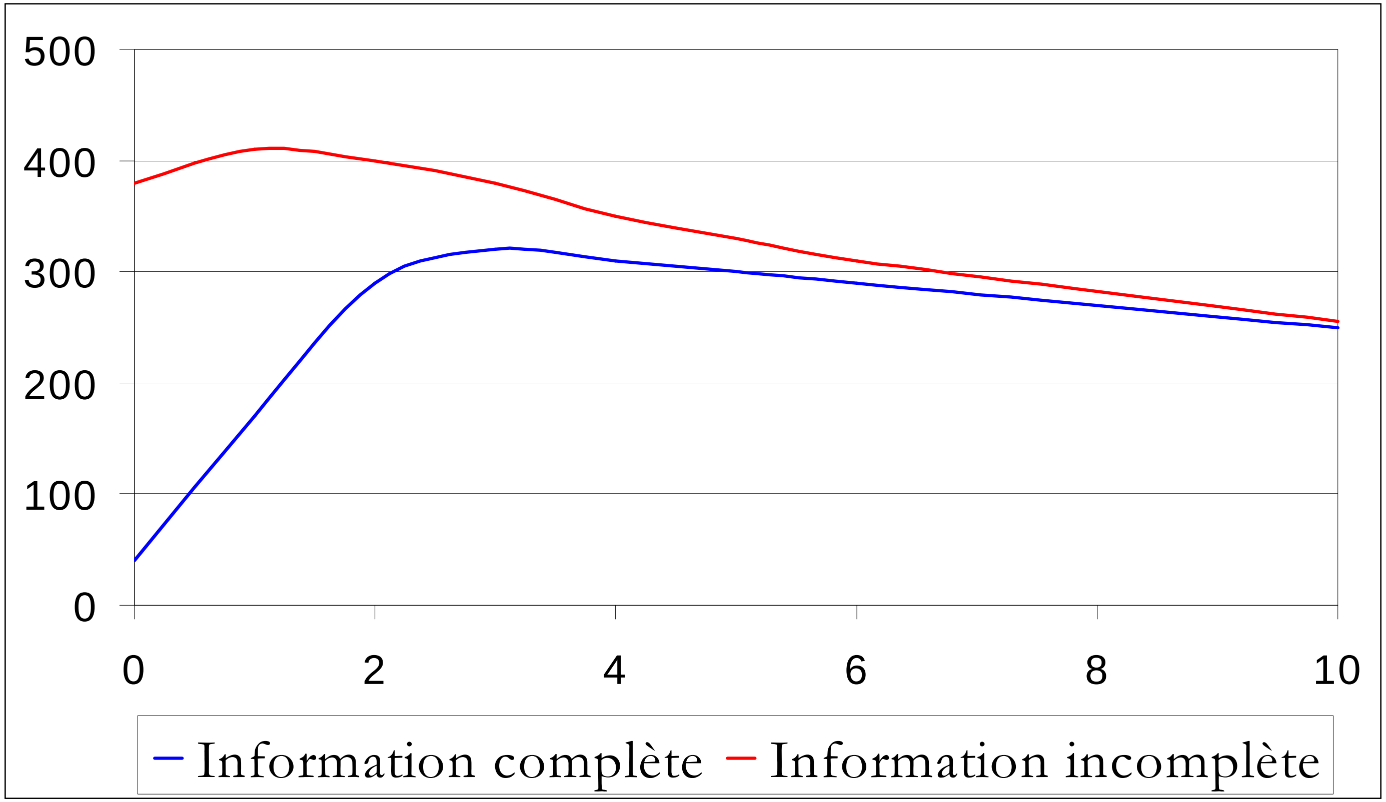
En interprétant l'intensité comme un taux de défaut instantané conditionnel, il vient en information complète

$$\lambda_{\mathsf{G}}(t) = \lim_{h\downarrow 0}\frac{\pi(h, Z_t - v)}{h} = 0$$

et en information incomplète

$$\lambda_{\mathsf{F}}(t) = \lim_{h\downarrow 0}\int_v^\infty \pi(h, x-v)g(x|Y_t, z_0, t)\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma^2}{2}\partial^+ g(v|Y_t, z_0, t) \neq 0.$$

Conséquence sur les spreads de credit default swap.



Conclusions

Il existe deux approches pour la modélisation du risque de crédit :

– l'approche structurelle

– l'approche à forme réduite

Nous avons vu que l'on pouvait interpréter ces deux modèles le liens entre ces deux modèles en terme d'asymétrie d'information entre les différentes parties en présence.

Cette possibilité justifie la pratique courante consistant à modéliser les structures par terme de spread de crédit par des modèles à forme réduite.

Références [1]

[1] Duffie (D.), Lando (D.). Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information. *Econometrica*, **69**, 633-664 (2001).

[2] Leland (H.), Toft (K.). Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads. *Journal of Finance*, **51**, 987-1019 (1996).

[3] Duffie (D.), Singleton (K.). Modeling Term Structures of Defaultable Bonds. *Review of Financial Studies*, **12**, 687-720 (1999).