



LE CALCUL DE MALLIAVIN APPLIQUÉ À LA FINANCE

FRÉDÉRIC COSMAO, FRÉDÉRIC DUPUY ET ANTOINE GUILLON

Groupe de Travail

Dirigé par Jean-Frédéric Jouanin, Ashkan Nikeghbali et Thierry Roncalli

4 Juin 2002

Introduction

Ce mémoire introduit une théorie de calcul variationnel stochastique aussi appelée Calcul de Malliavin. La recherche dans ce domaine est très vivante depuis une dizaine d'années et les applications de cette théorie à la finance sont nombreuses. Cette théorie comporte une grande dominante de calcul stochastique au formalisme parfois complexe.

Pour la rendre accessible aux non-initiés, nous avons tenté de l'exposer de manière didactique et intuitive en privilégiant les exemples. Nous nous intéressons ici essentiellement à deux champs d'applications.

Dans un premier temps nous présentons une nouvelle technique pour le calcul des sensibilités du prix d'une option à différents paramètres, aussi appelées grecques, dans un cadre assez général d'options à payoff discontinus, *path-dependent*, sur multi sous-jacents. Le résultat fondamental de l'approche par le calcul de Malliavin (FOURNIÉ et al. [FLLLT99a], BENHAMOU [BEN00a]) est que celui-ci permet, par des méthodes de Monte Carlo, d'estimer les grecques non plus par Différences Finies comme c'est habituellement le cas, mais par une seule espérance, celle du produit du payoff par un poids indépendant du payoff (grecque = $\mathbb{E}[\text{payoff} \cdot \text{poids}]$). Nous essayons également de comparer les deux approches, Différences Finies et Malliavin, pour déterminer les profils de payoff pour lesquels le calcul de Malliavin s'avère le plus pertinent.

Dans un deuxième temps nous proposons, à l'aide du calcul de Malliavin (FOURNIÉ et al. [FLLL01b], LIONS ET REGNIER [LR01]), une nouvelle représentation des espérances conditionnelles ainsi que ses applications au *pricing* et au *hedging* d'options américaines.

Nous tenons à remercier :

- nos directeurs de GT (Jean-Frédéric Jouanin, Ashkan Nikeghbali et Thierry Roncalli) pour leur soutien technique et moral, leur disponibilité,
- toute l'équipe du GRO,
- Emmanuel Gobet et Bruno-Denize Bouchard pour leurs éclaircissements,
- les animateurs et intervenants du colloque *Application du Calcul de Malliavin en Finance*, les 13 et 14 décembre 2001 à l'INRIA.

Table des matières

Introduction	1
1 Introduction au calcul de Malliavin	5
1.1 Définition des opérateurs de Malliavin	5
1.1.1 Définition sur des espaces simples	5
1.1.2 Extension des opérateurs	7
1.2 Propriétés	8
1.2.1 Formule d'intégration par parties	8
1.2.2 Formules de calcul et de commutation	9
1.3 Un exemple fondamental : le processus des variations premières	10
1.4 Extension au cas multi-dimensionnel	11
2 Calcul des sensibilités et applications aux options exotiques	13
2.1 Calcul de Malliavin et calcul des sensibilités : méthodologie	13
2.1.1 Les sensibilités : cadre de travail	13
2.1.2 Evaluation par le calcul de Malliavin	14
2.1.3 Extension des résultats	16
2.2 Comparaison des méthodes	19
2.2.1 La méthode des différences finies	19
2.2.2 La méthode du poids de Malliavin et introduction d'une fonction de contrôle	20
2.3 Applications	21
2.3.1 Le cas de l'option européenne	21
2.3.2 Le cas de l'option binaire	23
3 Extension au cas des options multi sous-jacents	27
3.1 Calculs théoriques des coefficients de sensibilités	27
3.1.1 Résultats généraux	27
3.1.2 Application au calcul des grecques	28
3.2 Applications	30
3.2.1 Un exemple avec l'option sur Spread	30
3.2.2 Un exemple avec l'option WorstOf	31
4 Valorisation et sensibilités d'une option américaine	35
4.1 L'échec de Monte Carlo pour les options américaines	35
4.1.1 Formulation du problème en terme d'espérances conditionnelles	36
4.1.2 Un algorithme inefficace numériquement	36
4.2 Nouvelle représentation d'espérance conditionnelle	37
4.2.1 Un exemple de processus u	39
4.2.2 Le concept de fonction localisante	40
4.3 Applications aux options américaines	40
4.3.1 L'algorithme de valorisation	40
4.3.2 Résultats numériques	41
Conclusion	43

A Compléments sur le Calcul de Malliavin	i
A.1 Lien entre Malliavin et calcul de sensibilité	i
A.1.1 L'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck	i
A.1.2 Formule d'intégration par parties	i
A.2 Passage des payoff dans \mathcal{C}_K^∞ aux payoff dans L^2 : démonstration	ii
B Une application de la formule de Clark-Ocone	v
C Extension à la volatilité stochastique	vii
D Les techniques de Monte-Carlo	ix
D.1 Rappel Monte-Carlo	ix
D.2 Méthodes classiques de réduction de variance.	x
E Quelques options exotiques	xiii
E.1 Les options asiatiques	xiii
E.1.1 Caractérisation des poids	xiv
E.1.2 Valorisation d'options asiatiques par les techniques de Monte-Carlo	xiv
E.2 EDP et arbres appliqués aux options asiatiques	xvi
E.2.1 Une méthode aux différences finies	xvi
E.2.2 La méthode d'interpolation de Hull et White	xvi
E.3 Les options barrières et lookback	xvii
E.3.1 Préliminaires sur les options barrières	xviii
E.3.2 Les aménagements nécessaires pour la méthode	xxi
E.3.3 Passage de la diffusion à un brownien avec drift	xxi
E.3.4 Deux exemples de processus dominants	xxii
F Résultats numériques dans le cas multi dimensionnel	xxiii
F.1 Calcul du Kappa	xxiii
F.2 Résultats numériques	xxiv
G Sensibilités d'options américaines	xxvii
G.1 Les sensibilités	xxvii
G.2 Pricing et Hedging d'une option américaine : cas multi-dimensionnel	xxix
G.2.1 Introduction et notations	xxix
G.2.2 Le calcul du Delta	xxix

Chapitre 1

Introduction au calcul de Malliavin

En dimension finie, le calcul différentiel usuel traduit la dépendance d'une fonction par rapport aux coordonnées d'un vecteur de \mathbb{R}^d . Le calcul de Malliavin est un calcul différentiel mais sur un espace de dimension infinie, l'espace de Wiener $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^d)$. Sur cet espace, une trajectoire du brownien peut-être comprise comme *la fonction continue la plus générale qui soit*. Les trajectoires du brownien sont les pendants des vecteurs en dimension finie : l'opérateur de différentiation, ou dérivée de Malliavin D , traduit la dépendance d'une variable aléatoire¹ par rapport aux accroissements d'une trajectoire du brownien. Pour une approche qui se veut d'abord didactique, nous nous limitons aux outils nécessaires à la compréhension du reste du rapport. Nous fournissons également des exemples simples mais instructifs. Pour une présentation plus complète, les ouvrages de référence sont ceux de NUALART [NUA95] et de FRIZ [FRI01]. Nous nous sommes inspirés d'un cours sur le calcul de Malliavin par BALLY [BAL01].

Cette section s'organise en trois parties. Dans la première, nous définissons sur des objets simples deux opérateurs : d'une part l'opérateur de dérivation, ou dérivée de Malliavin D , d'autre part l'intégrale de Skorokhod² δ . Ensuite, on les étend par densité à des espaces plus riches. Nous nous contenterons essentiellement de résultats en dimension 1, cependant on trouvera à la fin de ce chapitre les extensions au cas multidimensionnel. Dans un second temps, nous présentons les propriétés qui nous intéressent à commencer par la formule d'intégration par parties. Elle jouera un rôle central dans les démonstrations théoriques de l'exposé. Enfin, nous consacrerons un paragraphe à un exemple fondamental pour les calculs et les implémentations numériques. En effet, nous calculons la dérivée au sens de Malliavin d'une diffusion dans un cadre général avant d'exhiber les formules fermées dans le cadre simplifié de Black-Scholes.

1.1 Définition des opérateurs de Malliavin

Dans cette section nous définissons les opérateurs fondamentaux. On se restreint à l'intervalle $[0, 1]$ pour simplifier.

Notations 1 *On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un mouvement brownien noté $(W_t)_{0 \leq t \leq 1}$ et on note $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s; s \leq t)$. On subdivise l'intervalle $[0, 1]$ à l'aide des dyadiques $t_k^n = k2^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, 2^n\}$. Enfin, on note également $\Delta_k^n = W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}$ les accroissements du mouvement brownien et $\Delta^n = (\Delta_0^n, \dots, \Delta_{2^n-1}^n)$*

1.1.1 Définition sur des espaces simples

Nous introduisons maintenant les espaces simples sur lesquels on va définir nos deux opérateurs. $\mathbf{C}_p^\infty(\mathbb{R}^{2^n})$ désigne l'ensemble des fonctions infiniment dérivables à croissance au plus polynômial à l'infini.

¹Pour préciser l'analogie, une variable aléatoire peut s'interpréter comme une fonction d'un espace de Wiener vers un espace vectoriel réel.

²C'est une extension de l'intégrale d'Itô valable pour des processus qui ne sont pas adaptés.

Définition 1 (L'ensemble des fonctionnelles simples) Soit :

$$S_n = \left\{ f(\Delta_0^n, \dots, \Delta_{2^n-1}^n); f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^{2^n}) \right\}.$$

Les S_n forment une suite croissante d'ensembles inclus dans $L^2(\Omega)$. Les éléments de $S = \bigcup_{n \geq 1} S_n$ s'appellent fonctionnelles simples.

Cet ensemble nous permettra de définir la dérivée de Malliavin. L'espace des fonctionnelles simples est construit de telle sorte qu'apparaisse clairement la dépendance d'une variable aléatoire de S_n avec les accroissements du brownien. De façon analogue, nous définissons les ensembles qui serviront à construire l'intégrale de Skorokhod.

Définition 2 (L'ensemble des processus simples) Soit :

$$P_n = \left\{ \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(t) F_i(\omega); (t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega \text{ et } F_k \in S_n \right\}.$$

Les P_n forment une suite croissante d'ensembles inclus dans $L^2([0, 1] \times \Omega)$. Les éléments de $P = \bigcup_{n \geq 1} P_n$ s'appellent processus simples.

Nous pouvons désormais introduire les opérateurs sur ces espaces :

Définition 3 (L'opérateur de dérivation au sens de Malliavin) Soit $F \in S$, alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $F = f(\Delta^n)$. L'opérateur de dérivation, au sens de Malliavin, de la fonctionnelle simple F en un point $s \in [t_k^n, t_{k+1}^n[$ est alors la fonction $D : S_n \rightarrow P_n$ définie par $D_s F = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\Delta^n)$, c'est-à-dire :

$$D_s F = \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(s) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\Delta^n)$$

Il est logique que cet opérateur de dérivation associe à une variable aléatoire un processus. A la date s , la dérivée au sens de Malliavin traduit l'impact des accroissements du brownien à cette date sur une variable aléatoire. A partir de cette définition, on constate déjà que pour une variable aléatoire \mathcal{F}_t -adaptée et pour $s > t$ on a $D_s F = 0$: une variable aléatoire caractérisée à une date donnée ne dépend pas des accroissements postérieurs du brownien.

Exemple : on calcule la dérivée au sens de Malliavin de W_1 . Notons que $W_1 = \Delta_1^1$ donc $D_s W_1 = \mathbf{1}_{[0,1]}(s)$

Définition 4 (L'opérateur d'intégration au sens de Skorokhod) Soit $u \in P$, alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u \in P_n$. L'opérateur d'intégration, au sens de Skorokhod, du processus simple u est alors la fonction $\delta : P_n \rightarrow S_n$ définie par

$$\delta(u) = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i(\Delta^n) \Delta_i^n - \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\Delta^n) \frac{1}{2^n}$$

avec :

$$u(t, \omega) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(t) F_i(\omega) \text{ et } F_i = f_i(\Delta^n)$$

Notons que le premier terme de ces deux sommes correspond à une intégrale usuelle d'Itô. Le second terme prend en compte, le fait que le processus n'est pas nécessairement adapté. **Ce deuxième terme est nécessaire pour obtenir la relation d'intégration par parties** et a été intégré dans la définition dans ce but. Nous reviendrons sur ce point dans la partie relative aux propriétés de ces opérateurs.

Si on définit les processus prévisibles par :

$$\forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, f_k(\Delta^n) = f_k(\Delta_0^n, \dots, \Delta_{k-1}^n)$$

On remarque que lorsque le processus simple u est prévisible, le second terme de cette somme s'annule. Quand on étend cette propriété par densité, les processus adaptés étant des limites de processus prévisibles, les intégrales de Skorokhod coïncident avec celles d'Itô.

1.1.2 Extension des opérateurs

Nous allons maintenant étendre les opérateurs D et δ à des espaces plus gros. Notons dans un premier temps que :

- S est dense dans $L^2(\Omega)$,
- P est dense dans $L^2([0, 1] \times \Omega)$.

Le but serait donc d'étendre les opérateurs D et δ respectivement à $L^2(\Omega)$ et à $L^2([0, 1] \times \Omega)$. Pourtant, ces opérateurs n'étant pas continus, nous ne pouvons pas appliquer les méthodes habituelles d'extension et nous devons nous contenter d'une extension moins riche.

Proposition 1 *D et δ sont des opérateurs fermés, c'est-à-dire que si $(\mathbf{F}_n)_n$ est une suite de S qui tend vers 0 dans $L^2(\Omega)$ et si $(D\mathbf{F}_n)_n$ tend vers u dans $L^2([0, 1] \times \Omega)$, alors $u = 0$. Il en va de même pour δ .*

Ci-dessous la définition de l'espace $\mathbb{D}^{1,2}$ sur lequel on peut étendre la notion de dérivée au sens de Malliavin.

Définition 5 *On définit*

$$\mathbb{D}^{1,2} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F} \in L^2(\Omega), \text{ tq } \exists (\mathbf{F}_n)_n \text{ suite de } S \text{ tq} \\ \mathbf{F}_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \mathbf{F} \\ D\mathbf{F}_n \xrightarrow{L^2([0,1] \times \Omega)} u \end{array} \right\}$$

On pose alors pour $\mathbf{F} \in \mathbb{D}^{1,2}$,

$$D\mathbf{F} = u$$

Remarque 1 *La définition de $D\mathbf{F}$ ne dépend pas de la suite $(\mathbf{F}_n)_n$ car l'opérateur D est fermé. On définit également l'espace $\text{Dom}(\delta)$ sur lequel on étend la notion d'intégrale de Skorokhod.*

Définition 6 *On appelle $\text{Dom}(\delta)$ l'ensemble des $u \in L^2([0, 1] \times \Omega)$ tel qu'il existe une suite $(u_n)_n$ de P telle que*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{L^2([0,1] \times \Omega)} u \\ \delta(u_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} F \end{array} \right.$$

On définit alors pour un tel u

$$F = \delta(u)$$

Là encore, la fermeture de l'opérateur δ implique que le résultat ne dépend pas de la suite choisie.

Remarque 2 *On aurait pu caractériser l'espace $\mathbb{D}^{1,2}$ autrement. En effet, si on définit sur S la norme*

$$\|F\|_{1,2} = \|F\|_{L^2(\Omega)} + \|DF\|_{L^2([0,1] \times \Omega)}$$

alors $\mathbb{D}^{1,2}$ est la fermeture de S pour cette norme.

1.2 Propriétés

Le calcul de Malliavin a de nombreuses applications en finance. La première a été permise dans le cadre de marché complet. Sous cette hypothèse, on peut valoriser une option à l'aide des portefeuilles autofinancants de réplication. Un portefeuille autofinancant traduit que le prix d'une option est la combinaison à tout instant d'une certaine quantité d'actif risqué et non risqué. Un des résultats du calcul de Malliavin, la formule de Clark-Ocone (qui définit complètement la représentation d'une variable aléatoire par une martingale.) permet de trouver ces quantités directement. Nous donnons en Annexe B un exemple de ce type d'application dans le cas Black-Scholes. Cependant, aujourd'hui, la formule centrale pour les applications à la finance est la formule d'intégration par parties(en abrégé I.P.P). Ses applications ne se limitent pas au marché complet. Grâce à elle, on peut par exemple calculer les sensibilités dans le cadre d'un modèle à volatilité stochastique³.

1.2.1 Formule d'intégration par parties

Proposition 2 (Formule d'intégration par parties)

$$\forall F \in \mathbb{D}^{1,2}, \forall u \in \text{Dom}(\delta) \text{ on a } \mathbb{E}\left(\int_0^1 D_s F \cdot u_s ds\right) = \mathbb{E}(F \cdot \delta(u))$$

On a donc la relation d'adjonction suivante

$$\langle DF, u \rangle_{L^2([0,1] \times \Omega)} = \langle F, \delta(u) \rangle_{L^2(\Omega)} .$$

Pour démontrer cette proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1 soit Δ une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors pour $\varphi, g \in C^1(\mathbb{R})$, on a

$$\mathbb{E}\left[\varphi'(\Delta)g(\Delta)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(\Delta)\left(\frac{\Delta}{\sigma^2}g(\Delta) - g'(\Delta)\right)\right]$$

Preuve. Cela résulte d'un calcul direct par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\varphi'(\Delta)g(\Delta)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \left[\varphi(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \left(g'(x) - \frac{x}{\sigma^2}g(x)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \mathbb{E}\left[\varphi(\Delta) \left(\frac{\Delta}{\sigma^2}g(\Delta) - g'(\Delta)\right)\right] \end{aligned}$$

■

Preuve de la proposition 2. On se donne $F \in S_n$, $u \in P_n$ et on utilise la définition de $D_s F$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^1 D_s F \cdot u_s ds\right] &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(\Delta^n) f_k(\Delta^n)\right] \frac{1}{2^n} \text{ soit en utilisant le lemme} \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[f(\Delta^n) \left(\frac{\Delta^n}{2^{-n}} f_k(\Delta^n) - \partial_k f_k(\Delta^n)\right)\right] \frac{1}{2^n} \\ &= \mathbb{E}\left[F \cdot \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} f(\Delta^n) \Delta^n - \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\Delta^n) \frac{1}{2^n}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[F \cdot \delta(u)\right] \end{aligned}$$

■

³Il peut sembler surprenant de calculer des sensibilités alors qu'un marché incomplet ne permet pas une couverture parfaite. Nous reviendrons sur ce point dans la partie correspondante.

1.2.2 Formules de calcul et de commutation

La formule d'intégration par parties est fondamentale dans le calcul des sensibilités. En effet, si on désire calculer la sensibilité d'une espérance par rapport à une condition initiale, on a moyennant la possibilité de permuter espérance et dérivation ce qui sera le cas en général

$$\frac{\partial \mathbb{E}(\phi(\mathbf{F}(x)))}{\partial x} = \mathbb{E}\left(\frac{\partial \phi(\mathbf{F}(x))}{\partial x}\right).$$

En anticipant sur la prochaine partie, on voit qu'un lien entre la dérivée usuelle et la dérivée au sens de Malliavin permettrait l'application de l'I.P.P. Une fois appliquée, on a exprimé cette dérivée d'espérance comme une espérance classique où apparaît un poids qui s'exprime comme une intégrale de Skorokhod. Du point de vue de l'implémentation, cette nouvelle représentation est plus intéressante. Pour cela il nous faut préciser le lien entre la dérivée usuelle et la dérivée au sens de Malliavin :

Proposition 3 (Formule de dérivation en chaîne) $\forall F_1, \dots, F_d \in \mathbb{D}^{1,2}, \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\varphi(F_1, \dots, F_d) \in \mathbb{D}^{1,2}$$

ainsi que la formule de dérivation (dite de dérivation en chaîne) :

$$D_s \varphi(F_1, \dots, F_d) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F_1, \dots, F_d) \cdot D_s F_i$$

Cette formule de commutation permet également de calculer de très nombreuses dérivées au sens de Malliavin.

Exemple : nous pouvons maintenant calculer la dérivée de Malliavin $D_s(\exp(W_t))$, où $t \in [0, 1]$ à l'aide de la formule de dérivation en chaîne :

$$D_s(\exp(W_t)) = \exp(W_t) \mathbf{1}_{[0,t]}(s)$$

Dès que cela a un sens, on a également les formules de commutation suivantes entre les opérateurs d'intégration usuels (Itô et Riemann) et la dérivée au sens de Malliavin :

Proposition 4 Pour (u_t) adapté, on a :

$$D_s \left(\int_0^1 u_t dW_t \right) = u_s + \int_s^1 D_s u_t dW_t$$

ainsi que :

$$D_s \left(\int_0^1 u_t dt \right) = \int_s^1 D_s u_t dt$$

Remarque 3 Rappelons que si (u_t) est un processus adapté, alors $D_s u_t = 0$ pour $s \geq t$ et que l'intégrale de Skorokhod est une intégrale d'Itô.

Pour conclure, nous introduisons une formule très pratique d'un point de vue numérique. Pour, l'instant nous disposons de plusieurs outils pour le calcul des dérivées de Malliavin. Ce n'est pas le cas pour les intégrales de Skorokhod sauf quand le processus à intégrer est un processus simple ou adapté (c'est alors une intégrale d'Itô qu'on peut calculer numériquement comme une limite). Quand le processus n'est pas adapté ou un processus simple, la dépendance avec les accroissements du brownien n'est pas explicite en général. Cela empêche un calcul direct ou une simulation numérique performante, pour pallier ce problème, on utilise la formule suivante :

Proposition 5 Soit F une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable appartenant à $\mathbb{D}^{1,2}$. Alors, pour tout u appartenant à $\text{Dom}(\delta)$ on a :

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \int_0^T D_t F \cdot u(t) dt$$

Au cours de l'exposé, on utilisera régulièrement cette formule pour expliciter les intégrales de Skorokhod. En général, dans les applications, u est adapté et on peut calculer les intégrales stochastiques d'Itô. On trouvera des exemples dans la partie 2, pour le calcul du gamma ou en annexe sur les barrières.

1.3 Un exemple fondamental : le processus des variations premières

Nous allons considérer une classe de processus très importante en pratique pour la modélisation : les processus d'Itô $\{X(t), t \geq 0\}$, diffusions solutions d'une équation différentielle stochastique. C'est pour nous l'occasion de mettre en oeuvre les propriétés dites de calcul, précédemment exposées. Le processus $\{X(t)\}$ vérifie l'équation :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \text{ et } X(0) = x,$$

où $\{W_t\}$ est un mouvement brownien standard. On suppose aussi que σ et b sont \mathcal{C}^∞ et à dérivée première bornée⁴. Ainsi

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

On associe à ce processus le processus $\{Y(t)\}$ vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dY_t = Y_t(b'_2(t, X_t)dt + \sigma'_2(t, X_t)dW_t) \text{ et } Y(0) = 1.$$

$\{Y_t\}$ est le **processus des variations premières** associé au processus $\{X_t\}$: $Y_t = \frac{\partial X_t}{\partial x}$.

Proposition 6 $\forall t \geq 0$

$$X(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$$

et

$$D_s X(t) = Y(t)Y(s)^{-1}\sigma(s, X_s)\mathbf{1}_{\{s \leq t\}}$$

Preuve. Nous démontrons ici la deuxième assertion de la propriété précédente.

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

En différenciant cette expression au sens de Malliavin puis en utilisant les propriétés de commutation on obtient, en remarquant que le processus $\{X_t\}$ est adapté :

$$\begin{aligned} D_s X_t &= D_s \left(\int_0^t \sigma(u, X_u)dW_u \right) + D_s \left(\int_0^s b(u, X_u)du \right) \\ &= \sigma(s, X_s) + \int_s^t D_s b(u, X_u)du + \int_s^t D_s \sigma(u, X_u)dW_u \end{aligned}$$

Grâce à la formule de dérivation en chaîne, on obtient une écriture simplifiée de cette dérivée au sens de Malliavin :

$$D_s X_t = \sigma(s, X_s) + \int_s^t b'_2(u, X_u)D_s X_u du + \int_s^t \sigma'_2(u, X_u)D_s X_u dW_u$$

⁴ce qui assure l'existence du processus.

Notons $Z_t = D_s X_t$; le processus $\{Z_t\}$ vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = b'_2(t, X_t)dt + \sigma'_2(t, X_t)dW_t$$

avec $Z_s = \sigma(s, X_s)$. Les processus $\{Z_t\}$ et $\{Y_t\}$ vérifient donc la même équation différentielle stochastique mais pour des conditions initiales différentes : $Z_s = \sigma(s, X_s)$ et $Y_s = Y_s$. Par ailleurs, le processus $\{X_t\}$ étant adapté, on a $Z_t = 0$ pour $t < s$. Il existe donc une constante λ telle que $Z_t = \lambda Y_t \mathbf{1}_{\{s \leq t\}}$. Cette constante est très facilement déterminée à l'aide des conditions initiales à la date s . Finalement, on obtient bien :

$$D_s X(t) = Y(t)Y(s)^{-1}\sigma(s, X_s)\mathbf{1}_{\{s \leq t\}}.$$

■

Remarque 4 Dans le cas d'une diffusion de type Black-Scholes, le processus des variations premières s'exprime encore plus simplement. En effet, si

$$dX_t = b(t)X_t dt + \sigma X_t dW_t \text{ et } X(0) = x$$

alors

$$dY_t = b(t)Y_t dt + \sigma Y_t dW_t \text{ et } Y(0) = 1$$

et donc

$$Y_t = \frac{X_t}{x} \quad \mathbb{P} - p.s$$

1.4 Extension au cas multi-dimensionnel

Dans cette section nous traitons le cas multi-dimensionnel. Soit un brownien d-dimensionnel $W = (W^1, W^2, \dots, W^d)$, et les accroissements correspondants $\Delta_k^n = (\Delta_k^{1,n}, \dots, \Delta_k^{d,n})$. Maintenant, nous modifions les définitions des fonctionnelles simples pour qu'elles correspondent à des fonctions C^∞ aux dérivées de croissance au plus polynômial à l'infini de ces accroissements. Soit une variable aléatoire réelle, $F = f(\Delta_0^n, \dots, \Delta_{2^n-1}^n)$, la dérivée au sens de Malliavin est alors un processus vectoriel :

$$D_s^i F = \frac{\partial F}{\partial \Delta_s^i} = \frac{\partial f}{\partial x_k^i(\Delta^n)} \quad \text{si } t_k^n \leq s \leq t_{k+1}^n$$

$$DF = (D^1 F, \dots, D^d F) \quad \text{et} \quad \langle DF, DG \rangle = \sum_{k=1}^d \int_0^1 D_s^i F \cdot D_s^i G ds.$$

On obtient également les dérivées d'ordres supérieurs. Pour α multi-indice tel que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = k$,

$$D_s^i F = \frac{\partial^k F}{\partial \Delta_{s_1}^{\alpha_1}, \dots, \Delta_{s_k}^{\alpha_k}}$$

Remarque 5 Quand la variable aléatoire F est de dimension m , la dérivée au sens de Malliavin est alors une matrice de dimensions $m \times d$.

On redéfinit l'intégrale de Skorokhod multi-dimensionnelle. On la définit sur des processus simples $u(t, \omega) = \sum_{k=1}^d \mathbf{1}_{[t_k^n, t_{k+1}^n]} f_k(\Delta^n)$. Alors $\delta_i = \sum_{k=1}^d f_k(\Delta^n) \Delta_k^{n,i} - \sum_{k=1}^d \frac{\partial f_k}{\partial x_k^i}(\Delta^n) \frac{1}{2^n} = \int_0^1 u_s dW_s^i$. C'est l'intégrale par rapport au mouvement brownien W^i .

La formule d'intégration par parties devient :

$$\mathbb{E} \int_0^1 \sum_{k=1}^d D_s^i F \cdot u_s^i ds = \sum_{k=1}^d \mathbb{E}(F \delta_i(u^i)) = \mathbb{E}(F \delta(u))$$

Enfin on introduit la matrice de covariance de Malliavin.

Définition 7 (matrice de covariance de Malliavin) Soit $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ avec $F_i \in \mathbb{D}^{1,2}$, on introduit la matrice de covariance de Malliavin de la variable aléatoire n -dimensionnelle F par $\sigma_F = (\sigma_F^{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où

$$\sigma_F^{ij} = \langle DF^i, DF^j \rangle = \sum_{k=1}^d \int_0^1 D_s^k F^i D_s^k F^j ds$$

Exemple : on considère des diffusions sans drift $F^i = c_i + \sum_{j=1}^d \int_0^1 h_s^{i,j} dW_s^j$, on a donc $D_s^k F^i = h_s^{ik}$ d'où la matrice de covariance

$$\langle DF^i, DF^j \rangle = \sum_{k=1}^d \int_0^1 h_s^{i,k} h_s^{j,k} ds.$$

On retrouve

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}[F^i - c_i][F^j - c_j]$$

c'est-à-dire la matrice de covariance usuelle.

Chapitre 2

Calcul des sensibilités et applications aux options exotiques

Une des tâches principales du gérant de portefeuille ou du trader est de pouvoir contrôler son exposition aux risques. Dans cette optique, il doit déterminer les sensibilités des valeurs de son portefeuille par rapport, par exemple, à une variation du cours des actions ou encore une déformation de la courbe des taux. Dans ce chapitre nous présentons une nouvelle méthode de détermination de ces sensibilités, également appelées grecques. L'articulation principale de cette démarche repose sur la formule d'intégration par parties du calcul de Malliavin.

2.1 Calcul de Malliavin et calcul des sensibilités : méthodologie

2.1.1 Les sensibilités : cadre de travail

Nous nous plaçons en horizon fini $t \in [0, T]$ et en monde incertain $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans lequel vit un brownien à une dimension¹ $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ et on note $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s; s \leq t)$, la filtration naturelle.

Sur cet espace, on modélise le prix de l'actif sous-jacent à la date t , X_t , par un processus d'Itô classique :

$$dX_t = \sigma(t, X_s)dW_s + b(t, X_s)dt \quad \text{et} \quad X_0 = x$$

où la fonction $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la dérive de notre processus et $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa volatilité. On suppose que ces deux fonctions vérifient les conditions usuelles : elles sont lipschitziennes et la diffusion σ est uniformément elliptique. Ces conditions assurent l'existence d'une unique solution forte. Le taux d'intérêt sans risque est noté $r(t, X_t)$.

On note $P(t, x)$ le prix de notre actif contingent à la date t pour une valeur initiale de l'actif de x , et $P(x)$ sa valeur à la date 0. Il est de maturité T et son payoff s'exprime comme une fonction des valeurs du sous-jacent à différentes dates $f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})$ avec les conventions $t_0 = 0$ et $t_m = T$. Pour des raisons techniques elle est supposée dérivable au premier ordre avec une dérivée au plus à croissance polynômiale². Nous travaillons dans le cadre classique **d'absence d'opportunité d'arbitrage**³ et de **complétude de marché**⁴.

Théorème 1 (Probabilité risque neutre) *Sous ces deux hypothèses, il existe une unique probabilité \mathbb{Q} , dite risque neutre, sous laquelle le prix d'un actif contingent est une martingale locale, c'est à dire sous laquelle le prix de l'actif contingent est l'espérance du payoff actualisé :*

$$P(x) = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}}(e^{-\int_0^T r(s, X_s)ds} f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}))$$

¹Les résultats s'étendent naturellement au cas multidimensionnel quand le brownien est canonique, i.e à coordonnées indépendantes. Cette question sera détaillée dans le chapitre suivant.

²On montre plus loin que l'on peut effectivement raisonner sur des payoffs réguliers avant d'étendre les résultats à des payoffs plus généraux

³A.O.A : il n'y a pas de stratégie de trading permettant un gain sur pour une mise initiale nulle.

⁴complétude : tous les actifs contingents sont répliquables à partir des actifs initiaux du modèle.

où $\mathbb{E}_x^Q(\cdot) = \mathbb{E}^Q(\cdot | X_0 = x)$.

On définit maintenant les principales sensibilités :

Définition 8 (Les sensibilités ou grecques) *Le delta est défini comme la sensibilité du prix de l'option par rapport à la valeur initiale du sous-jacent, le gamma correspond à la dérivée seconde :*

$$\Delta = \frac{\partial P(x)}{\partial x}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2}$$

La définition du véga est plus ambiguë et sera détaillée plus loin dans ce chapitre. Intuitivement, le véga correspond à la variation du prix de l'option pour une variation infinitésimale de la volatilité du sous-jacent (dans une direction donnée).

Quand le marché est complet, le portefeuille autofinçant de couverture est construit à partir du delta. En cas de marché incomplet, les autres grecques (gamma, vega,...) sont également indispensables pour déterminer le portefeuille de couverture.

Notons enfin qu'il y a encore peu de temps (et encore aujourd'hui dans beaucoup d'équipes de trading) les grecques étaient calculées exclusivement par la méthode des Différences Finies. Nous allons voir que le calcul de Malliavin permet d'estimer ces grecques autrement, et que cette nouvelle approche est plus efficace pour certaines options.

2.1.2 Evaluation par le calcul de Malliavin

La méthode développée la première fois par FOURNIÉ et al.[FLLLT99a], permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

Proposition 7 *On a :*

$$\text{grecque} = \mathbb{E}_x^Q[e^{-\int_0^T r(s, X_s) ds} f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}) \times \pi]$$

où le poids π ne dépend pas du payoff de l'option. On retrouve alors une vitesse de convergence en $O(n^{-1/2})$ du théorème de la limite centrale.

Méthodologie dans le cas du delta

Pour la clarté de l'exposé on se contentera d'étudier le cas du delta et on supposera que le taux d'intérêt r ne dépend pas de X , soit $r(s, X_s) = r(s)$. L'objectif est d'utiliser la relation d'intégration par partie afin d'écrire les dérivées d'espérances comme des espérances avec un poids.

La démonstration se fait en trois temps :

- On restreint l'ensemble de travail aux payoff fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact car cet ensemble est dense dans \mathbf{L}^2 .
- Permutation des opérateurs espérance et dérivation.
- Utilisation de la formule d'intégration par partie et détermination d'un poids.

Passage des payoff dans \mathcal{C}_K^∞ (fonctions infiniment différentiables à support compact) aux payoffs dans L^2

On montre ici que l'on peut se contenter de raisonner sur des payoff \mathcal{C}_K^∞ pour établir la propriété précédente. En notant le pay-off $F = f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})$, on veut donc montrer que si pour toute fonction f de \mathcal{C}_K^∞ on a la propriété suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_x[F] = \mathbf{E}_x[F \times \pi],$$

alors cette propriété reste vraie pour toute fonction de payoff f dans L^2 . Ce résultat repose sur un argument de densité en utilisant Cauchy-Schwartz ainsi que sur la continuité de l'opérateur espérance⁵.

⁵On trouvera la démonstration de ce résultat en annexe A.2.

Permutation des opérateurs Espérance et Différentiation

Il s'agit maintenant, en raisonnant sur des fonctions appartenant à \mathcal{C}_K^∞ , de montrer que l'on peut intervertir les opérateurs Espérance et Dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}_x[F] = \mathbb{E}_x\left[\frac{\partial}{\partial x} F\right]$$

La démonstration de ce résultat s'appuie sur le théorème de convergence dominée et sur le théorème de Taylor Lagrange, mais également sur un théorème plus compliqué établi par REVUZ ET YOR[R94]. Nous ne démontrerons donc pas ce résultat.

Détermination d'un poids à l'aide de la formule d'intégration par parties

À ce stade, on peut donc permuter espérance et dérivation et raisonner sur un payoff dans \mathcal{C}_K^∞ , continûment différentiable et à dérivées bornées. On simplifie ci-dessous l'expression obtenue en utilisant la formule de dérivation en chaîne usuelle et ensuite en introduisant le processus des variations premières $Y = \frac{\partial X}{\partial x}$:

$$\Delta = \mathbb{E}_x^Q\left[\frac{\partial e^{-\int_0^T r(s)ds} f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})}{\partial x}\right] \quad (2.1)$$

$$= \mathbb{E}_x^Q\left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \sum_{i=1}^m \partial_i f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}) \frac{\partial X_{t_i}}{\partial x}\right] \quad (2.2)$$

$$= \mathbb{E}_x^Q\left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \sum_{i=1}^m \partial_i f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}) Y_{t_i}\right] \quad (2.3)$$

Notons que l'expression suivante n'est pas encore complètement intéressante. En effet, si pour calculer le delta, on n'a plus qu'à calculer une espérance, le terme à moyenner dépend de la dérivée du payoff et n'est pas "universel". C'est là qu'intervient le calcul de Malliavin.

On cherche un poids π qui puisse s'exprimer comme une intégrale de Skorokhod : $\pi = \delta(w)$, où w est appelé **générateur**. De façon implicite on peut alors écrire, en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$\Delta = \mathbb{E}_x^Q\left[e^{-\int_0^T r(s)ds} f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}) \times \delta(w)\right] \quad (2.4)$$

$$= \mathbb{E}_x^Q\left[\int_0^T D_s[e^{-\int_0^T r(t)dt} f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})] w(s) ds\right] \quad (2.5)$$

En utilisant la formule de dérivation en chaîne au sens de Malliavin puis l'expression de la dérivée de Malliavin avec le processus Y , on en déduit que :

$$\Delta = \mathbb{E}_x^Q\left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \sum_{i=1}^m \partial_i f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}) \int_0^T D_s X_{t_i} \cdot w(s) ds\right] \quad (2.6)$$

$$= \mathbb{E}_x^Q\left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \sum_{i=1}^m \partial_i f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}) \int_0^T Y_{t_i} Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) 1_{s \leq t_i} w(s) ds\right] \quad (2.7)$$

À ce stade, en identifiant les expressions 2.3 et 2.7, on obtient la condition que doit vérifier le générateur w du poids π pour toutes fonctions f et r :

$$\mathbb{E}_x^Q\left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \sum_{i=1}^m \partial_i f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}) \left\{ Y_{t_i} - \int_0^T Y_{t_i} Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) 1_{s \leq t_i} w(s) ds \right\}\right] = 0$$

En introduisant les espérances conditionnelles adéquates, on trouve l'expression que doit vérifier w pour le delta. Pour établir la condition suffisante, il suffit de reprendre la même démarche dans l'autre sens.

Théorème 2 (Formule de Malliavin pour le delta, BENHAMOU[BEN00a]) *Il existe des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction w génère un poids pour la simulation des grecques. La première condition est l'intégrabilité au sens de Skorohod de cette fonction. La seconde condition dépend uniquement des caractéristiques de la diffusion sous-jacente et est indépendante de la fonction payoff, dans le cadre du delta :*

$$\forall i = 1 \dots m$$

$$\mathbb{E}_x^Q \left[\left(Y_{t_i} - \int_0^{t_i} Y_t Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) w(s) ds \right) \middle| X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m} \right] = 0$$

Une façon naturelle d'obtenir une expression explicite de w consiste à contraindre encore plus la condition nécessaire énoncée dans le théorème précédent en cherchant w tel que :

$$Y_{t_i} - \int_0^{t_i} Y_t Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) w(s) ds = 0$$

Les poids proposés par FOURNIÉ et al.[FLLLT99a] sont solutions de cette dernière équation. Pour expliciter ces solutions, introduisons d'abord l'ensemble

$$T_m = \left\{ a \in L^2[0, T] \mid \int_0^{t_i} a(t) dt = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m \right\}$$

Alors, les générateurs ω suivants mènent à des poids admissibles :

$$\omega = a(t) \frac{Y_t}{\sigma(t, X_t)}$$

Exemple : Si le sous-jacent suit une diffusion de type Black-Scholes, alors, nous avons déjà vu (chapitre 1, remarque 4) que $Y_t = X_t/x$. Si de plus on s'intéresse à une option dont le payoff ne dépend que de la date finale T (type européenne) alors on peut très naturellement prendre $a(t) = 1/T$. Dans ce cas, le poids de Malliavin pour le delta de cette option s'écrit :

$$poids = \delta(\omega) = \int_0^T \frac{1}{T} \frac{X_t}{x\sigma X_t} dW_t = \frac{W_T}{x\sigma T}$$

2.1.3 Extension des résultats

Le Gamma Γ

Théorème 3 (Formule de Malliavin pour le gamma, BENHAMOU[BEN00a]) *Il existe des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction w génère un poids pour la simulation des grecques. La première condition est l'intégrabilité au sens de Skorokhod de cette fonction. La seconde condition dépend uniquement des caractéristiques de la diffusion sous-jacente et est indépendante de la fonction payoff, dans le cadre du gamma :*

$$\mathbb{E}_x^Q [\delta(\omega^{gamma}) - \delta(\omega^{delta}) \cdot \delta(\omega^{delta}) + \frac{\partial}{\partial x} \omega^{delta}] \middle| X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m} = 0$$

Preuve. Nous donnons ici l'esprit de la démonstration qui fonctionne comme dans le cas du delta. Nous supposons que f est deux fois continûment dérivable et que ses dérivées première et deuxième sont bornées.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}_x[F] \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathbb{E}_x[F \cdot \delta(\omega_x^{delta})]) \\ &= \mathbb{E}_x \left[\frac{\partial}{\partial x} F \cdot \delta(\omega_x^{delta}) \right] + \mathbb{E}_x \left[F \cdot \frac{\partial}{\partial x} \delta(\omega_x^{delta}) \right] \end{aligned}$$

On peut maintenant, grâce à des arguments de convergence dominée, permuter l'opérateur $\delta(\cdot)$ et la différentielle par rapport à x :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \mathbb{E}_x[F(\delta(\omega_x^{delta})\delta(\omega_x^{delta}) + \delta(\frac{\partial}{\partial x}\omega_x^{delta}))] \\ &= \mathbb{E}_x[F\delta\left(\omega_x^{delta}\delta(\omega_x^{delta}) + \frac{\partial}{\partial x}\omega_x^{delta}\right)]\end{aligned}$$

Comme par ailleurs, par définition, on a :

$$\Gamma = \mathbb{E}_x[F.\delta(\omega^{gamma})]$$

et que l'égalité doit être vérifiée pour tout F , on obtient naturellement la condition nécessaire et suffisante énoncée dans le théorème. ■

Exemple : Nous allons maintenant obtenir une expression explicite d'un poids de Malliavin pour le gamma en procédant comme dans le cas du delta et retrouver ainsi le résultat fourni par FOURNIÉ et al.[FLLLT99a] On suppose donc que le sous-jacent suit une diffusion de type Black-Scholes et on s'intéresse à une option dont le payoff ne dépend que de la valeur finale du sous-jacent (type européenne). On a vu qu'alors

$$\omega^{delta} = \frac{1}{x\sigma T}$$

Pour trouver un poids de Malliavin pour le gamma, on peut contraindre encore plus la CNS donnée par le théorème et chercher $\delta(\omega^{gamma})$ tel que :

$$\delta(\omega^{gamma}) = \delta(\omega^{delta}) \cdot \delta(\omega^{delta}) + \frac{\partial}{\partial x}\omega^{delta}$$

donc

$$\begin{aligned}\delta(\omega^{gamma}) &= \delta\left(\frac{1}{x\sigma T} \times \frac{W_T}{x\sigma T} - \frac{1}{x^2\sigma T}\right) \\ &= \frac{1}{x^2\sigma^2 T^2} \times \delta(W_T) - \frac{W_T}{x^2\sigma T}\end{aligned}$$

D'après la proposition 5 du chapitre 1 :

$$\delta(W_T) = W_T.\delta(1) - \int_0^T D_t W_T dt = W_T^2 - T$$

Et finalement on obtient comme expression du poids de Malliavin pour le gamma :

$$\delta(\omega^{gamma}) = \frac{1}{x^2\sigma T} \left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma} \right)$$

qui est celle donnée par FOURNIÉ et al.[FLLLT99a]

Le Véga V

Le vega représente la sensibilité du prix d'une option par rapport à la volatilité du sous-jacent $\sigma(t, x)$ qui est ici une fonction. Ainsi, le vega quantifie l'impact, dans une direction donnée, d'une petite perturbation de la volatilité sur le prix d'une option. Il s'agit en d'autres termes d'une dérivée du prix de l'option par rapport à la volatilité au sens de Gateau.

Soit $\tilde{\sigma} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la direction de la perturbation. Sous certaines hypothèses ⁶ sur les fonctions $\sigma(t, x)$ et $(\sigma + \varepsilon\tilde{\sigma})(t, x)$, avec $\varepsilon \in [-1, 1]$, on définit le processus sous-jacent "perturbé" $\{X_t^{\varepsilon, vega}\}$:

$$dX_t^{\varepsilon, vega} = b(t, X_t^{\varepsilon, vega}).dt + (\sigma(t, X_t^{\varepsilon, vega}) + \varepsilon\tilde{\sigma}(t, X_t^{\varepsilon, vega})).dW_t$$

⁶ $\sigma(t, x)$ et $(\sigma + \varepsilon\tilde{\sigma})(t, x)$ sont continûment différentiables à dérivées bornées, vérifient les conditions de Lipschitz et la condition d'uniforme ellipticité suivante : $\exists \eta > 0, |(\sigma + \varepsilon\tilde{\sigma})(t, x)| \geq \eta \forall x \in \mathbb{R}$

avec la condition initiale ($X_0^{\varepsilon, vega} = x$). On définit alors naturellement le prix des option sur le sous-jacent "perturbé" :

$$P_{vega}^\varepsilon(x) = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r(s, X_t^{\varepsilon, vega}) ds} \cdot f(X_{t_1}^{\varepsilon, vega}, \dots, X_{t_m}^{\varepsilon, vega})]$$

Définition 9 *Le vega est la dérivée de Gateau de la fonction de prix "perturbé" $P_{vega}^\varepsilon(x)$ dans la direction donnée par la fonction $\tilde{\sigma}(\cdot, \cdot)$:*

$$vega = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} P_{vega}^\varepsilon(x) \right|_{\varepsilon=0, \tilde{\sigma} \text{ donné}}$$

On peut maintenant reprendre la même démarche que celle développée dans le cas du delta. Le raisonnement est le même mais il faut remplacer $\frac{\partial}{\partial x} X_t = Y_t$ par $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_t^{\varepsilon, vega} = Z_t^{\varepsilon, vega}$, où

$$Z_t^{vega} = \lim_{L^2, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{X_t^{\varepsilon, vega} - X_t}{\varepsilon}.$$

La proposition ci-dessous exprime le processus Z_t^{vega} en fonction du processus de variations premières Y_t .

Proposition 8

$$Z_t^{vega} = \int_0^t Y_t \frac{\tilde{\sigma}(s, X_s)}{Y_s} dW_s - \int_0^t Y_t \sigma'(s, X_s) \frac{\tilde{\sigma}(s, X_s)}{Y_s} ds$$

Il est dès lors normal d'obtenir pour le vega une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir le processus de variations premières et donc un poids fonction de Y_t .

Théorème 4 *Il existe des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction w génère un poids pour la simulation des grecques. La première condition est l'intégrabilité au sens de Skorokhod de cette fonction. La seconde condition dépend uniquement des caractéristiques de la diffusion sous-jacente et est indépendante de la fonction payoff, dans le cadre du vega :*

$$\forall i = 1, \dots, m$$

$$\mathbb{E}_{x, X_{t_1}, \dots, X_{t_m}}^{\mathbb{Q}} \left[Y_{t_i} \int_0^{t_i} \frac{\sigma(t, X_t)}{Y_t} \omega^{vega}(t) dt \right] = \mathbb{E}_{x, X_{t_1}, \dots, X_{t_m}}^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^{t_i} \frac{\tilde{\sigma}(t, X_t) Y_{t_i}}{Y_t} dt - \int_0^{t_i} \sigma'(s, X_s) \frac{\tilde{\sigma}(t, X_t) Y_{t_i}}{Y_t} ds \right]$$

On peut, à partir de cette CNS, proposer des poids de Malliavin pour le calcul du vega; plusieurs approches sont imaginables, on se contente ici de la solution proposée par FOURNIÉ et al.[FLLLT99a] On définit $\tilde{T}_m = \{\tilde{a} \in L^2[0, T] \mid \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tilde{a}(t) dt = 1 \forall i = 1, \dots, m\}$. Plutôt que de chercher des solutions vérifiant l'égalité des espérances conditionnelles, on cherche à évaluer directement les termes à l'intérieur des espérances. FOURNIÉ et al.[FLLLT99a] proposent ainsi les poids suivants pour le vega :

$$poids^{vega} = \delta(W^{vega}) = \delta \left(\frac{1}{\sigma(t, X_t)} \tilde{a}(t) \sum_{i=1}^m (Z_{t_i}^{vega} - Z_{t_{i-1}}^{vega}) \mathbf{1}_{\{t_{i-1} \leq t < t_i\}} \right)$$

où $\tilde{a} \in \tilde{T}_m$.

Extension au cas où r est stochastique

Dans ce paragraphe nous supposons que le taux d'intérêt sans risque dépend non seulement du temps t mais aussi de l'actif sous-jacent X_t . Cela nous amène à prendre en compte la dépendance du taux sans risque en X_t et, en reprenant la même démarche que pour la démonstration du théorème 2, on aboutit à une deuxième condition nécessaire et suffisante qui s'ajoute à la première :

$$\mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[\int_{s=0}^T \int_{t=0}^T r'(s, X_s) Y_s Y_t^{-1} \sigma(t, X_t) w(t) \mathbf{1}_{\{t \leq s\}} dt ds \mid X_{t_1}, \dots, X_{t_m} \right] = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T r'(s, X_s) Y_s ds \mid X_{t_1}, \dots, X_{t_m} \right]$$

Le poids optimal

Parmi tous les poids possibles, il y en a un qui est optimal, c'est celui qui minimise la variance de l'estimateur de la sensibilité recherchée. Puisque la quantité estimée est égale à l'espérance du produit du payoff, qui est \mathcal{F}_T mesurable, et d'un poids, il est assez intuitif, par le théorème des projections, que le poids optimal est tout simplement l'espérance de ce poids (quelconque parmi les poids admissibles) conditionnellement à \mathcal{F}_T .

Proposition 9 (poids optimal) *A partir d'un poids de Malliavin quelconque, en considérant son espérance conditionnelle par rapport à la filtration \mathcal{F}_T , on obtient un poids de variance minimale :*

$$\pi_0 = \mathbb{E}(\pi | \mathcal{F}_T)$$

Cette proposition nous indique qu'il sera toujours préférable de ne retenir parmi les poids admissibles, que les poids \mathcal{F}_T mesurables.

2.2 Comparaison des méthodes

Dans cette section on compare l'approche usuelle par différences finies et par poids de Malliavin pour deux types d'options : un call vanille (le plus classique possible) et une digitale. Pratiquement, des formules fermées existent pour ces deux options et les méthodes de Monte-Carlo ne sont donc pas utilisées pour les évaluer ou les couvrir. Cependant, leur étude permet néanmoins de donner quelques conclusions générales pour une utilisation optimale de la méthode que nous avons exposée.

2.2.1 La méthode des différences finies

Dans le cadre de la méthode classique de Monte-Carlo, le calcul des grecques se fait par un schéma de différences finies. Ainsi, si on note $P(x)$ le prix d'une option pour une valeur initiale du sous-jacent de x , on peut approcher la valeur du delta Δ par les trois schémas suivants : différence forward $\frac{P(x+\varepsilon)-P(x)}{\varepsilon}$, différence centrale $\frac{P(x+\varepsilon)-P(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$, différence backward $\frac{P(x)-P(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$. Ainsi, sur le même ensemble de simulations (méthode des *common random numbers*), on calcule les différents prix $P(x)$, $P(x+\varepsilon)$, $P(x-\varepsilon)$, puis on détermine les schémas précédents. Bien que les expressions précédentes, s'exprimant comme des différences à partir d'un même jeu de simulations, entraînent mécaniquement une réduction de la variance du résultat, on peut observer déjà deux sources d'erreur :

- l'approximation de la dérivée par le schéma de discrétisation
- l'estimation imparfaite des prix $P(x)$, $P(x+\varepsilon)$ et $P(x-\varepsilon)$

Les limites de cette méthode précédemment citée deviennent encore plus nettes quand on passe à un ordre de dérivation supérieur. Ainsi, pour le gamma les approximations deviennent très lourdes. De plus, il apparaît également que pour des fonctions de payoff discontinus, un schéma de différences finies peut conduire à de graves erreurs car la dépendance par rapport à la condition initiale x devient cruciale.

Pour se rendre compte de l'efficacité de la méthode des *common random numbers*, il suffit de remarquer que la variance du numérateur de l'estimateur du delta s'écrit :

$$\text{Var}(P(x+\varepsilon) - P(x)) = \text{Var}(P(x)) + \text{Var}(P(x+\varepsilon)) - 2\text{Cov}(P(x+\varepsilon), P(x))$$

La variance de l'estimateur est donc d'autant plus faible que $P(x)$ et $P(x+\varepsilon)$ sont positivement corrélés. La meilleure vitesse de convergence théorique pour un tel schéma avec la méthode des *common random numbers* est en $n^{-1/2}$. Mais cette vitesse de convergence n'est pas toujours atteinte; elle dépend en effet de la vitesse de convergence de $P(x+\varepsilon)$ vers $P(x)$. On peut montrer, sous certaines hypothèses ⁷, que dans le cas d'une option call vanille

$$\mathbb{E}[|P(x+\varepsilon) - P(x)|^2] = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

⁷homogénéité du processus sous-jacent : $X_T(\varepsilon) = X_T \times (1 + \frac{\varepsilon}{x})$

et dans le cas d'une option digitale

$$\mathbb{E}[|P(x + \varepsilon) - P(x)|^2] = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

On peut en quelque sorte considérer qu'on essaie d'estimer la vraie valeur du delta dans un espace à deux dimensions (n, ε) , où n est le nombre de simulations utilisées dans la méthode de Monte Carlo et ε est le pas de discrétisation dans le schéma de différences finies. Les *common random numbers* rendent l'estimation plus efficace dans la direction n , l'axe ε reste très problématique dans le cas des payoff discontinus.

L'estimation peut être encore meilleure si, pour chaque jeu de simulation, on utilise la méthode des variables antithétiques décrite en annexe. Cela revient à réduire (indépendamment) la variance des estimateurs de $P(x)$ et $P(x + \varepsilon)$. Les *common random numbers*, qui relèvent en fait aussi d'une démarche de variables antithétiques, viennent ensuite réduire la variance de leur différence.

2.2.2 La méthode du poids de Malliavin et introduction d'une fonction de contrôle

Le poids de Malliavin ne dépend pas de la nature du payoff, qu'il soit continu ou discontinu. La méthode de Malliavin devrait donc se révéler avantageuse pour les options à payoff discontinus. Si la méthode d'estimation par différences finies est très sensible aux discontinuités (problème de la convergence en ε), la méthode de Malliavin est totalement neutre à cet égard.

Rappelons que le delta s'écrit $\Delta = \mathbb{E}[\text{payoff} \times \text{poids}]$. Ainsi, le poids est source de variance; il ne faudrait pas que cette source de variance l'emporte sur le gain (toujours en terme de précision) qu'apporte cette méthode en contournant l'approximation des différences finies. En effet, les poids de Malliavin s'expriment typiquement en fonction de W_T au numérateur, et de T au dénominateur. Dès lors, en notant X_T le processus sous-jacent, intuitivement (c'est clair dans le cas d'un call européen⁸), aux grandes valeurs de X_T ou du payoff correspond une grande valeur de W_T . Comme l'estimation multiplie ces deux termes, on voit que l'introduction du poids de Malliavin accroît la variance de l'estimateur. En d'autres termes, par le biais de la corrélation positive entre X_T et W_T , le poids de Malliavin et le payoff sont positivement corrélés. Par ailleurs, le poids de Malliavin est d'autant plus grand que T est petit.

A ce stade, plusieurs remarques peuvent être formulées :

- La méthode de Malliavin sera d'autant plus efficace que les options auront une **maturité élevée** (T grand).
- Relativement à la méthode des différences finies pour laquelle la présence de discontinuités dans le payoff est très nuisible à la précision de l'estimation⁹, la méthode de Malliavin devrait être plus efficace sur des **payoff discontinus**.
- Il pourrait être préférable de **travailler sur les puts** et de revenir aux calls par des relations de type "parité call-put". En effet, pour les puts, le payoff est petit quand le poids de Malliavin est grand, ce qui entraîne une diminution de variance.
- Il pourrait être intéressant de mélanger les deux méthodes, différences finies et Malliavin, en utilisant l'intégration par parties de Malliavin uniquement autour des points d'irrégularité du payoff. Nous détaillons ce procédé de **localisation** dans le paragraphe ci-dessous.

Localisation

L'idée consiste donc à localiser la méthode de Malliavin autour des singularités de la fonction de payoff pour que le poids de Malliavin ne pèse pas trop dans l'estimation. Pour illustrer cette méthode, raisonnons sur le delta d'un call européen. On peut écrire ce delta comme la somme de deux termes :

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}[e^{\int_0^T r_s \cdot ds} (X_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{X_T < K + \alpha\}}] + \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}[e^{\int_0^T r_s \cdot ds} (X_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{K + \alpha \leq X_T\}}]$$

⁸ $\Delta = \mathbb{E}[e^{\int_0^T r_s \cdot ds} (X_T - K)^+ \cdot \frac{W_T}{x\sigma T}]$

⁹ Le schéma de discrétisation utilisé pour estimer la dérivée est en effet très sensible aux discontinuités.

On utilise maintenant l'intégration par parties de Malliavin pour le premier terme de la somme et on permute les opérateurs dérivation et espérance pour le deuxième terme :

$$\Delta = \mathbb{E}\left[e^{\int_0^T r_s \cdot ds} (X_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{X_T < K + \alpha\}} \cdot \frac{W_T}{x\sigma T}\right] + \mathbb{E}\left[e^{\int_0^T r_s \cdot ds} \mathbf{1}_{\{K + \alpha \leq X_T\}} \cdot Y_T\right]$$

Dans le premier terme de cette dernière somme, le nouveau "payoff" $(X_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{X_T < \alpha\}}$ est nul quand le poids de Malliavin $\frac{W_T}{x\sigma T}$ est grand, ce qui entraîne une réduction de variance. La variance de l'estimateur avec localisation de la méthode de Malliavin peut être dix fois plus faible que celle obtenue avec la méthode directe de Malliavin (BENHAMOU[BEN00b]). Le choix de la valeur de α est crucial et le choix d'une valeur optimale pour ce paramètre ce fait au cas par cas.

2.3 Applications

Le but de cette partie est double. En effet, le calcul de Malliavin se révèle être peu adapté pour les options européennes dont les payoff sont réguliers. Il est en revanche adapté pour les payoff discontinus de type option digitale et peut aider à la détermination d'un bon pas de discrétisation dans l'utilisation des méthodes de différences finies. La nouveauté dans ce travail réside dans le fait d'estimer les densités des estimateurs de sensibilité.

2.3.1 Le cas de l'option européenne

Il s'agit d'un call vanille sur un sous-jacent S_t et de strike K . On rappelle à titre indicatif que le payoff d'une telle option est le suivant :

$$\left(S_T - K\right)^+ \tag{2.8}$$

Pour nos simulations l'option possède les caractéristiques suivantes : $S_0 = 100$, $K = 100$, $b^{10} = 0.05$, et $\sigma = 0.20$. La maturité de l'option est $T = 1$ an et le taux sans risque est $r = 0.05$. Nous utilisons 100000 simulations.

Dans ce premier exemple nous étudions, outre la comparaison Malliavin - Différences Finies, l'influence du pas de discrétisation dans la méthode des différences finies. L'ensemble de ces résultats se trouvent sur la figure 2.1.

Comme nous l'indiquons au début de cette partie, le calcul de Malliavin semble peu adapté pour ce type de payoff réguliers. On constate en effet que l'estimateur de Malliavin oscille plus autour de la valeur théorique que les estimateurs des différences finies. Le fait que Malliavin soit peu adapté pour ce type d'option est encore plus flagrant sur la figure 2.2. Ce graphique représente la densité des estimateurs calculée, par la méthode des noyaux, à partir de 5000 points (chaque point étant obtenu à partir de 100000 simulations). L'utilisation de jeux de simulations communs plutôt que des jeux de simulation différents dans la méthode des différences finies réduit considérablement la variance de l'estimateur. L'estimateur des différences finies (avec des jeux de simulations communs) est légèrement biaisé mais sa variance est très nettement plus faible que celle de l'estimateur de Malliavin qui lui ne paraît pas biaisé. Par ailleurs, l'influence du pas de discrétisation dans la méthode des différences finies n'est pas évidente au regard de ces résultats.

Dans un second temps, nous avons imaginé utiliser une des techniques de réduction de variance, à savoir les variables antithétiques. L'influence de la méthode de réduction de variance avec des variables antithétiques est visible sur la figure 2.3.

Pour chaque méthode (Différences Finies et Malliavin) l'utilisation de variables antithétiques améliore de façon nette la précision de l'estimateur par rapport au fait de ne rien utiliser. Là encore, le calcul de Malliavin est peu adapté puisque les résultats obtenus avec les différences finies sont beaucoup plus précis, et quasiment tout aussi rapides. On constate malgré tout, dans le cas des différences finies, un biais, ce qui pose la question du pas de discrétisation optimal.

¹⁰b est le coefficient de dérive sous la probabilité risque-neutre du processus sous-jacent ; il intègre les dividendes et les éventuels coûts de portage.

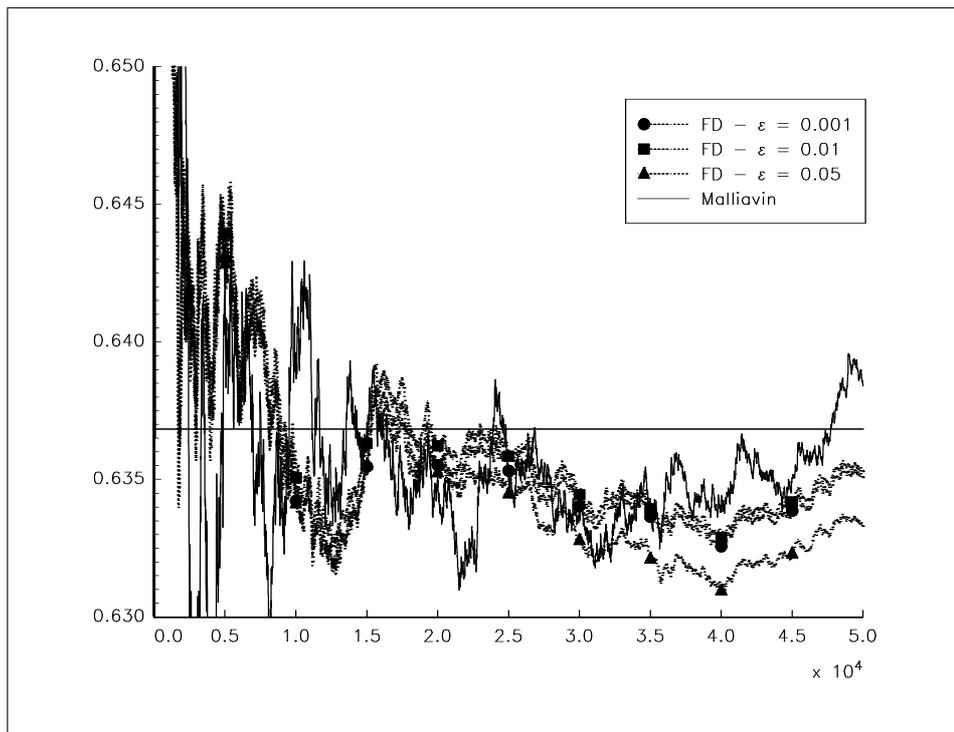


FIG. 2.1 – Estimation du $\hat{\Delta}$ d'une option européenne — Méthodes des Différences Finies et de Malliavin (100000 premiers nombres aléatoires) — Influence du pas ϵ .

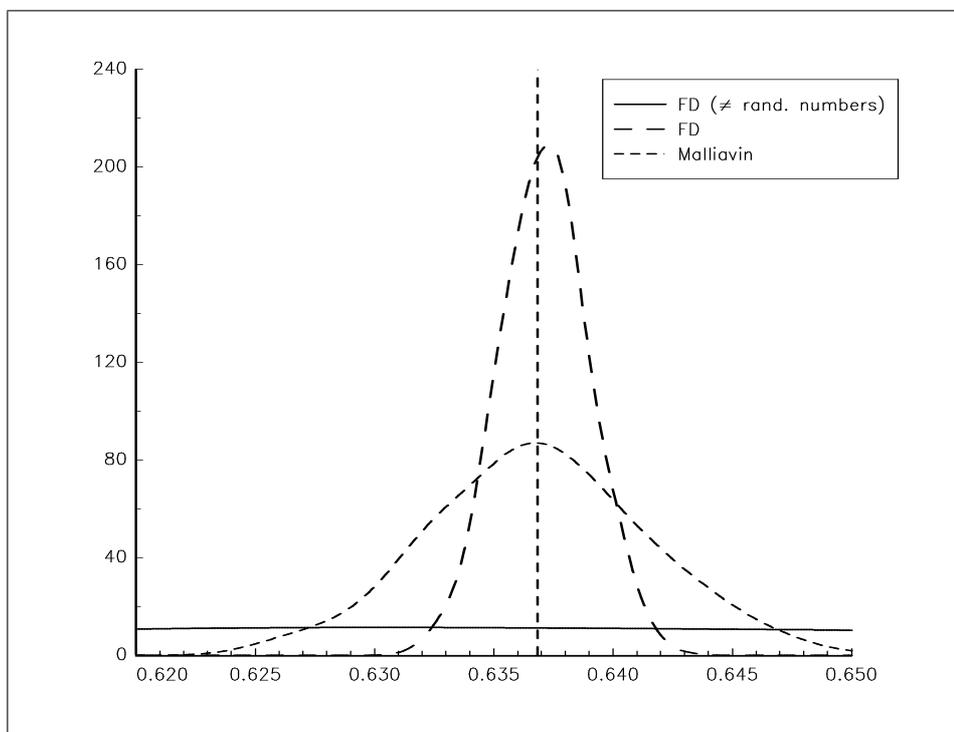


FIG. 2.2 – Densité des estimateurs $\hat{\Delta}$ d'une option européenne — Méthode des Différences Finies (avec et sans nombres aléatoires communs) et méthode de Malliavin

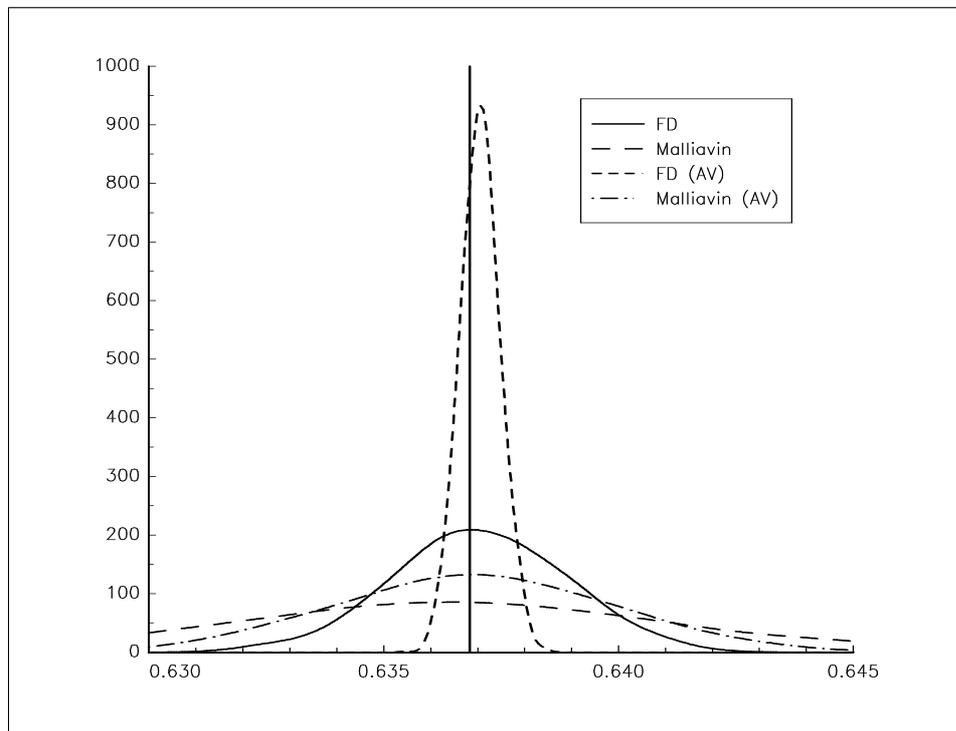


FIG. 2.3 – Densité des estimateurs $\hat{\Delta}$ d’une option européenne — Méthode des Différences Finies et méthode de Malliavin — Influence de la méthode de réduction de la variance avec des variables antithétiques

2.3.2 Le cas de l’option binaire

Nous venons de voir la faible efficacité du calcul de Malliavin dans l’évaluation des coefficients de sensibilité d’une option dont le payoff est régulier. Nous allons maintenant examiner ce qui se passe lorsque ce payoff devient irrégulier et présente une discontinuité. Il s’agit d’un call digitale sur un sous-jacent S_t et de strike K . On rappelle à titre indicatif que le payoff d’une telle option est le suivant :

$$\mathbf{1}_{(S_T - K)^+} \quad (2.9)$$

Pour nos simulations l’option possède les caractéristiques suivantes : $S_0 = 100$, $K = 100$, $b = 0.05$, $\sigma = 0.20$. La maturité de l’option est $T = 1$ an et le taux sans risque est $r = 0.05$. Nous avons utilisé jusqu’à 100000 simulations.

Cette fois-ci on constate, à l’aide du graphique représentant la densité des différents estimateurs (figure 2.4), que l’approche par le calcul de Malliavin est supérieure à l’approche par les différences finies à la fois en terme de biais et en terme de variance. Les discontinuités dans le payoff semblent lourdement pénaliser la méthode des différences finies sans par ailleurs affecter la méthode d’estimation par le calcul de Malliavin.

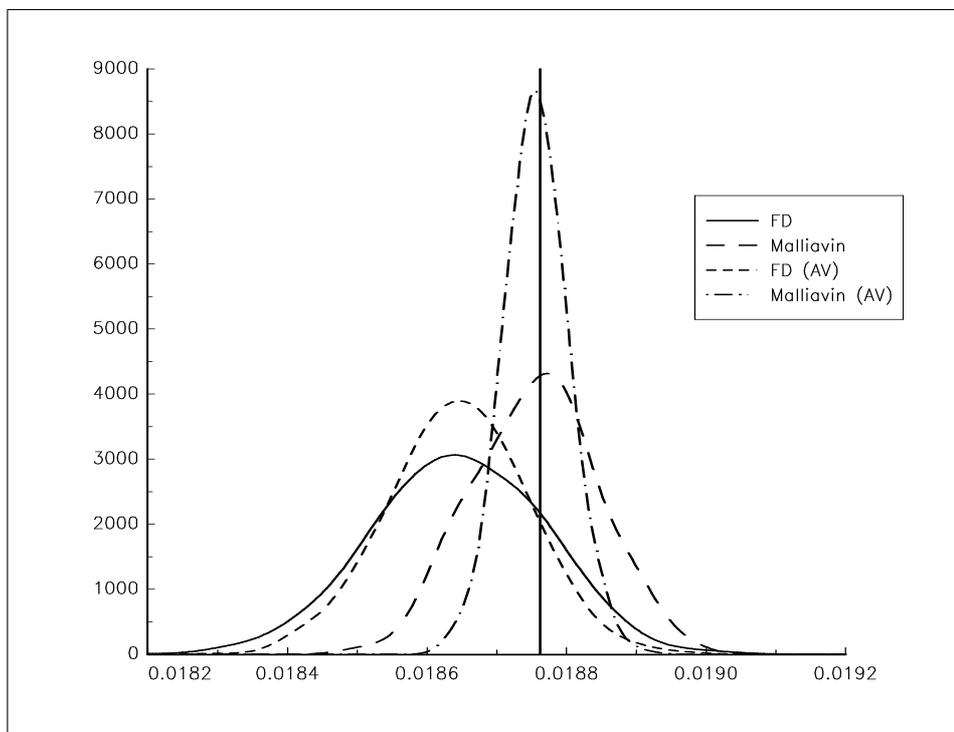


FIG. 2.4 – Densité des estimateurs $\hat{\Delta}$ d'une option binaire — Méthode des Différences Finies et méthode de Malliavin

-

Chapitre 3

Extension au cas des options multi sous-jacents

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment appliquer le calcul de Malliavin aux options à un seul sous-jacent. Dans ce chapitre nous allons appliquer les résultats sur des options beaucoup plus intéressantes que celles qui ont été étudiées : les options multi sous-jacents. En effet, pour la plus grande partie de ces options il n'existe pas de formules fermées pour calculer les coefficients de sensibilité. En outre, les implémentations numériques nécessitent de lourds temps de calculs. Dans la pratique, les options sur multi sous-jacents dépendant de quelques dates de fixing sont très courantes.

L'extension des résultats à une dimension à des modèles multi-dimensionnels est naturelle quand le brownien est canonique, c'est à dire quand ses coordonnées sont indépendantes. Elle est en revanche plus délicate dans le cas où les coordonnées du brownien sont corrélées. C'est pour cette raison que nous développons ici un nouveau formalisme, plus général.

3.1 Calculs théoriques des coefficients de sensibilités

Nous présentons dans cette partie des formules de calcul des grecques pour les options multi sous-jacents dans le modèle de Black-Scholes. Grâce au calcul Malliavin, et comme nous avons pu le montrer, les grecques se calculent comme l'espérance d'un payoff multiplié par un poids bien choisi. Ceci permet un calcul par la méthode Monte-Carlo à la fois plus rapide et plus précis qu'en utilisant des différences finies.

Dans cette partie nous nous intéressons au calcul d'une espérance de la forme

$$\mathbb{E}[\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})]$$

ainsi qu'aux dérivées de cette grandeur par rapport aux différents paramètres (conditions initiales, volatilité, ...). Il est important de noter que nous nous limitons à des fonctions ϕ qui ne dépendent que d'un nombre fini de valeurs du processus X_t .

3.1.1 Résultats généraux

Dans cette partie nous nous contenterons de reprendre les formules développées FOURNIÉ et al. [FLLL01b] pour le calcul des sensibilités par rapport aux différents paramètres de la diffusion. On se donne donc une fonction dépendant d'un nombre fini de points du processus $\phi(X_{t_1}^\lambda, \dots, X_{t_m}^\lambda)$, où λ est un paramètre de la diffusion des sous-jacents. On considère enfin la grandeur $P(\lambda) = \mathbb{E}[\phi(X_{t_1}^\lambda, \dots, X_{t_m}^\lambda)]$.

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{B}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ sur lequel vit un mouvement brownien (multi-dimensionnel) (Z_t) . On suppose que pour chaque λ le processus stochastique (X_t^λ) obéit à l'EDS suivante :

$$dX_t^\lambda = b(\lambda, X_t^\lambda)dt + \sigma(\lambda, X_t^\lambda)dZ_t, X_0^\lambda = x(\lambda),$$

Les fonctions $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b : \mathbb{R} * \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $\sigma : \mathbb{R} * \mathbb{R}^n \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ sont des fonctions C^1 et lipschitziennes. On suppose enfin que la fonction σ satisfait l'hypothèse d'uniforme ellipticité. Le paramètre λ est un réel qui permet d'influer aussi bien sur la condition initiale que sur les coefficients de dérive et de diffusion de l'EDS. On peut montrer¹ que le processus des variations $L_t^\lambda = \partial_\lambda X_t^\lambda$ vérifie l'EDS suivante, obtenue en dérivant par rapport à λ l'EDS du processus X_t^λ terme à terme :

$$dL_t^\lambda = (\partial_\lambda b(\lambda, X_t^\lambda) L_t^\lambda) dt + \sum_{j=0}^n (\partial_\lambda \sigma(\lambda, X_t^\lambda) L_t^\lambda + \partial_x \sigma_j(\lambda, X_t^\lambda) L_t^\lambda) dZ_t^j, \quad L_t^\lambda = x'(\lambda),$$

où σ_j désigne la j^e colonne de la matrice σ . En prenant comme paramètre la condition initiale x , on a alors le processus $Y_t = \partial_x X_t^x$ qui vérifie :

$$dY_t = b'(X_t) Y_t dt + \sum_{j=0}^n \sigma'(X_t) Y_t dZ_t, \quad Y_0 = I_n$$

Ce processus particulier intervient dans toute la suite, car il est lié à DX_t , la dérivée de Malliavin (multi-dimensionnelle) de X_t , par la relation très importante :

$$dD_s X_t = Y_t Y_s^{-1} \sigma(X_s) \mathbf{1}_{s \leq t}$$

Comme nous l'avons déjà vu dans la première partie de ce rapport il s'agit du processus des variations premières du processus X_t .

Le résultat fondamental pour la dérivée de P en λ est le suivant :

Proposition 10 *On se donne une fonction $a \in L^2([0, T])$ telle que l'on ait $\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t) dt = 1$, $\forall i = 1, \dots, m$. On introduit alors le processus $v_\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par :*

$$v_\lambda(t) = a(t) \sigma(\lambda, X_t^\lambda)^{-1} Y_t \sum_{i=1}^m (Y_{t_i}^{-1} L_{t_i}^\lambda - Y_{t_{i-1}}^{-1} L_{t_{i-1}}^\lambda) \mathbf{1}_{t \in [t_{i-1}, t_i]}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors la dérivée par rapport à λ de l'option multi sous-jacents P est donnée par la formule :

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = \mathbb{E}[\phi(X_{t_1}^\lambda, \dots, X_{t_m}^\lambda) \delta(v_\lambda)]$$

où $\delta(v_\lambda)$ désigne l'intégrale de Skorokhod du processus v , c'est-à-dire $\delta(v_\lambda) = \int_0^T v_\lambda(t)^\top dZ_t$

3.1.2 Application au calcul des grecques

On considère n sous-jacents de vecteur de prix initial x et de vecteur de volatilité σ . ρ est la matrice de corrélation du brownien, plus exactement : $\langle W^i, W^j \rangle_t = \rho_{ij} t$. En notant r le taux d'intérêt (constant), la dynamique de ces sous-jacents est régie par l'équation suivante :

$$dS_t = r S_t dt + \sigma \cdot S_t \cdot dW_t, \quad S_0 = x$$

Remarque 6 *Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes : $x \cdot y$ et $\frac{x}{y}$, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ désignent respectivement le produit et la division composante par composante. Enfin, dans la suite, dès que x ou y est une matrice, $x \odot y$ désigne le produit d'Hadamard de x et y .*

Calcul du Delta

Proposition 11 *Le Delta de l'option est donné par :*

$$\Delta = \mathbb{E} \left[\frac{\rho^{-1} W_{t_1}}{t_1 \sigma \cdot x} \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \right]$$

¹ à l'aide de la théorie des flots stochastiques de Kunita.

Preuve. On note $X_t = \log(S_t)$. X_t vérifie alors l'EDS suivante :

$$dX_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + (\sigma \odot U)dZ_t, \quad x_0 = \log(x)$$

où U est le facteur de Cholesky de la matrice de corrélation ρ et Z_t un mouvement brownien standard dans \mathbb{R}^n tel que $W_t = UZ_t$. L'hypothèse d'ellipticité est ici clairement satisfaite. Comme les coefficients de l'EDS sont constants, on a identiquement $Y_t = I_n$. D'après la proposition 10, on en déduit que le poids vaut :

$$\delta(v) = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} t_1 ((\sigma \odot U)^{-1})^\top dZ_t = \frac{\rho^{-1}W_{t_1}}{t_1\sigma},$$

en utilisant $W_t = UZ_t$ et $\rho = UU^\top$.

On considère alors la fonction $\tilde{\phi}(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) := \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) = \phi(\exp(X_{t_1}), \dots, \exp(X_{t_m}))$, à laquelle on applique la proposition 10 :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \mathbb{E}[\tilde{\phi}(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\rho^{-1}W_{t_1}}{t_1\sigma} \right)^\top \tilde{\phi}(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \right]$$

La conclusion découle alors simplement par dérivation composée puis transposition. ■

Le principe est finalement le même que celui introduit dans le cas des modèles à volatilité stochastique (on se reportera à l'annexe C de ce rapport pour de plus amples détails). Il s'agit de changer de brownien pour travailler sur des mouvements browniens standards de \mathbb{R}^n . Il suffit ensuite de répercuter ce changement dans les formules obtenues dans le cas standard (après les avoir étendues au cas multi-dimensionnel). On reconnaît en effet ici, à la matrice ρ près, le poids de Malliavin standard obtenu pour un modèle de Black-Scholes à un sous-jacent $\left(\frac{W_T}{x\sigma T}\right)$.

Nous donnons ci-dessous les poids² de Malliavin pour différentes sensibilités obtenus selon cette même méthode.

Calcul du Gamma

Proposition 12 *Le Gamma de l'option est donné par :*

$$\Gamma = \mathbb{E} \left[\left(\begin{array}{cc} \frac{\rho^{-1}W_{t_1}}{t_1\sigma \cdot x} & \frac{\rho^{-1}W_{t_1}}{t_1\sigma \cdot x} \\ -\frac{\rho^{-1}W_{t_1}}{t_1\sigma \cdot x^2} \odot \mathbf{I}_n & -t_1\rho^{-1} \odot \left(\frac{1}{t_1\sigma \cdot x} \frac{1}{t_1\sigma \cdot x} \right)^\top \end{array} \right) \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \right]$$

Calcul du Vega

Proposition 13 *Le Vega de l'option est donné par :*

$$V = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \cdot \rho^{-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}{(t_i - t_{i-1})\sigma} - \rho^{-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - \frac{1}{\sigma} \right) \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \right]$$

Calcul du Rho

Proposition 14 *Le Rho de l'option est la sensibilité du prix de cette option par rapport au taux d'intérêt sans risque (constant ici) et est donné par :*

$$\varrho = \partial_r P = \mathbb{E} \left[\left(\left(\frac{1}{\sigma} \right)^\top \rho^{-1}W_{t_m} \right) \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \right]$$

Calcul du Theta

Proposition 15 *Le Theta de l'option est la sensibilité du prix de cette option par rapport à la variable temps et est donné par :*

$$\Theta = \partial_t P = rP - x^\top \Delta - \frac{1}{2}(\sigma \cdot x)^\top (\Gamma \odot \rho)(\sigma \cdot x)$$

²On rappelle que ces poids ne sont pas uniques et qu'il s'agit ici uniquement d'exhiber des poids admissibles.

3.2 Applications

Nous avons écrit dans le préambule de ce chapitre que l'implémentation numérique des résultats impliquaient un long temps de calcul, et pour cause : pour un panier constitué de N titres, il y a N deltas à estimer (un par sous-jacent) et il faut également contrôler les corrélations entre sous-jacents ($\frac{N(N-1)}{2}$ paramètres à estimer). Nous atteignons sans doute les limites du Monte-Carlo classique tandis que le calcul de Malliavin permet une démarche moins lourde. Dans ce qui suit nous illustrons la théorie précédente en l'appliquant au calcul de sensibilités pour deux types d'options multi-sous-jacents : l'option *Spread* et l'option *WorstOf*.

3.2.1 Un exemple avec l'option sur Spread

Nous considérons donc une option Spread sur deux sous-jacents, S^1 et S^2 , caractérisée par le payoff suivant :

$$\left((S_T^1 - S_T^2) - K \right)^+$$

où K désigne le strike de l'option. Nous avons représenté sur la figure 3.1, la simulation du Delta pour différentes méthodes de simulations et différents générateurs de nombres aléatoires (RND³ et SOBOL⁴). De plus, nous y avons ajouté une méthode de réduction de variance (AV : variables antithétiques). Les caractéristiques de cette option sont les suivantes : $S_0^1 = S_0^2 = 100$, $b_1 = 0.05$, $b_2 = 0.03$,⁵ $\sigma_1 = 0.20$, $\sigma_2 = 0.15$, $r = 0.05$, $K = 0$ et $T = 1$ an.

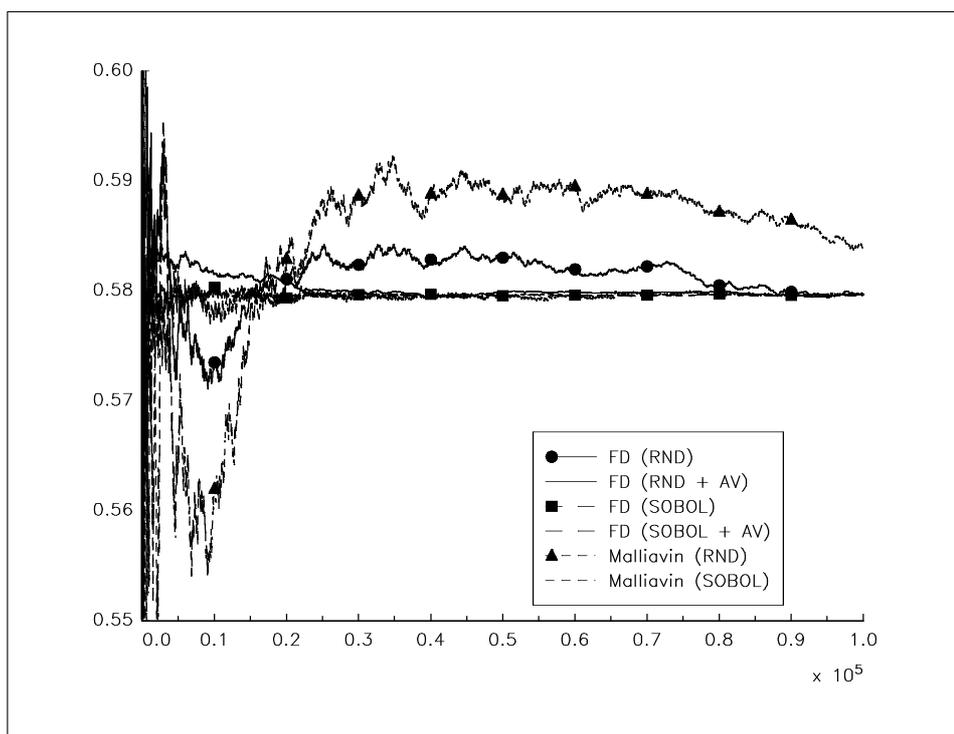


FIG. 3.1 – Estimation du $\hat{\Delta}_1$ d'une option sur spread — Méthodes des Différences finies et de Malliavin (100000 premiers nombres aléatoires) — Générateurs de nombres aléatoires RND et SOBOL

Ce graphique met en évidence plusieurs résultats empiriques : le Monte-Carlo classique n'est pas très performant. Même si on constate que l'introduction de variables antithétiques accélère la

³générateur à congruences linéaires classique.

⁴générateur de nombres pseudo aléatoires.

⁵ b_1 et b_2 sont les coefficients de dérive des processus sous-jacents sous \mathbb{Q} .

convergence de l'estimation, c'est très clairement le générateur SOBOL qui présente les meilleurs résultats. On constate également que si la méthode de Malliavin avec RND est décevante, elle est en revanche très efficace avec SOBOL. La convergence des résultats en utilisant SOBOL est en fait tout le temps meilleure qu'en utilisant un générateur classique de nombres aléatoires. Pour vérifier réellement la précision des simulations suivant chaque méthode, nous avons décidé d'approcher, comme dans le chapitre 2, la densité des différents estimateurs à partir de 5 000 points (chaque point étant obtenu avec 100 000 simulations). Nous avons aussi jugé utile de constater ce qu'il se passait lorsque la corrélation entre les deux sous-jacents est plus importante (ρ passe de 0.5 à 0.9). Ces résultats sont reportés sur les figures 3.2 et 3.3.

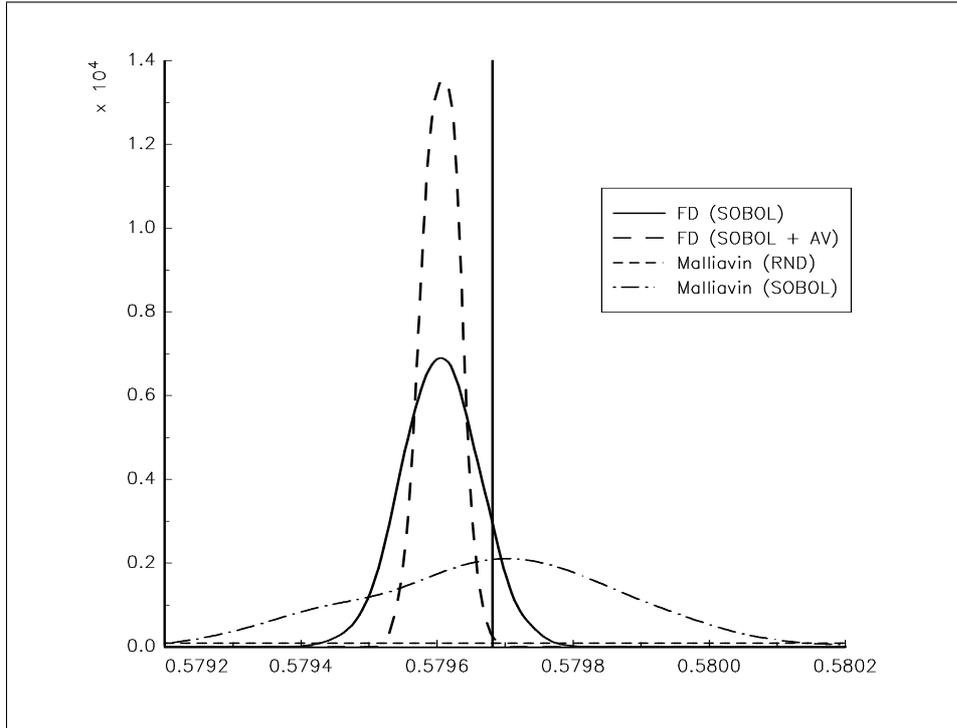


FIG. 3.2 – Densité des estimateurs $\hat{\Delta}_1$ d'une option sur spread — Méthode des Différences finies ($\epsilon = 0.01$) et méthode de Malliavin — Valeur de la corrélation $\rho = 50\%$

On constate un biais conséquent en utilisant la méthode des Différences Finies ; ce biais est par ailleurs d'autant plus important que les sous-jacents sont plus fortement corrélés. Ce biais pose encore la question du pas de discrétisation adopté pour approcher la dérivée ; le fait que les sous-jacents sont fortement corrélés aggraverait la sensibilité du biais à ce pas de discrétisation. Finalement, avec les Différences Finies on obtient un estimateur à faible variance mais biaisé tandis qu'avec le calcul de Malliavin on obtient un estimateur sans biais mais dont la variance est plus importante.

3.2.2 Un exemple avec l'option WorstOf

L'option WorstOf est une des options sur multi sous-jacents les plus simples. Elle est caractérisée par le payoff suivant :

$$\left(\prod_{i=1}^n \frac{S_{t_1}^i}{S_{t_0}^i} - K \right)^+, \quad (3.1)$$

où K désigne le strike, t_0 la date de départ de l'option et t_1 la date de fin.

Pour nos simulations, nous avons opté pour 4 sous-jacents ayant les caractéristiques suivantes :

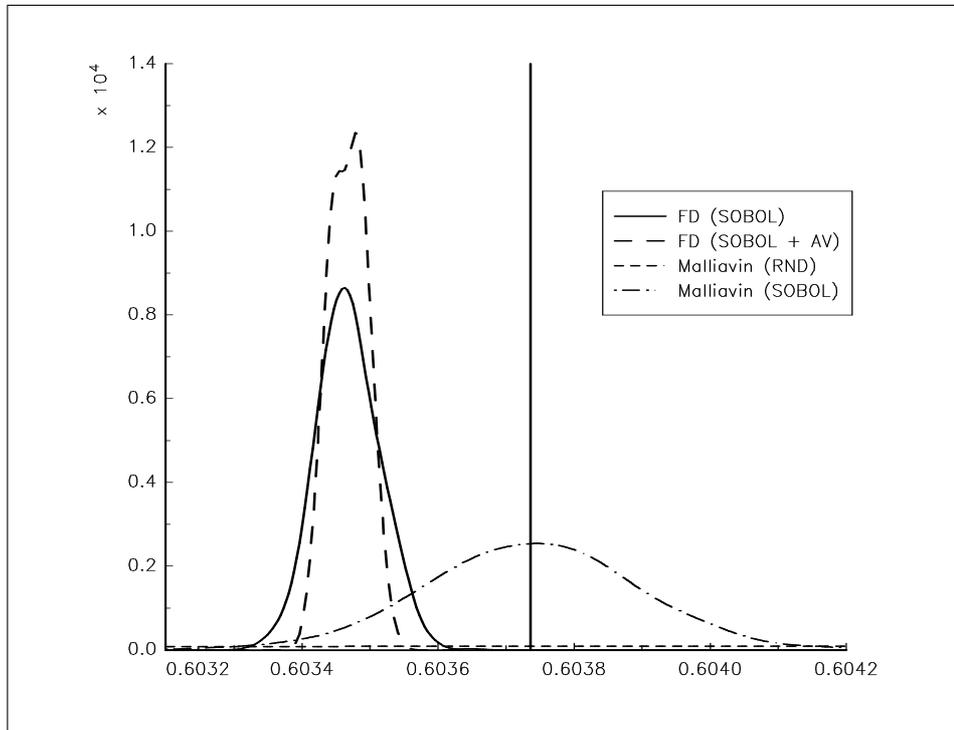


FIG. 3.3 – Densité des estimateurs $\hat{\Delta}_1$ d'une option sur spread — Méthode des Différences finies ($\epsilon = 0.01$) et méthode de Malliavin — Valeur de la corrélation $\rho = 90\%$

	Cours initial	Coefficient de dérive	Coefficient de diffusion
S_1	100	0.05	0.20
S_2	100	0.03	0.15
S_3	100	0.06	0.20
S_4	100	0.04	0.15

TAB. 3.1 – Caractéristiques des sous-jacents de l'option WorstOf

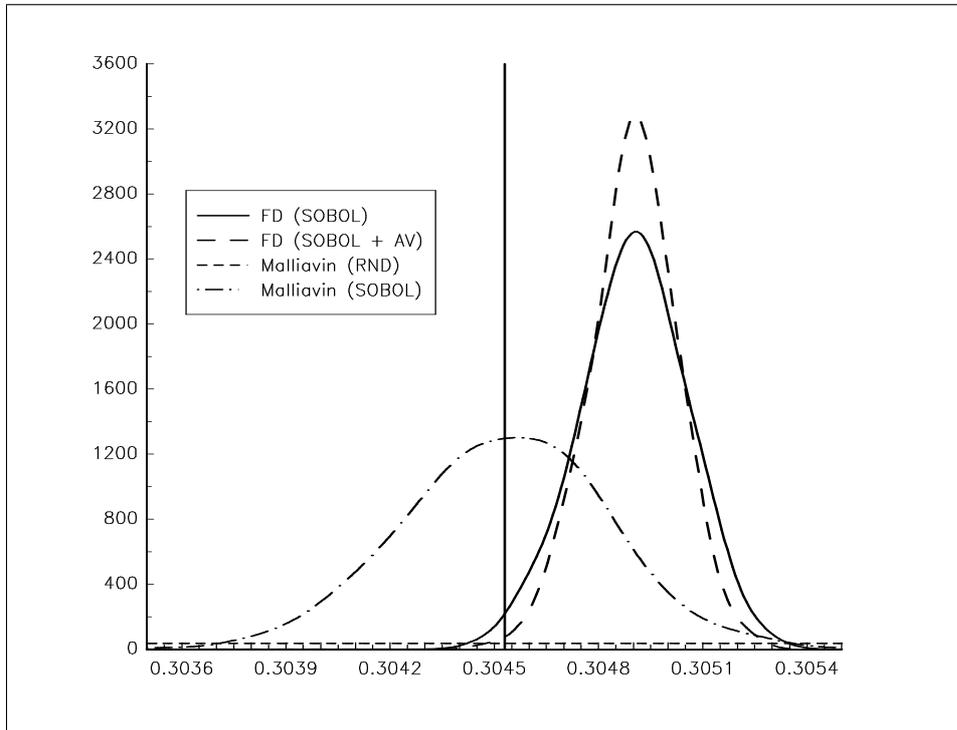


FIG. 3.4 – Densité des estimateurs $\hat{\Delta}_1$ d'une option WorstOf (4 sous-jacents) — Méthode des Différences finies ($\epsilon = 0.01$) et méthode de Malliavin — Valeur de la corrélation $\rho = 90\%$

De plus la maturité de l'option a été fixée à 1 an, le strike à 100 et le taux sans risque à 0.05. En outre nous avons choisi une corrélation des sous-jacents à 90%.

Nous avons représenté sur la figure 3.4 la densité des estimateurs $\hat{\Delta}_1$ de cette option suivant la méthode des Différences Finies ($\epsilon = 0.01$) et la méthode basée sur le calcul de Malliavin. Cette figure atteste du biais qui existe lorsque l'on utilise la méthode des Différences Finies pour estimer le Delta (ou autre sensibilité) d'une option multi-sous-jacent. De plus, nous constatons que la méthode basée sur le calcul de Malliavin estime correctement la valeur théorique du Delta de cette option. Cependant, cette méthode a besoin d'être améliorée afin de réduire la variance de l'estimation.

Chapitre 4

Valorisation et sensibilités d'une option américaine

Une option américaine d'échéance T sur un actif X_t est une option que le détenteur a le droit d'exercer à tout instant entre le moment de son achat et son échéance T . Ce droit englobe la possibilité d'un exercice à l'échéance. **Dans cette partie, nous nous proposons d'exploiter d'autres résultats du calcul de Malliavin, pour la valorisation et la couverture d'options américaines sur panier.** S'il existe des formulations de ce problème en terme d'inéquations variationnelles (à partir d'une représentation par E.D.P.), leurs applications numériques sont possibles seulement pour des dimensions inférieures à trois. Une approche probabiliste comme Monte Carlo présente l'avantage, du point de vue numérique, de s'affranchir de ces contraintes dimensionnelles.

Cependant, à ce jour, dans le cadre des options américaines, les techniques de Monte Carlo existantes se révèlent peu performantes. On montre par le principe de programmation dynamique (section suivante), que valoriser une option de ce type revient à approcher numériquement une famille d'espérances conditionnelles. Or, les espérances conditionnelles, sous leurs formes habituelles, sont très dures à évaluer par les techniques de Monte Carlo. En effet, presque toutes les trajectoires simulées vont *passer à côté* de l'événement par rapport auquel on conditionne.

Dans une seconde partie, grâce au calcul de Malliavin, on obtient une nouvelle représentation de l'espérance conditionnelle introduite, la première fois par FOURNIÉ et al. [FLLL01b]. L'expression obtenue prend en compte le conditionnement et ne présente plus les mêmes difficultés d'estimation. Cette technique est très prometteuse et ses applications s'étendent à de nombreux domaines¹. En effet, elle modifie considérablement la performance des techniques de Monte Carlo qui s'avère satisfaisante quand elle est couplée à une technique de localisation. Dans le cadre des options américaines, nous en déduisons un algorithme de valorisation amélioré, la première fois mis en place dans un article très récent par LIONS ET REGNIER [LR01]. On trouvera en annexe les nouveaux poids pour calculer les sensibilités.

4.1 L'échec de Monte Carlo pour les options américaines

Nous nous plaçons dans l'espace de probabilité habituel et nous supposons juste que le sous-jacent suit une diffusion classique² sous la probabilité risque-neutre :

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t + r(t, X_t)dt \text{ et } X_0 = x$$

Rappelons également que nous faisons l'hypothèse de complétude du marché.

¹Par exemple le problème de Merton, l'évaluation d'un maximum de vraisemblance...

²nous traitons le cas Black-Scholes pour les applications numériques

4.1.1 Formulation du problème en terme d'espérances conditionnelles

Le lien existant entre espérances conditionnelles et options américaines résulte du principe de programmation dynamique d'Hamilton Jacobi Bellman. Nous donnons une idée succincte de la méthodologie employée dans les quelques lignes suivantes. La valorisation d'option américaine est traitée de façon académique comme un problème d'arrêt optimal.

Proposition 16 (Formulation en terme d'arrêt optimal) *Le prix d'une option américaine peut s'interpréter de manière probabiliste à l'instant 0 par (LAMBERTON ET LAPEYRE [LL00]) :*

$$P(x) = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{I}_{0,T}} \mathbb{E}(\exp(-r\tau)f(X_\tau))$$

où $\mathcal{I}_{0,T}$ désigne l'ensemble des temps d'arrêts prenant leurs valeurs dans l'intervalle $[0, T]$.

Un problème d'arrêt optimal est équivalent à un problème de contrôle optimal stochastique. Pour obtenir une version discrète et utilisable numériquement du résultat précédent, on procède comme suit (méthodologie utilisée dans [LR01]). A chaque instant, le détenteur de l'option exerce son contrôle, c'est-à-dire la possibilité d'exercer ou non son option. Ainsi, on introduit un processus u , \mathcal{F}_t -adapté, qui exprime notamment le fait que l'exercice ne peut avoir lieu qu'une fois pour toute :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, T], u(t, X_t) \in \{ \text{exercer, ne pas exercer} \} \\ \text{et si pour tout } t \leq T, \\ \{ u(t, X_t) = \text{exercer} \} \text{ est réalisé alors } \forall s \in]t, T], \{ u(s, X_s) = \text{ne pas exercer} \} \text{ est réalisé} \end{array} \right.$$

A partir de ce résultat, il est aisé d'élaborer une stratégie qui consiste à regarder et ce à chaque instant, si on exerce l'option ou non. Pour ce faire, on discrétise l'intervalle $[0, T]$ en L subdivisions égales de taille $\delta t = \frac{T}{L}$. A une des dates de discrétisation $k\delta t$, on vérifie si le détenteur a intérêt ou non à exercer son option. Pour cela, on compare deux gains :

- L'exercice immédiat assure un gain $f(X_{k\delta t})$.
- Conserver son option nécessite le calcul de la valeur actualisée de l'option pour connaître la valeur de son portefeuille.

La valeur de l'option est alors donnée par l'espérance actualisée du prix de l'option **conditionnée** par la filtration par rapport à cette date. Des remarques ci-dessus, on déduit une équation de récurrence (principe de programmation dynamique de Bellman). Cela est d'autant plus simple que le processus (X_t) est markovien. En effet le conditionnement par rapport à la filtration revient à conditionner par la dernière valeur prise par le sous-jacent.

Proposition 17 (Lien entre espérances conditionnelles et options américaines) *La formule de récurrence suivante caractérise le prix d'une option américaine en fonction d'espérances conditionnelles. Pour tout $0 < \delta t < 1$ et tout $k \in \{0, \dots, L\}$,*

$$P_{k\delta t}(X_{k\delta t}) = \max \left\{ f(X_{k\delta t}); e^{-r\delta t} \mathbb{E}[P_{(k+1)\delta t}(X_{(k+1)\delta t}) | (X_{k\delta t})] \right\}$$

4.1.2 Un algorithme inefficace numériquement

Pour valoriser une option américaine, on procède de la façon suivante. On simule d'abord N trajectoires de la diffusion log-normale. On commence alors une induction backward pour déterminer le prix. Au niveau $(L-1)\delta t$ de nos N simulations, il nous faut évaluer le payoff d'un exercice direct (cela ne pose aucun problème et est immédiat), et une espérance conditionnelle. Si la nature markovienne de la diffusion simplifie le traitement du conditionnement³, il est néanmoins nécessaire de relancer un jeu de simulation en chaque point de discrétisation des N simulations pour évaluer l'espérance conditionnelle et ainsi de suite... Pire, le nombre de simulations devient très vite faramineux car aux points $(L-2)\delta t$ des trajectoires, il faut alors de nouveau (il y alors juste

³Il n'est pas nécessaire de prendre des trajectoires qui partent de x et à l'avant dernière date sur n passe près de la valeur de $X_{k\delta t}$.

deux points de discrétisation) réitérer la procédure pour obtenir le terme d'espérance conditionnelle comme si c'était un prix de l'option à lui tout seul.

Ces remarques rendent donc impossible la valorisation par des méthodes de Monte Carlo usuelles. **Il est nécessaire de traiter différemment le conditionnement pour pouvoir s'affranchir de la nature récursive de l'algorithme.** La solution proposée par le calcul de Malliavin dans la section suivante ne dépend pas du caractère markovien ou non du processus X :

Remarque 7 (L'échec des méthodes de Monte Carlo usuelles pour l'estimation d'espérance conditionnelle avec un processus sous-jacent non markovien) *En effet, supposons par exemple qu'on veuille simuler*

$$\mathbb{E}(X_2|X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \frac{\mathbb{E}[X_2 \mathbf{1}_{X_1=x_1, X_0=x_0}]}{\mathbb{P}(X_1 = x_1)}$$

où X n'est pas markovien. Il faut que les trajectoires de X partant de x_0 passe en x_1 pour être intéressantes. Or pour les diffusions⁴ on a par exemple $\mathbb{P}(X_1 = x_1) = 0$, donc il n'est pas possible d'effectuer une approche directe dans le but de calculer numériquement cette espérance conditionnelle. Les méthodes usuelles de Monte Carlo contournent cette difficulté en discrétisant l'espace des trajectoires : l'utilisateur suppose une partition finie ou dénombrable de l'espace $(\Omega, (\mathcal{O}_i))$. Elles ne cherchent alors pas à approcher numériquement cette espérance conditionnelle, mais la quantité suivante :

$$\mathbb{E}(X_2|X_1 \in \mathcal{O}(x_1), X_0 = x_0)$$

où $\mathcal{O}(x_1)$ désigne l'élément de la partition de l'espace des trajectoires contenant x_1 . Plus les ouverts de la partition sont "petits", plus l'estimateur est proche de la réalité, en revanche le nombre de trajectoires intéressant est moindre et la vitesse de convergence s'en ressent.

4.2 Nouvelle représentation d'espérance conditionnelle

Précisons le cadre théorique de notre étude. Soit Υ l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs réelles et à croissance au plus polynômial :

$$\Upsilon(\mathbb{R}) = \{f \text{ mesurable, } \exists C > 0 \text{ et } m \in \mathbb{N}, f(y) \leq C(1 + |y|^m)\}$$

Introduisons également les fonctions Heaviside de la forme (nous noterons H_0 simplement H) :

$$H_\alpha(y) = \mathbf{1}_{\{y > \alpha\}} + c$$

Grâce au théorème clé suivant, **on exprime l'espérance conditionnelle grâce à un poids qui s'applique à tout payoff** : Ce poids intègre complètement le conditionnement.

Théorème 5 (Représentation d'espérances conditionnelles avec poids FOURNIÉ et al. [FLLL01b]) *Soit u_t un processus possédant certaines propriétés de régularité au sens de Malliavin et vérifiant le système de condition suivant :*

$$(S) \begin{cases} \mathbb{E}[\int_0^T D_t \mathbf{G} u_t dt | \sigma(\mathbf{F}, \mathbf{G})] = 1 & (S1) \\ \mathbb{E}[\int_0^T D_t \mathbf{F} u_t dt | \sigma(\mathbf{F}, \mathbf{G})] = 0 & (S2) \end{cases}$$

où $\sigma(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ désigne la filtration augmentée. Alors, on a pour une fonction $f \in \Upsilon(\mathbb{R})$, la représentation suivante de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{F}) | \mathbf{G} = 0] = \frac{\mathbb{E}[f(\mathbf{F}) H(\mathbf{G}) \delta(u)]}{\mathbb{E}[H(\mathbf{G}) \delta(u)]}$$

⁴On parle de mesures diffuses : il n'y a pas d'atomes, c'est à dire de singleton affecté d'une probabilité non nulle de réalisation

Preuve. Prouvons d'abord ce résultat pour les fonctions \mathcal{C}^1 . On l'étend aux fonctions simplement boréliennes (ou mesurables) par un argument de densité comme dans la section 2. La formule découle d'une intégration par parties après avoir écrit l'espérance conditionnelle sous la forme de Bayes :

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{F})|\mathbf{G} = 0] = \frac{\mathbb{E}[f(\mathbf{F})\delta_0(\mathbf{G})]}{\mathbb{E}[\delta_0(\mathbf{G})]} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}[f(\mathbf{F})\mathbf{1}_{[-\epsilon, +\epsilon]}(\mathbf{G})]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[-\epsilon, +\epsilon]}(\mathbf{G})]}$$

Pour le dénominateur, il suffit d'appliquer directement la formule d'intégration par parties. En écrivant la dérivée au sens de Malliavin de $f(\mathbf{F})\mathbf{H}_\epsilon(\mathbf{G})$ grâce à la formule de dérivation en chaîne, on obtient :

$$D_t(f(\mathbf{F})\mathbf{H}_\epsilon(\mathbf{G})) = f'(\mathbf{F})D_t(\mathbf{F})\mathbf{H}_\epsilon(\mathbf{G}) + f(\mathbf{F})\mathbf{1}_{[-\epsilon, +\epsilon]}D_t(\mathbf{G})$$

La condition que vérifie u intervient à ce stade, l'expression, en multipliant par u et en intégrant :

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{H}_\epsilon(\mathbf{G}) \int_0^T D_t(f(\mathbf{F}))u_t dt\right] = \mathbb{E}\left[f'(\mathbf{F})\mathbf{H}_\epsilon(\mathbf{G}) \int_0^T D_t(\mathbf{F})u_t dt\right] + \mathbb{E}\left[f(\mathbf{F})\mathbf{1}_{[-\epsilon, +\epsilon]}(\mathbf{G}) \int_0^T D_t(\mathbf{G})u_t dt\right]$$

Nous avons pu sortir les variables aléatoires des intégrales de Riemann. Très simplement, on traite l'égalité précédente de la manière suivante pour arriver à nos fins :

- on applique la formule d'intégration par parties au premier terme pour que notre poids ne dépende pas de f comme dans le calcul des sensibilités,
- le deuxième terme est simplifié grâce à la condition **(S2)**. La dérivée disparaît et permet l'extension aux fonctions boréliennes comme dans la partie précédente,
- avec le dernier terme, la propriété sur l'espérance conditionnelle **(S1)** vérifiée par u permet de retrouver le numérateur que nous calculons.

On retrouve alors notre théorème en passant à la limite et en exprimant le dernier terme comme la différence des deux premiers. ■

Remarque 8 *Il existe une version de ce théorème pour les fonctions \mathcal{C}^1 sans la condition **(S2)** :*

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{F})|\mathbf{G} = 0] = \frac{\mathbb{E}[f(\mathbf{F})H(\mathbf{G})\delta(u) - f'(\mathbf{F})H(\mathbf{G}) \int_0^1 D_t \mathbf{F} u_t dt]}{\mathbb{E}[H(\mathbf{G})\delta(u)]}$$

*Mais l'hypothèse de dérivabilité de la fonction f est pénalisant (dans un cadre financier la plupart des payoff ne le sont pas). On s'affranchit de cette condition de régularité contraignante, en imposant la condition supplémentaire **(S2)**. De plus on déplace la difficulté de calcul induite par l'estimation de la dérivée dans la détermination du processus u ce qui se révèle beaucoup plus simple à l'usage et simplifie grandement les expressions du point de vue numérique.*

La représentation précédente permet une implémentation plus efficace. D'une part, le conditionnement par rapport à la variable aléatoire n'apparaît plus que dans le poids : c'est à dire la fonction Heaviside et l'intégrale de Skorokhod. Beaucoup plus de trajectoires deviennent intéressantes : il n'importe plus qu'elles soient issues du point où on conditionne ou de passer dans un voisinage. D'autre part, pour calculer une famille d'espérances conditionnelles (dans le cas d'une option américaine par exemple), il n'est plus nécessaire d'envisager autant de jeux de trajectoires que d'espérances à calculer : un seul échantillon de trajectoires de la variable X , suffit car c'est une espérance usuelle.

Finissons ce chapitre par une remarque sur l'extension multi dimensionnelle de ce résultat.

Remarque 9 (Extension à un conditionnement multi dimensionnel) *L'approche précédente peut-être étendue à des situations où on conditionne l'espérance par rapport à un vecteur de variables aléatoires G_d en dimension d par exemple. Le processus u est alors vectoriel et en itérant l'argument précédent, ses composantes u_t^i sont telles que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T D_T G_j u_t^i dt | \sigma(F, G)\right] = \delta_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq d$$

Cela implique évidemment que le vecteur $G = (G_1, \dots, G_d)$ n'est pas "corrélé au sens de Malliavin", c'est à dire que la matrice de covariance au sens de Malliavin est inversible⁵.

⁵cf Annexe A pour des détails sur cette notion

4.2.1 Un exemple de processus u

Existence du processus u Nous n'avons pas traité pour l'instant la question de l'existence d'un processus u . Un candidat naturel pour u , étant donné la condition **(S1)** est tout simplement

$$u_t = \frac{C^{te}}{D_t(G)}$$

Pour qu'il puisse vérifier le système de condition **(S)**, il faut que les processus $(D_t(G), D_t(F))$ forme une famille libre. Nous donnons un exemple dans le cadre d'une diffusion générale et les formules explicites pour le cas log-normal. Rappelons que le processus (X_t) vérifie :

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt, \quad X_0 = x$$

On a déjà calculé la dérivée au sens de Malliavin de la variable aléatoire X_t en fonction du processus de variations premières Y . Pour que la condition **(S1)** soit remplie, on se contente de prendre son inverse à une constante près pour s'assurer que l'intégrale vaut bien 1 sur $[t, T]$

$$u_s = \frac{Y_s}{t\sigma(X_s)Y_t}(1)_{[0,t]}(s)$$

Pour que la condition **(S1)** soit remplie, il est crucial de noter que dans le cas de diffusion $D_s F = D_s X_T$ coïncide avec $D_s(\mathbf{G}) = D_s X_t$ sur $[0, t]$. Ensuite, sur $[t, T]$ la deuxième dérivée au sens de Malliavin est nulle⁶. Mathématiquement, comme :

$$D_s X_t = D_s X_T \frac{Y_t}{Y_T} \mathbf{1}_{s \leq t}$$

alors, il existe une solution aux système d'équations, en prenant

$$u_t = \frac{Y_s}{\sigma(X_s)Y_t} \left\{ \frac{1}{t}(1)_{[0,t]}(s) - \frac{1}{T-t}(1)_{[t,T]}(s) \right\}$$

Le calcul de l'intégrale de Skorokhod se fait une nouvelle fois grâce à la formule de dérivation en chaîne, ainsi qu'avec la proposition 5. En notant (ζ_s) le processus des variations premières associé au processus Y_t :

$$\delta(u) = \frac{1}{Y_t} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \frac{Y_s}{\sigma(X_s)} dW_s - \frac{1}{T-t} \int_t^T \frac{Y_s}{\sigma(X_s)} dW_s \right) + \frac{\zeta_t}{Y_t^2} + \frac{1}{tY_t} \int_0^t \frac{\sigma'(X_s)}{\sigma(X_s)} Y_s ds - \frac{1}{tY_t} \int_0^t t \frac{\zeta_s}{Y_s} ds$$

Dans le cas log-normal, les expressions se simplifient particulièrement. En effet, $\sigma(X_s) = \sigma X_s$ et $\zeta_t = 0$. Cela nous donne alors une expression simple : $\delta(u) = \frac{1}{Y_t} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{\sigma} dW_s - \frac{1}{T-t} \int_t^T \frac{1}{\sigma(X_s)} dW_s \right) + \frac{1}{tY_t} \int_0^t \frac{\sigma}{\sigma X_s} Y_s ds$. Comme $Y_t = X_t/x$, l'expression devient encore plus simple. Nous précisons dans le lemme suivant ce résultat ainsi que les notations qui nous serviront régulièrement dans le cas des options américaines :

Lemme 2 (Représentation de l'espérance conditionnelle dans le cadre log-normal) *Nous notons désormais : pour $s \leq t$, $\Delta W_{s,t} = tW_s - sW_t + \sigma s(t-s)$. Alors on a pour tout α réel positif, $t \in [0, T]$ et $f \in \Upsilon$:*

$$T_{s,t}[f](\alpha) = \frac{1}{\sigma s(t-s)} \mathbb{E} \left[\left(f(X_t) \frac{H(X_s - \alpha)}{X_s} \Delta W_{s,t} \right) \right]$$

alors :

$$\mathbb{E}^Q[f(X_t)|X_s = \alpha] = T_{s,t}[f](\alpha) \times \{T_{s,t}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}}](\alpha)\}^{-1}$$

⁶ X_t ne dépend pas des accroissements du brownien pour des dates supérieures à t

4.2.2 Le concept de fonction localisante

En utilisant la formule de Bayes appliquées aux espérances conditionnelles, on a une représentation faisant intervenir une masse de Dirac, "fonction" fortement irrégulière. Le fait d'utiliser une intégration par partie permet de régulariser cette dernière au détriment d'un accroissement de la variance. Afin de remédier à cela nous pouvons utiliser une méthode de localisation pour une espérance conditionnelle. **Cette technique est actuellement l'objet d'un grand nombre de recherche sur le calcul de Malliavin appliqué à la finance** : les premiers à souligner son intérêt sont FOURNIÉ et al. [FLLL01b], BOUCHARD ET TOUZI ([BT02a]) donnent un cadre théorique à cette technique de réduction de variance et exhibent une fonction réduisant au mieux la variance de la nouvelle espérance conditionnelle dans le cas séparable. Nous nous contenterons du cas simple déjà exposé dans la partie sur les sensibilités.

fonction de localisation Soit K compact de (R) , une fonction g régulière est une fonction de localisation intéressant si elle vérifie les conditions suivantes :

- Le support de g est inclus dans K
- $\int_K g(y)dy = 1$

On définit alors G la fonction de répartition de g , c'est à dire $G = \int_{-\infty}^x g(y)dy$ En reprenant le raisonnement qui a permis d'établir la proposition sur la nouvelle représentation des espérances conditionnelles, on constate que le raisonnement fait pour le couple (δ, H) est également valable pour n'importe quel couple (g, G) :

$$\mathbb{E}(f(X_t)g(X_s - \alpha)) = \frac{1}{\sigma_s(t-s)} \mathbb{E} \left[(f(X_t)G(X_s - \alpha) \frac{\Delta W_{s,t}}{X_s} \right]$$

Ce qui nous permet la réécriture du lemme précédent avec la fonction de localisation :

Lemme 3 (Représentation de l'espérance conditionnelle avec localisation) *On a pour tout α réel positif, $t \in [0, T]$ et $f \in \Upsilon$:*

$$T_{s,t}^{loc}[f](\alpha) = \frac{1}{\sigma_s(t-s)} \mathbb{E} \left[(f(X_t) \frac{H(X_s - \alpha) - G(X_s - \alpha)}{X_s} \Delta W_{s,t} \right]$$

alors :

$$\mathbb{E}^Q[f(X_t)|X_s = \alpha] = T_{s,t}^{loc}[f](\alpha) \times \{T_{s,t}^{loc}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}}](\alpha)\}^{-1}$$

D'après les auteurs, cette fonction de localisation est cruciale pour avoir des résultats numériques dans des temps convenables.

4.3 Applications aux options américaines

Dans la section qui suit, nous présentons la méthode permettant d'approcher numériquement le prix. Les sensibilités se traitent de manière analogue et on a consigné en annexe les résultats correspondants. Cette méthode a été introduite pour la première fois par LIONS ET REGNIER [LR01].

4.3.1 L'algorithme de valorisation

Voici les différentes étapes mises en place dans la cadre du nouvel algorithme. La nature déficiente de l'ancien algorithme est induite par son caractère récursif. Il est crucial de noter que cette lacune est levée.

- On stocke dans une matrice rectangulaire les trajectoires discrétisées des browniens : N désigne le nombre de simulations et L le nombre de discrétisations.
- De la dernière colonne de cette matrice, on déduit un vecteur prix $P(X_L \delta t)$ (nous prenons le cas du put américain).
- On fixe la simulation par exemple, la numéro 1, et on se place au point juste avant l'échéance $(L-1)\delta t$.

- **Calcul de l'espérance conditionnelle.** En ce point à l'aide des autres simulations (2 jusqu'à N), on calcule l'espérance conditionnelle en utilisant la formule de localisation.
- On détermine alors la valeur du prix au point $(L - 1)\delta t$ de la trajectoire 1, en prenant le maximum de l'espérance conditionnelle et d'un exercice immédiat. On a obtenu de nouveau un vecteur prix.
- On itère la même procédure pour chacune des trajectoires nř2 jusqu'à la numéro N (ce qui rend cet algorithme très lent). On obtient de nouveau un vecteur prix.
- On itère la procédure de façon backward.

4.3.2 Résultats numériques

L'algorithme est correct (nous avons demandé confirmation à Bruno Bouchard), néanmoins nous ne disposons pas de résultats numériques personnels car l'implémentation s'est révélée défectueuse. **Nous pensons notamment que le choix de la fonction de localisation est cruciale, or nous ne disposons pas d'information sur la bonne fonction à choisir pour obtenir une convergence stable.** De plus, l'algorithme est lent et requiert des techniques de réduction de variances astucieuses(partition...) qui ne sont pas expliquées dans l'article.

Conclusion

Ce mémoire a été pour nous l'occasion de nous confronter à une théorie nouvelle et encore en développement. Le fait de travailler sur des articles très récents, de voir de nouveaux résultats publiés au cours de notre travail et d'avoir assisté à un séminaire regroupant les plus grands spécialistes de la question (Malliavin, Nualart, Lions, etc) a été particulièrement enthousiasmant. Ce travail nous a également permis d'approfondir nos connaissances en finance et en mathématiques appliquées; le caractère novateur et encore inconnu pour nous de la théorie du calcul de Malliavin s'est révélé être un défi intellectuel particulièrement stimulant.

Nous nous sommes principalement concentrés sur les techniques de Monte Carlo. Ces techniques sont lentes mais ont l'avantage d'être applicables quelque soit la dimension : leurs applications sont intéressantes numériquement quand on travaille sur des paniers (contrairement aux autres méthodes numériques : EDP, arbres, etc).

Nous avons consacré la plus grande partie de nos recherches à l'estimation des *grecques* pour différents types d'options. Le calcul de Malliavin permet en effet une nouvelle façon particulièrement élégante d'estimer les *grecques*. Cette nouvelle méthode d'estimation concurrence directement la méthode traditionnelle d'estimation par Différences Finies. Nous constatons empiriquement que si les estimateurs calculés par Différences Finies présentent un biais important dès que les payoff présentent une discontinuité, les estimateurs calculés à partir du calcul de Malliavin sont insensibles aux irrégularités du payoff en terme de biais mais présentent des variances plus importantes. Par ailleurs, la technique de Malliavin s'avère particulièrement efficace pour estimer les *grecques* d'options sur multi sous-jacents, surtout quand ces derniers sont fortement corrélés. Dans ce dernier cas, la méthode est d'autant plus intéressante qu'elle est bien plus rapide que la méthode traditionnelle. Elle est donc très utile dans la mesure où beaucoup de formules fermées existent déjà pour tout un éventail d'options sur mono sous-jacent et qu'en fait il s'agit plutôt aujourd'hui de proposer des méthodes d'estimation pratique pour des options sur multi sous-jacents (notamment de type américain). La méthode d'estimation des *grecques* par le calcul de Malliavin pourrait être plus convaincante si elle s'accompagnait de techniques de réduction de variance adaptées (localisation par exemple); c'est dans cette direction qu'il faudrait sans doute chercher à améliorer cette nouvelle approche.

Dans le souci d'améliorer les techniques de *pricing* et de *hedging* d'options américaines, nous exposons à l'aide du calcul de Malliavin une nouvelle représentation des espérances conditionnelles. Nous proposons un algorithme prometteur pour la valorisation d'option américaine et le calcul des grecques en haute dimension. Malheureusement, il n'a pas été possible de l'implémenter correctement dans les temps impartis.

Annexe A

Compléments sur le Calcul de Malliavin

Dans cette annexe nous présentons quelques démonstrations et résultats supplémentaires qui pourront éclairer le lecteur curieux.

A.1 Lien entre Malliavin et calcul de sensibilité

A.1.1 L'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck

Définition 10 (L'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck) Soit l'opérateur $L : \text{Dom}(L) \subseteq L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ tel que $L = \delta D$. Alors F fonctionnelle simple :

$$LF = \delta(D^1 F, \dots, D^d F) \quad (\text{A.1})$$

$$= \sum_{i=1}^d \delta_i(D^i F) \quad (\text{A.2})$$

$$= \sum_{i=1}^d \left[\sum_{k < 2^n} \frac{\partial f}{\partial x_k^i} (\Delta^n) \Delta_k^{n,i} - \sum_{k < 2^n} \frac{\partial^2 f}{\partial (x_k^i)^2} (\Delta^n) 2^{-n} \right] \quad (\text{A.3})$$

Cet opérateur permet d'écrire la formule d'intégration par parties :

$$\mathbb{E}[F.LG] = \mathbb{E}[F.\delta D(G)] = \mathbb{E}[\langle DF, DG \rangle] = \mathbb{E}[G.LF] \quad (\text{A.4})$$

Proposition 18 (Formules de calcul en dimension n) .

1.

$$\forall F = (F^1, \dots, F^n), \forall \varphi \in C^1(\mathbb{R}^n) \quad D_s^i \varphi(F) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} (F) D_s^i F^k$$

2.

$$\forall F, G \in \text{Dom}(L), \quad L(FG) = F.L(G) + G.L(F) - 2 \langle DF, DG \rangle$$

A.1.2 Formule d'intégration par parties

Grâce aux outils précédemment définis on peut enfin énoncer le théorème central, à l'origine du méthode des calculs de sensibilités.

Théorème 6 Soit $F = (F^1, \dots, F^n)$ une variable aléatoire en dimension n telle que

1. (hypothèse de régularité) $F^i \in \mathbb{D}^{1,2} \cap \text{Dom } L$

2. (hypothèse de non dégénérescence) σ_F est inversible et on note $\gamma_F = \sigma_F^{-1}$

Alors $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et $\forall G \in \mathbb{D}^{1,2}$

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F)G\right) = \mathbb{E}(\varphi(F)H_F^i(G))$$

avec

$$H_F^i(G) = \langle DF, DG \rangle_{\gamma_F} + \langle DF, D\gamma_F \rangle G - 2G \cdot \gamma_F \cdot LF$$

Preuve. Pour plus de clarté on se place en dimension 1. On exprime d'abord la dérivée usuelle de $\varphi(F)$ à l'aide de dérivées au sens de Malliavin. C'est là qu'intervient pleinement le lien entre dérivée classique et dérivée de Malliavin : on y utilise l'hypothèse de non dégénérescence. Par la formule de dérivation en chaîne $D_s(\varphi(F)) = \varphi'(F)D_s F$, on a :

$$\langle D\varphi(F), DF \rangle = \varphi'(F) \langle DF, DF \rangle = \varphi'(F)\sigma_F$$

c'est-à-dire en inversant :

$$\varphi'(F) = \gamma_F \langle D\varphi(F), DF \rangle .$$

D'autre part

$$\langle D\varphi(F), DF \rangle = -\frac{1}{2} [L(\varphi(F)F) - \varphi(F)LF - FL\varphi(F)] ,$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi'(F)G] &= -\frac{1}{2} \mathbb{E}[\gamma_F G [L(\varphi(F)F) - \varphi(F)LF - FL\varphi(F)]] \\ &= -\frac{1}{2} \mathbb{E}\left\{ \varphi(F) \left[FL(\gamma_F G) - \gamma_F GLF - L(\gamma_F GF) \right] \right\} \end{aligned}$$

Dès lors, en utilisant le 2 de la proposition 18, il ne s'agit plus que d'une simple gymnastique mathématique. ■

A.2 Passage des payoff dans \mathcal{C}_K^∞ aux payoff dans L^2 : démonstration

On impose une condition de "non-explosion" au poids π :

$$\mathbb{E}[\pi^2] < \infty$$

Soit f une fonction de L^2 . $\mathcal{C}_K^\infty[0, T]$ est dense dans L^2 et il existe donc une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à \mathcal{C}_K^∞ qui converge vers f dans L^2 . On note $u(x) = \mathbb{E}_x[F]$ et $u_n = \mathbb{E}_x[F_n]$; rappelons également que x est le point de départ du processus sous-jacent. La convergence dans L^2 implique la convergence dans L^1 et donc la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction $u : \forall x \in \mathbb{R} \ u_n(x) \rightarrow u(x)$ quand $n \rightarrow \infty$. La propriété que l'on cherche à étendre aux payoff de L^2 est supposée vraie pour les fonctions de \mathcal{C}_K^∞ et donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} u_n(x) = \mathbb{E}_x[F_n \times \pi]$$

Notons maintenant $g(x) = \mathbb{E}_x[F \times \pi]$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\left| g(x) - \frac{\partial}{\partial x} u_n(x) \right| = \left| \mathbb{E}_x[(F - F_n) \times \pi] \right| \leq h(x)\epsilon_n(x)$$

où

$$h(x) = \mathbb{E}_x[\pi^2]^{1/2} \quad \epsilon_n = \mathbb{E}_x[(F - F_n)^2]^{1/2}$$

La convergence de u_n entraîne la convergence simple de $\epsilon_n(x)$ vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Ainsi la suite de fonctions $(\frac{\partial}{\partial x} u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction g . Avec la propriété de Lebesgue, le fait que les fonctions F et F_n sont continues et le fait que la fonction $h(x)$ est bornée (d'après la condition de "non-explosion"), l'inégalité précédente montre que cette convergence est uniforme

sur tout compact K de \mathbb{R} . Finalement, la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction u , la suite des fonctions dérivées $(\frac{\partial}{\partial x} u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur tout compact de \mathbb{R} . La fonction limite u est donc différentiable et sa dérivée est égale à g :

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}_x[F] = \mathbb{E}_x[F \times \pi]$$

Annexe B

Une application de la formule de Clark-Ocone

Dans cette partie nous allons illustrer comment la formule de Clark-Ocone peut s'appliquer à l'analyse d'un portefeuille, c'est-à-dire à dupliquer un flux futur $V(T)$ (\mathcal{F}_T -mesurable).

Théorème 7 (Théorème de représentation d'Itô) Pour $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbb{P})$, on a

$$\exists \varphi \in \mathcal{P}, F = \mathbb{E}F + \int_0^1 \varphi_s dW_s$$

Proposition 19 (Formule de Clark-Ocone) Pour $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, on a

$$F = \mathbb{E}F + \int_0^1 \mathbb{E}(D_s F | \mathcal{F}_s)$$

On suppose qu'il y a deux actifs sur le marché :

$$\begin{cases} dA(t) = \rho(t)A(t)dt & \text{l'actif sans risque,} \\ dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t) & \text{l'actif risqué.} \end{cases}$$

On suppose simplement que les processus $\rho(t)$ et $\sigma(t)$ sont \mathcal{F}_t -adaptés. On cherche une stratégie auto-finançante $(\xi(t), \eta(t))$ amenant à une valeur de portefeuille donnée $V(T)$. $\xi(t)$ et $\eta(t)$ désignent respectivement les quantités investies dans l'actif sans risque et risqué à la date t . La valeur du portefeuille ainsi constitué est :

$$V(t) = \xi(t)A(t) + \eta(t)S(t)$$

D'autre part le portefeuille étant auto-finançant, on a :

$$dV(t) = \xi(t)dA(t) + \eta(t)dS(t)$$

En réécrivant ces équations nous obtenons :

$$\xi(t) = \frac{V(t) - \eta(t)S(t)}{A(t)} \quad (\text{B.1})$$

$$dV(t) = \rho(t)(V(t) - \eta(t)S(t))dt + \eta(t)dS(t) \quad (\text{B.2})$$

Prenons par exemple comme valeur finale du portefeuille le pay-off d'une option vanille de strike K sur l'actif risqué : $V(T) = (S(T) - K)^+$. $V(0)$ est alors le prix de l'option à la date initiale. D'après les équations (1) et (2), nous sommes ramenés à chercher $V(t)$ et $\eta(t) \forall t \in [0, T]$. Sous des conditions raisonnables sur nos paramètres, la théorie des équations différentielles stochastiques nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution au problème :

$$dV(t) = \rho(t)(V(t) - \eta(t)S(t))dt + \eta(t)dS(t), \text{ à } V(T) \text{ fixée.}$$

Pour mettre expliciter cette solution nous allons utiliser le théorème de Clark-Ocone. Pour cela, nous commençons par faire un changement de probabilité :

$$\begin{cases} \theta(t) = \frac{\mu(t) - \rho(t)}{\sigma(t)}, \\ \widetilde{W}(t) = \int_0^t \theta(s) ds + W(t). \end{cases}$$

Le théorème de Girsanov nous permet d'affirmer que $\widetilde{W}(t)$ est un mouvement brownien sous la probabilité \mathbb{Q} définie par :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_T} = \exp\left(-\int_0^T \theta(s) dW(s) - 0.5 \int_0^T \theta(s)^2 ds\right)$$

Sous la probabilité \mathbb{Q} , la dynamique du portefeuille s'écrit alors :

$$dV(t) = \rho(t)V(t)dt + \sigma(t)\eta(t)S(t)d\widetilde{W}(t)$$

En posant $U(t) = V(t) \exp(-\int_0^t \rho(s) ds)$, cette équation se réécrit :

$$dU(t) = \exp(-\int_0^t \rho(s) ds) \sigma(t) \eta(t) S(t) d\widetilde{W}(t)$$

soit encore :

$$V(T) \exp(-\int_0^T \rho(s) ds) = V(0) + \int_0^T \exp(-\int_0^t \rho(s) ds) \sigma(t) \eta(t) S(t) d\widetilde{W}(t)$$

On applique dès lors la formule de Clark-Ocone à $G(\omega) = \exp(-\int_0^T \rho(s, \omega) ds) V(T, \omega)$:

$$G(\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[G] + \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(D_t G - G \int_0^T D_t \theta(s, \omega) d\widetilde{W}(s)) | \mathcal{F}_t] d\widetilde{W}(t)$$

Par unicité, nous avons

$$V(0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[G]$$

et la quantité à investir dans l'actif risqué :

$$\eta(t) = \frac{\exp(-\int_0^t \rho ds) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(D_t G - G \int_0^T D_t \theta(s) d\widetilde{W}(s)) | \mathcal{F}_t]}{\sigma(t) S(t)}$$

Nous allons maintenant voir ce qui se passe dans le cas d'une diffusion à la Black-Scholes. On suppose que $\rho(t, \omega) = \rho$, $\mu(t, \omega) = \mu$ et $\sigma(t, \omega) = \sigma \neq 0$. Alors

$$\theta = \frac{\mu - \rho}{\sigma}$$

est aussi une constante et par conséquent $D_t \theta = 0$. Ainsi, la quantité à investir dans l'actif risqué est :

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \frac{e^{\rho(t-T)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D_t (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t]}{\sigma S_t} \\ &= \frac{e^{\rho(t-T)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\sigma S_T \mathbf{1}_{[K, \infty)}(S_T) | \mathcal{F}_t]}{\sigma S_t} \\ &= \frac{e^{\rho(t-T)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T \mathbf{1}_{[K, \infty)}(S_T) | \mathcal{F}_t]}{S_t} \\ &= \frac{e^{\rho(t-T)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^y[S_{T-t} \mathbf{1}_{[K, \infty)}(S_{T-t}) | \mathcal{F}_t]_{y=S_t}}{S_t} \end{aligned}$$

La dernière expression étant obtenue en utilisant la propriété de Markov du processus S_t . En poursuivant le calcul à l'aide des outils habituels (espérance d'une loi normale ...), on retrouve l'expression classique donnant la quantité d'actifs risqués à détenir dans le portefeuille, à savoir le *delta* de l'option. Il faut enfin remarquer que la formule de Clark-Ocone a l'immense avantage de marcher même lorsque le processus sous-jacent ne possède pas la propriété de Markov.

Annexe C

Extension à la volatilité stochastique

Supposons maintenant que la volatilité du processus sous-jacent est stochastique. D'une manière très générale on peut décrire le processus de la manière suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = \mu_X(t, X(t)).dt + \Sigma_X(t, X(t), \sigma(t)).dW_1(t) \\ d\sigma(t) = \mu_\sigma(t, \sigma(t)).dt + \Sigma_\sigma(t, X(t), \sigma(t)).dW_2(t) \end{cases}$$

$W(t) = \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{bmatrix}$ est un mouvement brownien bidimensionnel vérifiant :

$$\mathbb{E}[W_1(t).W_2(t)] = \rho t$$

Ainsi,

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ d\sigma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_X(t, X(t)) \\ \mu_\sigma(t, \sigma(t)) \end{bmatrix} \cdot dt + \begin{pmatrix} \Sigma_X(t, X(t), \sigma(t)) & 0 \\ 0 & \Sigma_\sigma(t, X(t), \sigma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ d\sigma(t) \end{bmatrix} = \mu \cdot dt + \Sigma \cdot \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{bmatrix}$$

Il est facile d'étendre les résultats obtenus à une dimension au cas multidimensionnel (chapitre 3). Ces résultats sont généralement valables pour des modèles faisant intervenir un vecteur brownien canonique (coordonnées indépendantes). L'introduction d'une volatilité stochastique nous ramène à un modèle à deux dimensions dans lequel les coordonnées du brownien sont a priori corrélées. Il s'agit donc, pour retrouver les poids de Malliavin de la théorie multidimensionnelle, de *décorrélérer* ces coordonnées. Si on note Γ la matrice de variance-covariance du vecteur $\frac{1}{\sqrt{t}}(W_1(t), W_2(t))$, alors, en introduisant la matrice $\Gamma^{-1/2}$ (qui peut être déterminée par une décomposition de Cholesky)¹ :

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{bmatrix} = \Gamma^{-1/2} \cdot \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{bmatrix}$$

est un mouvement brownien dont les coordonnées sont indépendantes.

Dès lors, le modèle devient :

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ d\sigma(t) \end{bmatrix} = \mu \cdot dt + \Sigma \cdot \Gamma^{1/2} \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{bmatrix} = \mu \cdot dt + \tilde{\Sigma} \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{bmatrix}$$

Dans le cas des modèles à volatilité stochastique, il suffit donc de reprendre les résultats multidimensionnels classiques en modifiant la matrice de volatilité pour s'assurer que les browniens sont bien indépendants.

¹ $\Gamma^{1/2} \cdot (\Gamma^{1/2})^\top = \Gamma$
Ici, $\Gamma^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{pmatrix}$

Pour le calcul du delta par exemple, on peut appliquer cette méthode à l'aide de la formule classique : $\text{poids}^{\text{delta}} = \delta(Y(t)\Sigma^{-1}(t)a(t))$. Cette dernière formule est valable dans le cas multidimensionnel ($Y(t)$ est alors une matrice et le poids obtenu est un vecteur) et pour $\rho = 0$. C'est la raison pour laquelle on change de brownien pour travailler sur un modèle à brownien canonique ($\rho = 0$), ce qui implique de modifier la matrice de volatilité (Σ devient $\tilde{\Sigma}$). La principale difficulté, dans un cadre aussi général, réside dans le calcul de la matrice des variations premières Y_t , puis dans le calcul de l'intégrale de Skorokhod.

Nous développons ici le cas d'un modèle à volatilité stochastique particulier, celui d'Heston. Dans ce modèle :

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu X(t) \\ \kappa(\theta - \sigma(t)) \end{bmatrix}$$

et

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma(t)}X(t) & 0 \\ 0 & \sigma_{vol}\sqrt{\sigma(t)} \end{pmatrix}$$

Par multiplication matricielle, on a :

$$\tilde{\Sigma}^{-1} = X(t)\sigma_{vol}\sigma(t)\sqrt{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma(t)}X(t)\sqrt{1-\rho^2} & 0 \\ -\sqrt{\sigma(t)}X(t)\sqrt{1-\rho^2}\rho & \sigma_{vol}\sqrt{\sigma(t)} \end{pmatrix}$$

D'autre part

$$Y_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_t}{\partial x} & \frac{\partial X_t}{\partial \sigma_0} \\ \frac{\partial \sigma(t)}{\partial x} & \frac{\partial \sigma(t)}{\partial \sigma_0} \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le delta de l'option on s'intéresse donc à la quantité :

$$\delta \left(\sigma_{vol}\sigma(t)^{3/2}(X(t)\sqrt{1-\rho^2})^2 \left(\frac{\partial X_t}{\partial x} - \rho \frac{\partial X_t}{\partial \sigma_0} \right) \right).$$

On comprend alors combien il peut être difficile d'évaluer une telle formule par simulations.

Annexe D

Les techniques de Monte-Carlo

Dans cette annexe nous présentons les résultats généraux sur les méthodes de Monte-Carlo. Après un descriptif des techniques de base, nous introduisons les différentes réduction de variance usuelles ainsi que les améliorations classiques dans le cadre des options exotiques traitées dans le corps du rapport.

D.1 Rappel Monte-Carlo

Dans cette partie nous récapitulons brièvement les résultats fondamentaux relatifs aux méthodes de Monte-Carlo. Ces techniques de simulation se basent principalement sur deux grands résultats de probabilité : la loi forte des grands nombres fournit le résultat de convergence ; le théorème centrale limite, plus précis, permet d'évaluer la vitesse de convergence.

Théorème 8 (Loi forte des grands nombres) *Soit une suite de variables aléatoires indépendantes Z_i ; $i \geq 1$ suivant toute la même loi que Z . Alors si $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$ on a pour presque tout ω :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (Z_1(\omega) + Z_2(\omega) + \dots + Z_n(\omega)) \mathbb{E}(Z)$$

Il suffit alors de considérer des trajectoires indépendantes distribuées suivant la même loi que notre processus d'Itô $X : (\tilde{X}_i)_{1 \leq i \leq n}$ partant donc de x . Le principe de base des méthodes de Monte-Carlo consiste alors à considérer l'estimateur convergent $J_{n,f}$ de l'espérance du prix sous la probabilité risque neutre :

$$J_{n,f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e^{-\int_0^T r(s, \tilde{X}_i) ds} f(\tilde{X}_{i,t_1}, \tilde{X}_{i,t_2}, \dots, \tilde{X}_{i,t_m})) \xrightarrow[p.s.]{\quad} P(x)$$

désormais on notera dans ce paragraphe, $h(X) = e^{-\int_0^T r(s, X_s) ds} f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})$ pour alléger les notations

Théorème 9 (Théorème centrale limite) *Soit une suite de variables aléatoires indépendantes Z_i ; $i \geq 1$ suivant toute la même loi que Z . Alors si $\mathbb{E}(Z^2) < \infty$, et en notant var sa variance on a :*

$$\text{Erreur} = \epsilon_n = \frac{1}{n} (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) - \mathbb{E}(Z)$$

$$\sqrt{\frac{n}{var}} \epsilon_n \xrightarrow[loi]{\quad} G$$

où G est une variable aléatoire suivant une loi gaussienne centrée réduite.

Intervalle de confiance A partir de ce résultat, on introduit la méthode classique d'évaluation des erreurs basées sur des intervalles de confiance. L'intervalle $IC(\lambda)$ que l'on souhaite expliciter est centré autour de notre estimateur $J_{n,f}$ et tel que le prix $P(x)$ appartienne à $IC(\lambda)$ avec la probabilité $1 - \lambda$:

$$Q(P(x) \in IC(\lambda)) = 1 - \lambda$$

D'après le théorème centrale limite, on a, lorsque le moment d'ordre 2 de $h(X)$ est fini :

$$\sqrt{(n)}(J_{n,f} - P(x)) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, var(h(X)))$$

Pour n suffisamment grand, on assimile la distribution de l'estimateur $J_{n,f}$ à celle d'une loi $\mathcal{N}(P(x), var(h(X)/n))$. Cette approximation permet d'écrire $IC(\lambda)$ sous la forme :

$$IC(\lambda) = \left[J_{n,f} - \sqrt{\frac{var(h(X))}{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right), J_{n,f} + \sqrt{\frac{var(h(X))}{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale standard. L'approximation réalisée ici induit une première erreur : si les queues de la véritable distribution de notre estimateur sont plus épaisses que celles d'une loi normale, on surestime l'efficacité de notre méthode et vice et versa dans le cas de queues de distribution plus fines. De plus, à ce stade, la variance $h(x)$ est à priori inconnue, mais on peut l'estimer à partir de l'échantillon déjà simulé à l'aide de l'estimateur suivant $V_{n,f}$ de la variance :

$$V_{n,f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n nh(x_i)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n nh(x_i)\right)^2$$

On obtient finalement l'expression suivante de l'intervalle de confiance :

$$IC(\lambda) = \left[J_{n,f} - \sqrt{\frac{V_{n,f}}{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right), J_{n,f} + \sqrt{\frac{V_{n,f}}{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

En plus de l'approximation faite de la variance, il faut noter que généralement les estimateurs $J_{n,f}$ et $V_{n,f}$ sont généralement corrélés ce qui peut encore entraîner des erreurs d'estimations de l'intervalle de confiance.

Si les intervalles de confiance restent des outils de contrôle imparfaits, ils ont le mérite de donner une idée de la précision de la méthode, ce qui n'est pas le cas avec des méthodes d'arbres ou la résolution d'EDP. Notons également que la vitesse de convergence de la méthode dépend à la fois du nombre de simulation mais également de la variance de l'estimateur. En diminuant la variance de l'estimateur, on accélère la convergence. Cette idée est à l'origine de méthodes de réduction de variance utilisées dans le cadre de simulations de Monte-Carlo. Les quatre principales méthodes sont celles des variables de contrôle, des variables antithétiques, de la stratification et de l'échantillonnage pondéré.

D.2 Méthodes classiques de réduction de variance.

Nous venons de voir que la vitesse de convergence de la méthode Monte-Carlo est de l'ordre de σ/\sqrt{n} . Pour améliorer cette méthode il existe de nombreuses techniques, dites de réduction de variance, qui cherchent à diminuer la valeur de σ^2 . L'idée générale est de donner une autre représentation sous forme d'espérance de la quantité à calculer :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y],$$

en cherchant à diminuer la variance. Nous allons passer en revue quelques unes de ces méthodes qui sont applicables dans pratiquement tous les cas de simulations.

Échantillonnage préférentiel ou fonction d'importance Supposons que l'on cherche à calculer :

$$\mathbb{E}[g(X)]$$

et que la loi de X soit $f(x)dx$. La quantité que l'on cherche à évaluer vaut donc :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx.$$

Soit maintenant, \tilde{f} la densité d'une autre loi telle que $\tilde{f} > 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)dx = 1$, il est clair que $\mathbb{E}[g(X)]$ peut aussi s'écrire :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} \tilde{f}(x)dx.$$

Cela signifie que $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[\frac{g(Y)f(Y)}{\tilde{f}(Y)}]$, si Y suit la loi $\tilde{f}(x)dx$ sous \mathbb{P} . On a donc une autre méthode de calcul de $\mathbb{E}[g(X)]$ en utilisant n tirages de Y, Y_1, \dots, Y_n et en approximant $\mathbb{E}[g(X)]$ par :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{g(Y_1)f(Y_1)}{\tilde{f}(Y_1)} + \dots + \frac{g(Y_n)f(Y_n)}{\tilde{f}(Y_n)} \right).$$

Si l'on pose $Z = g(Y)f(Y)/\tilde{f}(Y)$, on aura amélioré l'algorithme si $\text{Var}(Z) < \text{Var}(g(X))$. Or il est facile de calculer la variance de Z :

$$\text{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}(x)} dx - \mathbb{E}[g(X)]^2.$$

Si $g(x) > 0$, on peut vérifier que, en prenant $\tilde{f}(x) = (g(x)f(x))/(\mathbb{E}[g(X)])$ on annule $\text{Var}(Z)$! Il ne faut pas trop donné d'importance à ce résultat car il repose sur le fait que l'on connaît $\mathbb{E}[g(X)]$, et c'est justement ce que l'on cherche à calculer.

Cela permet cependant de justifier l'heuristique suivante : prendre $\tilde{f}(x)$ aussi proche que possible de $|g(x)f(x)|$ puis la normaliser de façon à obtenir une densité dont la loi est facilement simulable. Évidemment les contraintes que l'on s'impose sont largement contradictoires et rendent cet exercice souvent délicat.

Variation de contrôle Dans sa version la plus simple, il s'agit d'écrire $\mathbb{E}[f(X)]$ sous la forme :

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(X) - h(X)] + \mathbb{E}[h(X)],$$

avec $\mathbb{E}[h(X)]$ qui peut se calculer facilement et $\text{Var}(f(X) - h(X))$ sensiblement plus petit que $\text{Var}(f(X))$. On utilise alors une méthode de Monte-Carlo pour évaluer $\mathbb{E}[f(X) - h(X)]$ et le calcul direct pour $\mathbb{E}[h(X)]$.

Variation antithétiques Supposons que l'on cherche à calculer le prix d'une option sur un sous-jacent vérifiant une diffusion à la Black-Scholes :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

On définit alors une variable anticorrélée S'_t :

$$\frac{dS'_t}{S'_t} = rdt - \sigma dW_t$$

W_t étant un mouvement brownien sous \mathbb{P} , $-W_t$ en est aussi un et donc S'_t et S_t sont deux estimateurs du cours de notre sous-jacent, tout comme $\frac{1}{2}(S'_t + S_t)$. Si on note P et P' les prix de l'option correspondant respectivement à S'_t et S_t , alors comme P et P' ont même variance, la variance de notre estimateur du prix de l'option est :

$$\text{Var}\left(\frac{1}{2}(P'_t + P_t)\right) = \text{Var}\left(\frac{1}{2}(P_t)\right) + \text{Cov}(P, P')$$

Or par construction, P et P' sont anticorrélés, donc $\text{Cov}(P, P') \leq 0$ et nous avons divisé par plus de deux la variance. Ce nouvel estimateur est donc plus précis mais il nécessite plus de temps de simulations et augmente donc son coût en calculs. Il s'agit ici de réaliser un arbitrage entre précision et temps de calcul.

Annexe E

Quelques options exotiques

Dans cette partie, nous reprenons la méthodologie détaillée dans la partie précédente pour l'adapter aux cas d'options dont le payoff ne s'exprime pas comme une fonction du sous-jacent à des dates discrètes. Dans ce cadre des modifications sont nécessaires pour aménager cette méthode des calculs de sensibilités. Nous avons choisi des options très répandues : les options asiatiques et les options barrières.

Les premières présentent un intérêt particulier car il n'existe pas de formules fermées pour les évaluer. Nous proposons une étude comparative des méthodes numériques les plus couramment utilisées pour valoriser les options : équations aux dérivées partielles, méthodes d'arbres et enfin Monte-Carlo. Le but est de voir à quel point la méthode proposée permet des applications numériques utilisables en salle de marché. Dans un second temps, on s'intéresse aux cas des options barrières très couramment utilisées. Les premiers arguments de comparaison donnés dans la section précédente permettent d'espérer des résultats intéressants : dans le cadre de payoff discontinu, Malliavin obtient des résultats plus probants. Les barrières rentrent pleinement dans ce cadre.

E.1 Les options asiatiques

Nous allons d'abord présenter les aménagements nécessaires pour prolonger notre méthode aux cas des asiatiques. Ensuite, on expose les différentes méthodes d'évaluation de ces options (on pourra consulter) et fournissons une étude comparative de leur performance avec d'autres méthodes numériques classiques.

Une option asiatique est le nom générique d'une classe d'options dont le pay-off dépend de la moyenne sur une période donnée de l'actif risqué. Le sous-jacent peut-être de nouveau multi dimensionnel et vérifie encore sous la probabilité risque-neutre :

$$dX_t = \sigma(t, X_s)dW_s + b(t, X_s)dt \text{ et } X_0 = x$$

Le prix aujourd'hui d'une option asiatique de maturité T (on ne considère que le cas européen c'est à dire lorsque l'exercice ne peut se faire qu'à la maturité de l'option) est donné sous la probabilité risque-neutre par :

$$P(x) = e^{-rT} E_x^Q[f(X_T, A_T)]$$

où

$$A_T = \frac{1}{T} \int_0^T X_u du.$$

La fonction payoff peut valoir par exemple :

- pour un call à strike fixe : $f(s, a) = g(a) = (a - K)_+$
- pour un put à strike fixe : $f(s, a) = g(a) = (K - a)_+$
- pour un call à strike flottant : $f(s, a) = (a - s)_+$
- pour un put à strike flottant : $f(s, a) = (s - a)_+$

E.1.1 Caractérisation des poids

Dans un premier temps, nous allons nous limiter au cas des payoff ne dépendant que de la moyenne $f(s, a) = g(a)$. En effet comme dans le cas d'un taux d'intérêt stochastique de la section 2, le fait d'inclure un payoff dépendant explicitement de X rajoute une condition supplémentaire dont la difficulté est purement calculatoire. Énonçons, le théorème caractérisant le poids pour des options asiatiques.

Théorème 10 (Formule de Malliavin pour le delta d'options asiatiques) *Dans le cas des options asiatiques, en plus de la condition de non explosion, la fonction engendrant le poids pour le delta doit également vérifier :*

pour un payoff de la forme ne faisant qu'intervenir la moyenne¹ $A(T)$:

$$E_x^Q \left[\int_0^T Y_t \left(\int_0^t \frac{\sigma(s, X_s)}{Y_s} w_s ds \right) dt \middle| A_T, X_t \right] = E_x^Q \left[\int_0^T Y_t dt \middle| A_T, X_t \right]$$

pour un payoff dépendant et de $A(T)$ et de $X(T)$, la condition supplémentaire suivante est nécessaire :

$$E_x^Q \left[\int_0^T Y_t \int_0^T \frac{\sigma(s, X_s)}{Y_s} w_s ds \middle| A_T, X_t \right] = E_x^Q \left[Y_T \middle| A_T, X_t \right]$$

Preuve. La preuve est complètement analogue à celle exposée dans le cadre des options dont le payoff dépend de la valeur du sous-jacent à des dates fixées. Ainsi, on peut se limiter à une preuve pour des payoffs C^∞ et à support compact. Cette restriction donne un sens à la permutation des opérateurs espérances et dérivation. A ce stade, la fonction générant le poids w doit satisfaire pour les fonction $f \in C^\infty$ à support compact

$$\Delta = E \left[\frac{\partial f(A_T)}{\partial x} \right] = E \left[f(A_T) \delta(w) \right]$$

De nouveau nous allons identifier après développement les deux membres de cette égalité Notons que la dérivée au sens de Malliavin de la variable aléatoire $A(t)$ s'exprime aisément en fonction de celle de $X(t)$ car on peut permuter l'opérateur dérivation et intégration :

$$D_s A(t) = \int_0^T D_s X_t dt = \int_0^T Y_t Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) \mathbf{1}_{s \leq t} dt$$

En appliquant au terme de droite la formule d'intégration par parties :

$$E \left[f(A_T) \delta(w) \right] = E \left[\int_0^T D_s A_t w_s ds \times f'(A_T) \delta(w) \right]$$

Alors que pour le terme de droite on obtient simplement :

$$E \left[\frac{\partial f(A_T)}{\partial x} \right] = E \left[f'(A_T) \int_0^T Y_t dt \right]$$

Alors en identifiant ces deux expressions, on en déduit la condition nécessaire sur les espérances conditionnelles du théorème. ■

E.1.2 Valorisation d'options asiatiques par les techniques de Monte-Carlo

On se place dans le cadre du modèle de Black et Scholes usuel. Pour une synthèse quasi exhaustive des méthodes de valorisation par des techniques de Monte-Carlo d'options asiatiques, nous suggérons la lecture de l'article [?].

On découpe l'intervalle $[0, T]$ en N morceaux et on définit les instants $t_k = kh$ avec $h = \frac{T}{N}$. On doit simuler le terme $A_T = \int_0^T X_u du$, du approximant l'intégrale. Pour cela, trois schémas sont proposés par les auteurs.

¹de type strike fixe

Le schéma standard A l'aide de sommes de Riemann on approche A_T par

$$A_T^{r,N} = h \sum_{k=0}^{N-1} X_{t_k}.$$

Deux schémas plus complexes Le deuxième schéma résulte d'un développement limité à l'ordre 1 en h à partir d'une sorte de méthode des trapèzes. Il donne :

$$A_T^{e,N} = h \sum_{k=0}^{N-1} X_{t_k} \left(1 + \frac{rh}{2} + \sigma \frac{W_{t_{k+1}} - W_{t_k}}{2} \right).$$

Le dernier schéma est similaire mais fait intervenir une intégrale stochastique :

$$A_T^{p,N} = h \sum_{k=0}^{N-1} X_{t_k} \left(1 + \frac{rh}{2} + \frac{\sigma}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_u - W_{t_k}) du \right).$$

Pour l'approximation de l'intégrale stochastique, nous avons découpé l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ en m morceaux de même longueur suivant

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} W_u du = \sum_{g=0}^{m-1} \int_{t_k + \frac{g}{m}}^{t_k + \frac{g+1}{m}} W_u du.$$

Puis nous avons utilisé la loi conditionnelle de W_u pour simuler les trajectoires.

Pour chacun des 3 schémas, on approximerait le prix d'une option (par exemple un put à strike fixe) par

$$\frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left(K - \frac{A_T^N}{T} \right)^+$$

où M est le nombre de trajectoires simulées.

Remarquons qu'il est possible de calculer un prix de put asiatique puis de récupérer le prix du call correspondant à l'aide de la formule de parité² :

$$Call(K, T, r) - Put(K, T, r) = \frac{1 - e^{rT}}{rT} - Ke^{rT}.$$

Réduction de variance

On approche $\frac{1}{T} \int_0^T S_u du$ par $\exp(\frac{1}{T} \int_0^T \log S_u du)$. On définit alors la variable de contrôle suivante :

$$Z = e^{-rT} \left(x \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \int_0^T W_u du \right) - K \right)^+.$$

En adaptant chaque variable de contrôle aux schémas précédents, on obtient :

$$\begin{aligned} Z_T^{r,N} &= e^{-rT} \left(x \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^{N-1} h W_{t_k} \right) - K \right)^+ \\ Z_T^{r,N} &= e^{-rT} \left(x \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h}{2} (W_{t_k} + W_{t_{k+1}}) \right) - K \right)^+ \\ Z_T^{r,N} &= e^{-rT} \left(x \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_u du \right) - K \right)^+ \end{aligned}$$

²exemple pour un strike fixe

E.2 EDP et arbres appliqués aux options asiatiques

E.2.1 Une méthode aux différences finies

On utilise la méthode proposée par Rogers et Shi. Il s'agit de résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles :

$$f_1 + \mathcal{L}f = 0$$

avec $\mathcal{L}f(t, x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{22}(t, x) - (\frac{1}{T} + rx)f_2(t, x)$ pour $t \in [0, T]$.

Dans le cas d'un strike fixe, la variable x , qui résulte d'un astucieux changement de variables, s'exprime par :

$$x_t = \frac{K - \frac{1}{T} \int_0^t S_u du}{S_t},$$

la condition limite s'écrit $f(T, x) = x^-$ et le prix vaut $S_0 f(0, K S_0^{-1})$.

Pour un strike flottant, la variable x s'exprime par :

$$x_t = \frac{S_T - \frac{1}{T} \int_0^t S_u du}{S_t}$$

la condition limite s'écrit $f(T, x) = (1 + x)^-$ et le prix vaut $S_0 f(0, 0)$.

Par ailleurs, nous avons choisi de travailler avec des conditions du type Dirichlet. Ce qui fait que $f(t, -l) = f(t, l) = 0$ lorsque que $x \in [-l, l]$. Enfin, nous avons choisi de travailler avec un schéma de Crank et Nicholson.

Pour résoudre numériquement cette équation aux dérivées partielles, nous avons utilisé la méthode des différences finies avec des conditions aux limites du type Dirichlet. Une fois le θ -schéma obtenu, nous nous sommes rendu compte que seul un schéma totalement implicite apportait une réelle stabilité dans la convergence. Par ailleurs, il fut aisé de passer du cas fixe au cas flottant car l'EDP à résoudre est la même; seules les conditions à la maturité et l'expression du prix changent. En ce qui concerne les pas, nous sommes "montés" jusqu'à 10000 pas temporels et spatiaux, au prix d'un temps de calcul assez élevé sur des machines pas très puissantes.

E.2.2 La méthode d'interpolation de Hull et White

Dans l'article *Efficient procedures for valuing european and american path-dependent options*, John Hull et Alan White généralisent la méthode par arbre de Cox-Ross-Rubinstein pour le calcul d'options dont le flux terminale dépend de toute la trajectoire du sous-jacent comme c'est le cas pour les options asiatiques (i.e options sur moyenne). La principale difficulté de l'utilisation d'une méthode par arbre est, qu'à un nœud donné, le nombre de valeurs réalisables par la variable aléatoire, moyenne du sous-jacent depuis l'instant initial, est exponentiel. Pour résoudre ce problème, Hull et White proposent de ne calculer la valeur de l'option à un nœud donné de l'arbre que pour certaines valeurs prédéterminées de la moyenne et d'estimer le reste par interpolation.

Notations et principes de bases de la démarche par arbre

Posons

- S_t : la valeur du sous-jacent à l'instant t .
- $F_t(S)$: la moyenne du sous-jacent S sur l'intervalle $[0, t]$.
- $V_t(S, F)$: la valeur de l'option asiatique de sous-jacent S à l'instant.
- r : le taux sans risque.

Nous faisons les hypothèses habituelles d'absence d'opportunité d'arbitrage et de complétude du marché, ce qui nous assure l'existence et l'unicité d'une probabilité sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.

Cox, Ross et Rubinstein représentent la dynamique du brownien géométrique S par un arbre binomial en divisant uniformément l'intervalle de temps $[0, T]$ (le pas de la subdivision est donc de $\frac{T}{n}$). Entre les instants $t_i = i\frac{T}{n}$ et $t_{i+1} = t_i + \frac{T}{n}$, la valeur du sous-jacent augmente de $u = \exp(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}})$ avec une probabilité p et diminue de $d = \frac{1}{u}$ avec une probabilité $1 - p$.

Pour que la valeur actualisé du sous-jacent ait un comportement martingale, il faut nécessairement prendre

$$p = \frac{a - d}{u - d}$$

avec

$$a = \exp\left(\mu \frac{T}{n}\right)$$

On notera (i, j) le nœud de l'arbre binomial qui correspond à l'événement : à l'instant t_i la valeur de S a augmenté j fois et donc diminué $i - j$ fois depuis l'instant initial. Ainsi la valeur du sous-jacent au nœud (i, j) est $S_0 u^j d^{i-j}$.

Il s'agit maintenant d'expliquer comment nous allons évaluer la valeur de l'option asiatique à chacun des nœuds (i, j) . Soit $F_{i,j,k}$ la k ième réalisation de la moyenne arithmétique des valeurs passées du sous-jacent, et soit $V_{i,j,k}$ la valeur de l'option asiatique correspondante à cette k ième réalisation. La configuration (i, j, k) conduit à une configuration $(i + 1, j + 1, k_u)$ lorsque le cours de l'actif monte et à une configuration $(i + 1, j, k_d)$ lorsque le cours de l'actif descend. La valeur actualisée du portefeuille répliquant l'option asiatique étant une martingale sous la probabilité risque-neutre, on a

$$V_{i,j,k} = \exp\left(-r \frac{T}{n}\right) (p V_{i+1,j+1,k_u} + (1-p) V_{i+1,j,k_d})$$

Cette formule récursive de type backward permet d'évaluer le prix de l'option.

Évaluation de l'option asiatique par interpolation

Si nous devons prendre en compte toutes les valeurs réalisables par la moyenne arithmétique des valeurs passées de S , la complexité temporelle de l'algorithme serait exponentielle : car en général pour un nœud de l'arbre situé à une profondeur i il y a 2^i moyennes de prix à considérer ! Pour résoudre ce problème, Hull et White proposent de ne calculer les valeurs de l'option asiatique au nœud (i, j) que pour les valeurs de la moyenne arithmétique de la forme

$$F_{i,j,k} = S_0 \exp(m_k h)$$

où m_k est un entier positif ou négatif et où h est un paramètre que l'on choisit.

Il est évident que les entiers m_k doivent balayer un intervalle $[m_{min}, m_{max}]$ tel que les réalisations potentielles de la moyenne arithmétique au nœud (i, j) soient toutes incluses dans l'intervalle $[S_0 \exp(m_{min} h), S_0 \exp(m_{max} h)]$.

Les bornes choisies sont données par les formules de récurrence :

$$m_{max}(i) = E\left(\ln\left(\frac{i \exp(m_{max}(i)) + u^i}{(i+1)h}\right)\right) + 1$$

$$m_{min}(i) = E\left(\ln\left(\frac{i \exp(m_{min}(i)) + d^i}{(i+1)h}\right)\right)$$

Une fois ces bornes déterminées, il nous faut alors calculer les prix de l'option au nœud (i, j) associés aux réalisations des $S_0 \exp(m_k h)$. Il suffit d'utiliser la relation d'AOA précédente reliant $V_{i,j,k}$, $V_{i+1,j+1,k_u}$ et V_{i+1,j,k_d} . On détermine $V_{i+1,j+1,k_u}$ par interpolation linéaire entre $V_{i+1,j+1,k_1}$ et $V_{i+1,j+1,k_2}$ où k_1 et k_2 sont choisis tels que $F_{i+1,j+1,k_1}$ et $F_{i+1,j+1,k_2}$ soient les valeurs encadrantes les plus proches de $F_{i+1,j+1,k_u}$ de la forme $S_0 \exp(mh)$. On fait pareil pour le calcul de $V_{i+1,j+1,k_u}$.

E.3 Les options barrières et lookback

Nous avons choisi ce type d'option pour deux raisons. D'une part, le payoff d'une option barrière est plus complexe que ceux envisagés dans la partie précédente. Il ne s'expriment pas en fonction de la valeur du sous-jacent à certaines dates pré-fixées mais de son maximum et ou de son minimum sur la durée de vie de l'option. Un travail d'aménagement intéressant est nécessaire pour étendre les résultats sur les grecques. Pour ce faire, on reprend la méthodologie de l'article de E. Gobet et A. Kohatsu-Higa [GKH01]. D'autre part, les premiers arguments de comparaison donnés dans

la section précédente permettent d'espérer des résultats intéressants : dans le cadre de payoff discontinu, Malliavin obtient des résultats plus probants. Dans un premier temps, nous exposons les difficultés techniques et leurs solutions pour déterminer de nouveau poids. Ensuite nous comparons ensuite de nouveau cette méthode et les différences finies et fournissons quelques critiques des résultats obtenus.

E.3.1 Préliminaires sur les options barrières

Dans ce cadre on se limitera aux cas unidimensionnel Black-Scholes. La dynamique de notre sous-jacent vérifie donc sous la probabilité risque neutre :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t \text{ et } S(0) = s$$

Nous nous concentrons donc sur des payoffs faisant intervenir le maximum ou le minimum de la diffusion en notant $M_t = \max_{s \leq t} S_s$ et $m_t = \min_{s \leq t} S_s$

$$f(M_T, m_T, S_T)$$

Une option barrière *knock-out* est une option européenne qui s'annule lorsque l'actif sous-jacent dépasse une ou deux barrières, déterministes, éventuellement dépendantes du temps. Supposons que l'actif S suive un modèle de Black-Scholes :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \\ S_0 = x \end{cases}$$

Les barrières sont deux fonctions réelles \tilde{L} (inférieure) et \tilde{U} (supérieure) : $[0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, vérifiant $\tilde{L}(t) < \tilde{U}(t)$ pour tout t .

On appelle Σ le temps de passage du prix S par l'une des barrières :

$$\Sigma = \inf \left(t > 0 \mid S_t \leq \tilde{L}(t) \text{ ou } S_t \geq \tilde{U}(t) \right)$$

Le prix d'une option *knock-out* est alors :

$$\mathbb{E} \left[e^{-rT} (S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\Sigma > T} \right]$$

où \mathbb{E} désigne la probabilité risque neutre.

Pour calculer ce prix, il faut donc connaître la loi de la diffusion S tuée au temps Σ . Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, on utiliserait typiquement la diffusion $\log S_t$, laquelle n'est, sous la probabilité risque neutre, qu'un Brownien avec drift :

$$\log S_t = \log x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t$$

où r est le taux d'intérêt instantané supposé constant.

En fixant un pas de simulation ε , on peut simuler successivement les positions $\log S_{t_i}$ aux temps $t_i = i\varepsilon$. La procédure naïve consiste à déclarer la diffusion tuée s'il existe une valeur t_i pour laquelle la valeur $\log S_{t_i}$ se trouve en-dessous de $L(t_i) = \log \tilde{L}(t_i)$ ou au-dessus de $U(t_i) = \log \tilde{U}(t_i)$.

On se rend compte immédiatement que cette procédure ne contrôle pas la trajectoire entre deux instants successifs de la grille t_1, t_2, \dots : la trajectoire aurait pu traverser l'une des barrières et revenir, sans que ce fait puisse être détecté. Cette erreur produit *systématiquement* une surestimation du prix, par le biais d'une surestimation de la valeur du temps Σ et donc de la probabilité de l'événement $\{\Sigma > T\}$. L'estimateur fourni par la simulation est biaisé. Dans la pratique, on constate que même en réduisant le pas ε , l'erreur persiste.

À noter par ailleurs la notion d'option *knock-in*, duale de l'option *knock-out* présentée ci-dessus, dont le payoff est donné par :

$$\mathbb{E} \left[e^{-rT} (S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\Sigma < T} \right]$$

Une option barrière *knock-in* est donc activée si le sous-jacent atteint une des barrières. Si le sous-jacent reste confiné entre les barrières, l'option est toujours nulle.

La somme du prix d'une option *knock-in* et de celui d'une option *knock-out* est bien entendu égal à celui d'un call classique.

La procédure Pour affiner les résultats des simulations, on propose une procédure améliorée. Si on a trouvé au cours de la simulation comme valeurs successives pour $\log S_{t_i}$:

$$\log S_{t_i} = x \quad \log S_{t_{i+1}} = y$$

on calcule la probabilité p (dépendante de x , y et des barrières L , U) que le brownien avec drift ($\log S$) dépasse l'une des barrières.

La diffusion est supposée avoir franchi les barrières avec la probabilité p , alors qu'on continue la simulation avec la probabilité $1 - p$. Il est clair que si l'on dispose de la valeur exacte de cette probabilité, la valeur obtenue fournit un estimateur non biaisé du prix de l'option. Dans certains cas particuliers, il est possible d'accéder à p . Le cas simple de la diffusion Black-Scholes, dans le cas d'une seule barrière haute constante, avec le conditionnement de pont brownien en (x, y) conduit à l'expression explicite de p :

$$p = \exp \frac{2}{\sigma^2 \varepsilon} (b - x)(b - y)$$

Dans le cas général, dans la mesure où il est possible d'accéder à la valeur de cette probabilité p_i , nous distinguerons par la suite deux approches dans le calcul de l'option barrière : la méthode de Baldi et celle de Gobet.

Méthode de Baldi On procède comme suit :

- à l'étape $i + 1$, on vérifie que le sous-jacent n'est pas hors-barrières en t_{i+1} (dans le cas contraire l'option est tuée) ;
- on compare p calculée à l'étape $i + 1$ à un tirage aléatoire d'une loi uniforme. Ceci décide si le sous-jacent est passé hors-barrière dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ ou pas.

Méthode de Gobet Dans cette approche, on procède comme suit :

- on vérifie que le sous-jacent n'est pas hors-barrières en chaque point t_i (sinon l'option est tuée) ;
- dans l'hypothèse où le spot est resté à l'intérieur des barrières entre 0 et T , le prix de l'option au final est donné par :

$$P_{Call} \cdot \prod_{i=1}^N (1 - p_i^\varepsilon)$$

On constate que la méthode de Baldi présente plus d'occurrences pour lesquelles l'option est tuée que pour celle de Gobet. Néanmoins, le prix de l'option pour la méthode de Gobet est plus faible puisque pondéré par le produit de termes de type $(1 - p_i)$. Le lien est cependant clair, si on constate que la probabilité d'une loi uniforme $[0, 1]$ d'être au-delà de p est $(1 - p)$.

Le problème fondamental pour le calcul du prix de l'option barrière consistera donc, compte tenu de ces deux méthodes, en la détermination de cette probabilité p . La partie suivante va s'attacher, par la méthode des grandes déviations, à donner explicitement une approximation de la probabilité p en question.

Approximation On supposera que $t_i = 0$. Le processus $X_t = \log S_t$ est de fait un pont brownien, conditionné selon :

$$\{X_0 = x \text{ et } X_\varepsilon = y\}$$

En terme de loi, il est identique au processus suivant :

$$Y_s^0 = x + \frac{s}{\varepsilon} (y - x) + \sigma \left(B_s - \frac{s}{\varepsilon} B_\varepsilon \right) \quad 0 \leq s \leq \varepsilon$$

Par changement homothétique de temps, il vient :

$$Y_{\varepsilon t}^0 = x + t(y - x) + \sqrt{\varepsilon}\sigma (B_t - tB_1) \quad 0 \leq t \leq 1$$

Une telle écriture permet de voir Y^ε comme un processus de diffusion - à noter cependant que le coefficient de diffusion est pondéré par un petit paramètre ε ; également et par ailleurs, Y^ε est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} dY^\varepsilon(t) &= -\frac{Y^\varepsilon - y}{1-t} dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma dB_t \\ Y^\varepsilon(0) &= x \end{aligned}$$

et ce, pour $t < 1$.

La probabilité p^ε que $\log(S_t)$ dépasse l'une des barrières L_t ou U_t , conditionnellement à $\log(S_{t_i}) = x$ et $\log(S_{t_{i+1}}) = y$ pendant l'intervalle de temps $[0, \varepsilon]$ est égale à la probabilité que Y^ε dépasse les barrières pondérées $L_{\varepsilon t}$ ou $U_{\varepsilon t}$. Ce cadre d'étude est celui des grandes déviations; cette théorie donne l'expression de cette probabilité selon :

$$\log p^\varepsilon \simeq \frac{-I}{\varepsilon}$$

où I désigne l'infimum de la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} J : \mathcal{C}_{x,y} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\rightarrow \int_0^1 |\dot{\gamma}_s|^2 ds - \frac{1}{2} |\gamma_1 - \gamma_0|^2 \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}_{x,y}$ est donné par :

$$\mathcal{C}_{x,y} = \{\gamma_s \mid \gamma_0 = x \text{ et } \gamma_1 = y\} \cap \{\gamma_s \mid \forall s, L(t_i) \leq \gamma_s \leq U(t_i)\}$$

La recherche de l'infimum de cette fonctionnelle J relève d'un calcul variationnel classique et fournit, *in fine* :

$$I = \begin{cases} 0 & \text{si } y > U(t_i) \text{ ou } y < L(t_i) \\ K[U(t_i)] & \text{si } x + y < L(t_i) + U(t_i) \\ K[L(t_i)] & \text{si } x + y > L(t_i) + U(t_i) \end{cases}$$

avec :

$$K(z) = \frac{2}{\sigma^2} (x - z)(y - z)$$

En revenant à la probabilité qui nous intéresse, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, il vient :

$$p^\varepsilon = f(\varepsilon) \cdot e^{-I/\varepsilon}$$

L'étude de la fonction f ainsi définie relève, quant à elle, de la théorie des grandes variations précises; ce calcul, assez technique a été effectué récemment, notamment par Baldi (1995). Finalement :

$$f(\varepsilon) \rightarrow e^{-\omega}$$

avec :

$$\omega = \begin{cases} 2/\sigma^2 \cdot (U(t_i) - x) U'(t_i) & \text{si } x + y > L(t_i) + U(t_i) \\ 2/\sigma^2 \cdot (x - L(t_i)) L'(t_i) & \text{si } x + y < L(t_i) + U(t_i) \end{cases}$$

En conclusion, la procédure itérative s'effectuera, une fois les valeurs extrêmes $x = \log S_{t_i}$ et $y = \log S_{t_{i+1}}$ connues, selon :

$$p^\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } y > U(t_i) \text{ ou } y < L(t_i) \\ e^{-I/\varepsilon} e^{-\omega} & \text{si } L(t_i) < y < U(t_i) \end{cases}$$

La probabilité que la diffusion ait touché les barrières est alors p^ε .

E.3.2 Les aménagements nécessaires pour la méthode

La méthodologie appliquée dans le cas précédent a bien fonctionné car on a pu exprimer la dérivée du payoff en fonction de la dérivée au sens de Malliavin du processus sous-jacent (Ce qui nécessitait l'inversion de cette dérivée). Ensuite en utilisant la formule d'intégration par partie, on obtenait bien un poids indépendant du payoff. Ici le problème est double :

- d'une part les expressions des dérivées au sens de Malliavin des processus maximum et minimum d'une diffusion générale ne sont pas explicites et on doit donc se ramener à des browniens classiques, éventuellement avec drift, pour obtenir des dérivées au sens de Malliavin utilisables.
- d'autre part, Ces dérivées au sens de Malliavin ne sont pas inversibles directement, il faut donc utiliser une procédure de localisation faisant intervenir un processus dit dominant pour pouvoir conclure.

Nous traitons respectivement ces difficultés dans les deux parties suivantes.

E.3.3 Passage de la diffusion à un brownien avec drift

Pour se ramener à un brownien avec drift à partir de notre diffusion, on effectue le changement de variable classique :

$$\tilde{X} = \frac{\log(X_t)}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \left(\log(x) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \right) + W_t$$

Pour un processus U quelconque tel que pour tout t $U_t \in \mathbb{D}^{1,2}$, les variables aléatoires $\max_{s \leq t}(U_s)$ et $\min_{s \leq t}(U_s)$ appartiennent également à $\mathbb{D}^{1,2}$. La proposition suivante explicite ce résultat quand U est un brownien classique avec ou sans drift.

Proposition 20 (Dérivée au sens de Malliavin d'un extremum) *Soit V un mouvement brownien standard et considérons $V_t^f = V_t + \int_0^t f(s)ds$, où f est une fonction déterministe. Alors, les variables aléatoires définies par $\max_{s \leq t}(V_s^f)$ et $\min_{s \leq t}(V_s^f)$ appartient à $\mathbb{D}^{1,\infty}$ et leurs dérivées de Malliavin au premier ordre sont données par : pour $t \in [0, T]$*

$$D_t(\max_{s \leq t}(V_s^f)) = \mathbf{1}_{t \leq \tau^M}$$

$$D_t(\min_{s \leq t}(V_s^f)) = \mathbf{1}_{t \leq \tau^m}$$

où τ^M et τ^m sont les temps aléatoires p.s définis uniquement sur $[0, T]$ par $V_{\tau^M}^f = \max_{s \leq t}(V_s)$ et $V_{\tau^m}^f = \min_{s \leq t}(V_s)$

Comme les processus aléatoires $\mathbf{1}_{t \leq \tau^M}$ et $\mathbf{1}_{t \leq \tau^m}$ paraissent difficilement inversibles, une intégration par partie classique n'est pas tout de suite applicable pour exprimer la dérivée du payoff ne fonction de celle-ci. Néanmoins grâce à une procédure de localisation utilisant des processus dominants nous arriverons à nous servir de la formule d'intégration par partie.

Théorème 11 *Supposons les hypothèses (S) et (H) vérifiées alors :*

i) *Si le processus K vérifie **R(1)**, alors*

$$\Delta = e^{-rt} \mathbb{E}^P(f(M_T, m_T, X_T)H_1)$$

$$\text{où } H_1 = \delta \left(\frac{\psi Y}{\int_0^T \psi(Y_t) dt} \right)$$

ii) *Si K vérifie la condition **R(2)**, alors*

$$\Gamma = e^{-rt} \mathbb{E}^P(f(M_T, m_T, X_T)H_2)$$

$$\text{où } H_2 = \delta \left(\frac{H_1 \psi Y}{\int_0^T \psi(Y_t) dt} \right)$$

E.3.4 Deux exemples de processus dominants

On se contente d'exhiber deux processus dominants, et nous soulignons dans quel mesure ils vérifient les hypothèses du théorème précédent. Pour une preuve des vérifications, le lecteur pourra se référer à l'article de E. Gobet et A. Kohatsu-Higa [GKH01].

Le plus simple est probablement le processus des extrema suivant :

$$K_t = \max[s \leq t](X_s - x) - \min(X_s)$$

De façon immédiate, ce processus est croissant adapté et continu. Ils vérifient également les hypothèses **(H)** et **(R(1))**. On peut donc calculer le delta à l'aide de ce processus. Sa dérivée au sens de Malliavin résulte immédiatement de la proposition sur les extrema et vaut donc :

$$D_s K_t = (1)$$

Cependant, il ne satisfait pas la condition **(R(2))** par manque de régularité. Il faut donc un candidat plus régulier pour pouvoir calculer le gamma.

On peut également considérer le processus suivant. Pour un entier pair noté γ , on définit :

$$K_t = 8 \left(4 \int_0^t \int_0^t \frac{|X_s - X_u|^\gamma}{|s - u|^{m+2}} ds du \right)^{1/\gamma} \frac{m+2}{m} t^{m/\gamma}$$

Où $0 < m < \frac{\gamma}{2} - 2$, pour assurer la condition d'existence du processus, $\mathbb{E} = \int_0^t \int_0^t \frac{|X_s - X_u|^\gamma}{|s - u|^{m+2}} ds du < \infty$. Ce processus est clairement croissant, adapté et continu. De plus comme il vérifie la condition **(R(2))**, il permet le calcul du gamma.

Annexe F

Résultats numériques dans le cas multi dimensionnel

On reprend ici le calcul des sensibilités présentées dans le chapitre 3 dans le cas d'une option WorstOf sur trois sous-jacents. Nous commençons par décrire une nouvelle grecque appelée *Kappa*.

F.1 Calcul du Kappa

Proposition 21 *La dérivée de l'option par rapport au facteur de Cholesky U est donnée par $\text{vec}(\Upsilon)^\top$ avec :*

$$\Upsilon = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\rho^{-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^\top}{t_i - t_{i-1}} - I_n \right) (U^{-1})^\top \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \right]$$

Preuve. Le Kappa est une création originale du GRO¹ pour désigner la dérivée par rapport à la corrélation ρ . En fait, on ne calcule pas d'emblée cette grecque mais d'abord la dérivée par rapport au facteur de Cholesky (le Kappa s'en déduira par composition).

Pour cela, on remplace dans l'EDS 3.1 le facteur de Cholesky U par $U\lambda Q$ et on dérive en $\lambda = 0$. On a donc ici $L_t := (\sigma \odot Q)Z_t$. On introduit le processus

$$v(t) := U^{-1}Q \sum_{i=1}^m \frac{Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}} \mathbf{1}_{t \in]t_{i-1}, t_i]}.$$

Le calcul de $\delta(v)$ est identique à celui mené pour le Vega. On obtiens alors, grâce à la proposition 10, pour la dérivée au point Q

$$\Upsilon(Q) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^\top (QU^{-1})^\top \rho^{-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}{t_i - t_{i-1}} \text{Tr}(U^{-1}Q) \right) \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \right].$$

Ensuite on fait successivement $Q := e_{i,j}$ de sorte qu'on a pour la différentielle

$$\Upsilon = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\rho^{-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^\top}{t_i - t_{i-1}} - I_n \right) (U^{-1})^\top \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \right].$$

■

¹Groupe de Recherche Opérationnelle du Crédit Lyonnais.

F.2 Résultats numériques

Nous avons pris un strike nul pour nos simulations ainsi qu'une maturité de 6 mois. Les sous-jacents ont un nominal de 100 et possèdent les mêmes caractéristiques. Le taux d'intérêt sans risque a été fixé à 5%. Nous avons ensuite voulu faire varier le nombre de simulation pour savoir dans quelles mesures pouvons-nous obtenir des estimations acceptables.

prix	88.745787		
rho	-41.512669		
theta	11.679774		
delta	0.70539543 0.68015183 1.2191756		
vega	-15.549425 -11.881378 -19.760958		
gamma	-0.062458129	0.035038655	0.065692319
	0.035038655	-0.19704092	0.056064220
	0.065692319	0.056064220	-0.14157468
kappa	-46.846930	4.7001096	5.8035657
	4.7001096	-46.565782	4.8107180
	5.8035657	4.8107180	-47.237705

TAB. F.1 – Calcul des sensibilités d'une option WorstOf. N = 50 000 simulations

prix	88.687614		
rho	-41.640652		
theta	12.421383		
delta	0.63516572 0.69441443 1.1609069		
vega	-16.351514 -12.514187 -20.448232		
gamma	-0.065570007	0.048737600	0.059818835
	0.048737600	-0.21138252	0.068270630
	0.059818835	0.068270630	-0.14606990
kappa	-46.977310	4.9286764	5.6493275
	4.9286764	-46.648567	4.9608910
	5.6493275	4.9608910	-47.325987

TAB. F.2 – Calcul des sensibilités d'une option WorstOf. N = 100 000 simulations

prix	88.733494		
rho	-41.622211		
theta	12.631238		
delta	0.65619997 0.65138106 1.1985430		
vega	-18.777724 -12.317791 -19.275074		
gamma	-0.074730688	0.042719027	0.069700847
	0.042719027	-0.20879593	0.079062830
	0.069700847	0.079062830	-0.14044667
kappa	-47.303782	4.8291974	5.9064229
	4.8291974	-46.666135	5.0981705
	5.9064229	5.0981705	-47.221137

TAB. F.3 – Calcul des sensibilités d'une option WorstOf. N = 500 000 simulations

Remarque 10 *Comme on le voit sur cet exemple très simple, la convergence du calcul des grecques demeurent assez lente; il est donc conseillé d'utiliser au moins 500 000 trajectoires pour avoir des estimations acceptables (notamment pour le Gamma).*

Annexe G

Sensibilités d'options américaines

G.1 Les sensibilités

Nous exposons rapidement les résultats relatifs au calcul de la grecque la plus simple : le delta. Le cas du gamma est traité en annexe ainsi que l'extension de ces résultats aux multi dimensionnels. La forme sous laquelle est obtenue le delta permet de calculer le delta sur les mêmes trajectoires que le prix. Dans la présentation des résultats, nous utiliserons fréquemment les deux notations suivantes :

$$H(T, S, f)(\cdot) := \frac{(S[f](\cdot)T[\mathbf{1}_{\mathbb{R}}](\cdot) - T[f](\cdot)S[\mathbf{1}_{\mathbb{R}}](\cdot))}{T^2[\mathbf{1}_{\mathbb{R}}](\cdot)}, \quad (\text{G.1})$$

où S et T désigneront deux opérateurs agissant sur les fonctions de $\mathcal{E}_b(\mathbb{R})$ et f une fonction de $\mathcal{E}_b(\mathbb{R})$.

$$w_{k\Delta t} := \{\bar{P}_{k\Delta t}(\alpha) < \Psi(\alpha)\} \quad (\text{G.2})$$

où $\bar{P}_{k\Delta t}(\alpha)$ a été définie précédemment.

Le Calcul du Delta

Le Delta d'une option indique la variation de la valeur de la position par rapport à de faibles fluctuations du cours du sous-jacent. En d'autres termes, le Delta de l'option (noté $\Delta(0, x_0)$) sera défini comme :

$$\Delta(0, x_0) = \frac{\partial}{\partial x_0} P^a(0, x_0). \quad (\text{G.3})$$

On notera $\bar{\Delta}(0, x_0)$ l'approximation de $\Delta(0, x_0)$

Lemme 4 Pour tout $0 < \Delta t < 1$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\bar{\Delta}(\alpha) = \Psi'(\alpha)\mathbf{1}_{\{w_{\Delta t}\}} + \exp(-r\Delta t) \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbb{E} \left[\bar{P}_{2\Delta t}(X_{2\Delta t}) | X_{\Delta t} = \alpha \right] \mathbf{1}_{w_{\Delta t}^c} \quad (\text{G.4})$$

$$\bar{\Delta}(0, x_0) = \mathbb{E}_{x_0} \left[\bar{\Delta}(\alpha) \right] \quad (\text{G.5})$$

Cependant cette formule pour le Delta n'est pas exploitable numériquement car elle nécessite le calcul d'une espérance conditionnelle. L'écriture sous une forme exploitable numériquement se fait par l'intermédiaire du calcul de Malliavin.

Lemme 5 Pour tout $(s, t) \in [0, T]^2$ avec $s \leq t$, tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et toute fonction $f \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbb{E} \left[f(X_t) | X_s = \alpha \right] = H(R_{s,t}, T_{s,t}, f)(\alpha), \quad (\text{G.6})$$

avec $T_{s,t}$ défini comme précédemment et

$$R_{s,t}[f](\alpha) := -\frac{1}{\sigma s(t-s)} \mathbb{E} \left[f(X_t) \frac{H(X_s - \alpha)}{X_s^2} (\Delta W_{s,t})^2 \right] - \mathbb{E} \left[f(X_t) \frac{H(X_s - \alpha)}{X_s^2} (\Delta W_{s,t}) \right] + \frac{t}{\sigma} \mathbb{E} \left[f(X_t) \frac{H(X_s - \alpha)}{X_s^2} \right] \quad (\text{G.7})$$

$$\Delta W_{s,t} := tW_s - sW_t + \sigma s(t-s). \quad (\text{G.8})$$

Lemme 6 Pour tout $(s, t) \in [0, T]^2$ avec $s \leq t$, tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et toute fonction $f \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbb{E} \left[f(X_t) | X_s = \alpha \right] = H \left(R_{s,t}^{loc}, T_{s,t}^{loc}, f \right) (\alpha) \quad (\text{G.9})$$

avec $T_{s,t}^{loc}$ défini comme précédemment et

$$R_{s,t}^{loc} := \frac{1}{\sigma s(t-s)} \mathbb{E} \left\{ f(X_t) \left[\frac{F(X_s - \alpha) - H(X_s - \alpha)}{X_s^2} \right] \left((\Delta W_{s,t})^2 + \sigma s(t-s) - st(t-s) \right) \right\} + \mathbb{E} \left[f(X_t) \frac{f(X_s - \alpha)}{X_s} \Delta W_{s,t} \right]. \quad (\text{G.10})$$

En couplant les lemmes 4 et 5, on établit le lemme suivant :

Lemme 7 (Calcul du Delta) Pour tout $0 < \Delta t < 1$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\alpha) &= \Psi'(\alpha) \mathbf{1}_{\{w_{\Delta t}\}} + \exp(-r\Delta t) H \left(R_{\Delta t, 2\Delta t}, T_{\Delta t, 2\Delta t}, \bar{P}_{2\Delta t} \right) (\alpha) \mathbf{1}_{w_{\Delta t}^c}, \\ \bar{\Delta}(0, x_0) &= \mathbb{E}_{x_0} \left[\bar{\Delta}(X_{\Delta t}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

Comme le Delta est lui-même une fonction du cours du support, les teneurs de marché utilisent donc un autre indicateur qui les renseigne sur la variation du Delta par rapport au prix du sous-jacent. Cet indicateur s'appelle le Gamma.

Le Calcul du Gamma

Le Gamma mesure la convexité de la courbe représentative de la valeur de la position globale par rapport au prix de l'action. Il renseigne le teneur de marché sur l'évolution du Delta de sa position en fonction de la variation du prix de l'action. Il se trouve défini comme :

$$\Gamma(0, x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} P^a(0, x_0)$$

On notera alors $\bar{\Gamma}(0, x_0)$ l'approximation de $\Gamma(0, x_0)$. Afin d'approcher numériquement le Gamma, nous réitérons le raisonnement effectué précédemment permettant le calcul du Delta. On montre alors le lemme suivant :

Lemme 8 (Calcul du Gamma) Pour tout $0 < \Delta t < 1$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\bar{\Gamma}(\alpha) = \Psi''(\alpha) \mathbf{1}_{\{w_{\Delta t}\}} + \exp(-r\Delta t) K_{\Delta t, 2\Delta t} [\bar{P}_{2\Delta t}] (\alpha) \mathbf{1}_{\{w_{\Delta t}\}}, \quad (\text{G.12})$$

$$\bar{\Gamma}(0, x_0) = \mathbb{E}_{x_0} \left[\bar{\Gamma}(X_{\Delta t}) \right], \quad (\text{G.13})$$

où K défini comme : pour tout $(s, t) \in [0, T]^2$ avec $s \leq t$, tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} K_{s,t}[f](\alpha) &:= \left\{ U_{s,t}[f] T_{s,t}^2[\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - U_{s,t}[f] T_{s,t}[f] T_{s,t}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}}] \right. \\ &\quad \left. + 2R_{s,t}^2[\mathbf{1}_{\mathbb{R}} T_{s,t}[f]] \right\} (\alpha) * \{T_{s,t}[\mathbf{1}_{\mathbb{R}}](\alpha)\}^{-3}, \end{aligned}$$

et où les opérateurs T et R ont été précédemment définis et U est défini comme :

$$\begin{aligned} U_{s,t}[f](\alpha) &:= \frac{1}{\sigma_s(t-s)} \mathbb{E} \left\{ f(X_t) \frac{H(X_s - \alpha)}{X_s^3} \left[\frac{(\Delta W_{s,t})^3}{\sigma_s(t-s)} + 3(\Delta W_{s,t})^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(2\sigma_s(t-s) - \frac{3t}{\sigma} \right) \Delta W_{s,t} - 3st(t-s) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

G.2 Pricing et Hedging d'une option américaine : cas multi-dimensionnel

G.2.1 Introduction et notations

Nous allons considérer d sous-jacents régis par la dynamique suivante :

$$\frac{dX_t^{(i)}}{X_t^{(i)}} = (r - q_i)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_t^{(j)},$$

où $W = (W^{(1)}, \dots, W^{(d)})^\top$ désigne un mouvement brownien sur notre espace, r le taux d'actualisation, q_i le dividende de l'actif $X^{(i)}$ et $(\sigma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ désigne la matrice de diffusion.

Comme pour la partie précédente, le prix de l'option américaine est défini comme :

$$P^a(0, x_0) = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{I}_{0,T}} \mathbb{E}(\exp(-r\tau) \Psi(X_\tau))$$

G.2.2 Le calcul du Delta

Cette section n'est consacrée qu'à l'énumération des formules des du Delta d'une espérance conditionnelle. Afin de calculer les sensibilités des options américaines, il suffira de réitérer le raisonnement effectué dans le cas scalaire. Afin de simplifier la présentation des lemmes donnés ci-dessous, nous allons poser :

$$\begin{aligned} A_{s,t}^{(i)} &:= \frac{1}{\tilde{X}_s^{(i)}} \left[\frac{\Delta W_{s,t}^{(i)}}{\sigma_{ii}s(t-s)} + 1 \right] \text{ et } B_{s,t}^{(i)} := \frac{H(\tilde{X}_{s,t}^{(i)} - \alpha_i)}{\tilde{X}_{s,t}^{(i)}} \Delta W_{s,t}^{(i)} \\ C_s^{(i),\theta} &:= \frac{H(\tilde{X}_{s,t}^{(i)} - \alpha_i)}{\sigma_{ii}[\tilde{X}_{s,t}^{(i)}]^\theta} \text{ et } D_{s,t}^{(i)} := \frac{1}{\sigma_{ii}s(t-s)[\tilde{X}_{s,t}^{(i)}]^2} \left(\frac{[\Delta W_{s,t}^{(i)}]^2}{\sigma_{ii}s(t-s)} + 3\Delta W_{s,t}^{(i)} + \left(2\sigma_{ii}s(t-s) - \frac{3t}{\sigma_{ii}} \right) \right) \\ H(T, S, f)(\cdot) &:= \frac{S[f](\cdot)T[\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d}](\cdot) - T[f](\cdot)S[\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d}](\cdot)}{T^2[\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d}](\cdot)}, \end{aligned}$$

où S et T désigneront deux opérateurs agissant sur les fonctions de $\mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$ et f une fonction de $\mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 9 (Delta d'une espérance conditionnelle) *Pour tout $(s, t) \in [0, T]^2$ avec $s \leq t$, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R}^d)$, tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$ et tout $i \in \{1, \dots, d\}$,*

$$\partial_{\alpha_i} \mathbb{E}[f(X_t) | X_s = \alpha] = H(\mathcal{R}_{s,t}, \mathcal{I}_{s,t}, f)(\alpha), \quad (\text{G.15})$$

avec

$$\mathcal{I}_{s,t}[f](\alpha) = \prod_{j=1}^d \frac{1}{\sigma_{jj}s(t-s)} \mathbb{E} \left[f(X_t) \prod_{j=1}^d \frac{H(X_s^{(j)} - \alpha_j)}{X_s^{(j)}} \Delta W_{s,t}^{(j)} \right] \quad (\text{G.16})$$

$$\mathcal{R}_{s,t}[f](\alpha) = -\mathbb{E} \left[f(X_t) A_{s,t}^{(i)} \prod_{j=1}^d B_{s,t}^{(j)} \right] + t \mathbb{E} \left[f(X_t) C_{s,t}^{(i),2} \prod_{j=1, j \neq i}^d B_{s,t}^{(j)} \right]. \quad (\text{G.17})$$

Bibliographie

- [BAL01] Bally, *Introduction au calcul de Malliavin* projet "MATHFI", Cermics 2001.
- [BEN00a] Benhamou, *A Generalisation of Malliavin Weighted Scheme for Fast Computation of the Greeks* London School of Economics, Working Paper Mars 2000.
- [BEN00b] Benhamou, *Faster Greeks for Discontinuous Payoff Options* London School of Economics, Working Paper Mars 2000.
- [BT02a] Bouchard et Touzi, *On the representation of conditional expectations*, Preprint 2002.
- [FLLLT99a] Fournie, Lasry, Lebuchoux, Lions et Touzi, *Applications of Malliavin Calculus to Monte-Carlo methods in Finance* Finance and Stochastics, 3 pp 391-412 1999.
- [FLLLT01b] Fournie, Lasry, Lebuchoux, et Lions, *Applications of Malliavin Calculus to Monte-Carlo methods in Finance II* Finance and Stochastics, 5 pp 201-236 2001.
- [FRI01] Friz, *An Introduction to Malliavin Calculus* Courant Institute of Mathematical Sciences, NYU 2001.
- [GKH01] Gobet et Kohatsu-Higa, *Computation of Greeks for Barrier and Lookback Options using Malliavin Calculus* R.I. n° 464 juin 2001.
- [GOB00] Gobet, *cours de méthodes numériques* DEA Paris VI et Paris VII 2000.
- [GKR95] Geman, El Karoui et Rochet, *Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing*, journal of probabilities 1995.
- [JOU01] Jouini, *Evaluation d'actifs financiers et arbitrage*, ENSAE 2001.
- [KAR00] El Karoui, *cours de l'X de mathématiques financières* 2000.
- [KAR00] El Karoui, *Cours de mathématiques financières* D.E.A Paris VI 2000.
- [LL00] Lambertson et Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Economica, 2000.
- [LR01] Lions et Regnier, *Calcul du prix et des sensibilités d'une option américaine par une méthode de Monte Carlo* preprint 2001.
- [OKS97] Øksendal, *An Introduction to Malliavin Calculus with Applications to Economics*, Oslo University, 1997.
- [NUA95] Nualart, *The Malliavin Calculus and related Topics* Springer Verlag 1995.
- [REG00] Regnier, *Interprétations probabilistes des E.D.P. linéaires paraboliques et applications à la finance*, DEA de probabilités et finance Paris VI 2000-2001.
- [RY94] Revuz et Yor, *Stochastic differential equation*, 1994.
- [TL98] Temam et Lapeyre, *On the valuation of Asiatic options using Monte Carlo methods*, 1998.