Couverture dynamique des produits dérivés de crédit dans les modèles à copules

David Kurtz, Groupe de Recherche Opérationnelle

Workshop Copula in Finance, 14 mai 2004, ENS Cachan

Sommaire

Risque de crédit [1]

$=$ le risque qu'un débiteur ne soit pas en mesure d'honorer ses engagements (sur les coupons et/ou le principal d'une dette)

$\simeq$ le risque de défaut

Risque de crédit [2]

Le risque de crédit est rémunéré par le paiment par le débiteur d'un taux supérieur au taux sans risque (= par ex. le taux auquel emprunte l'état).

$$\boxed{\boxed{\text{spread émetteur} = \text{taux de la créance - taux sans risque}}}$$

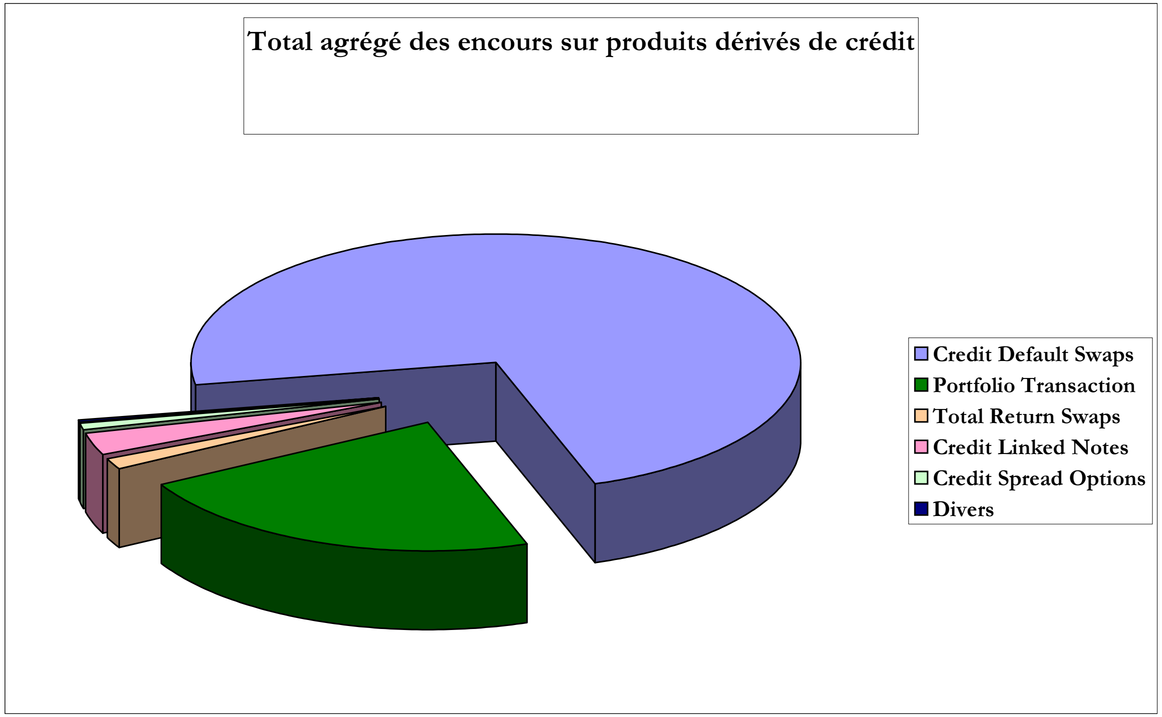
Marché des produits dérivés de crédit [1]

= Marché synthétique du risque de défaut qui permet l'échange d'un risque émetteur entre diverses contreparties.

$\longrightarrow$ Nominal des encours $\simeq$ 2400 Milliards de \$

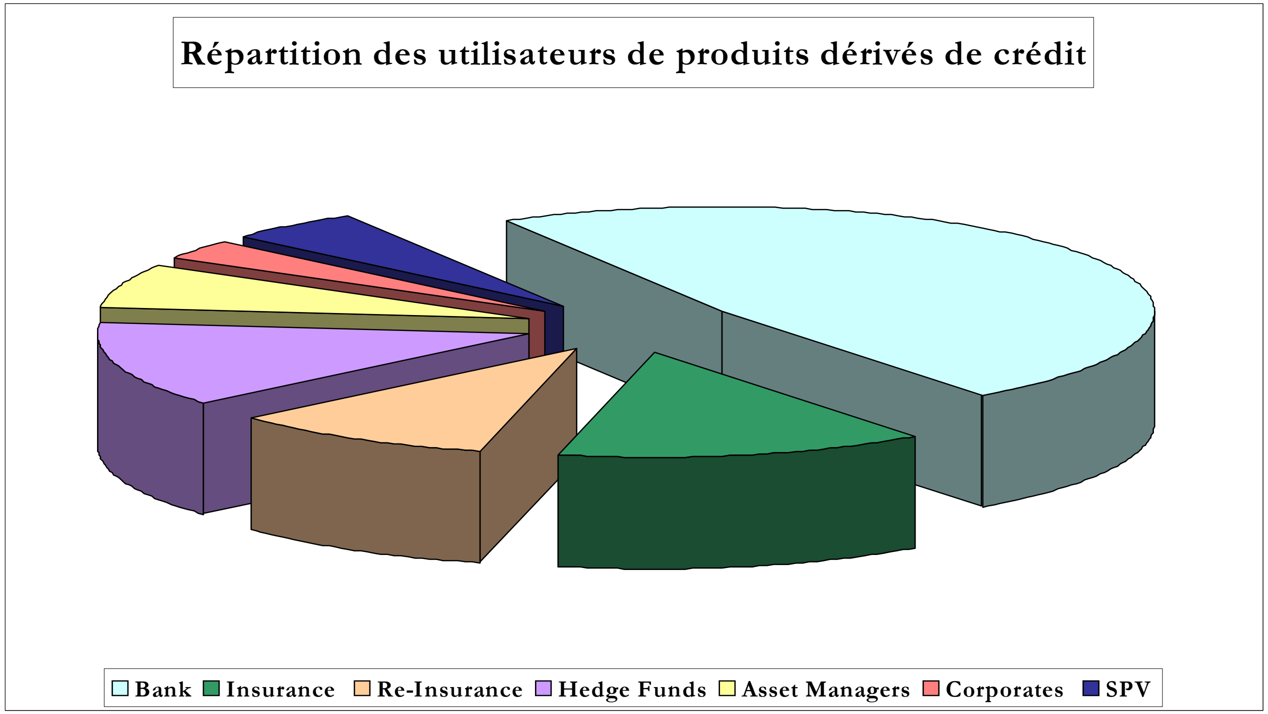
$\longrightarrow$ Deux grandes familles de produits : vanilles et produits structurés

Marché des produits dérivés de crédit [2]



(source : Risk Survey 2003)

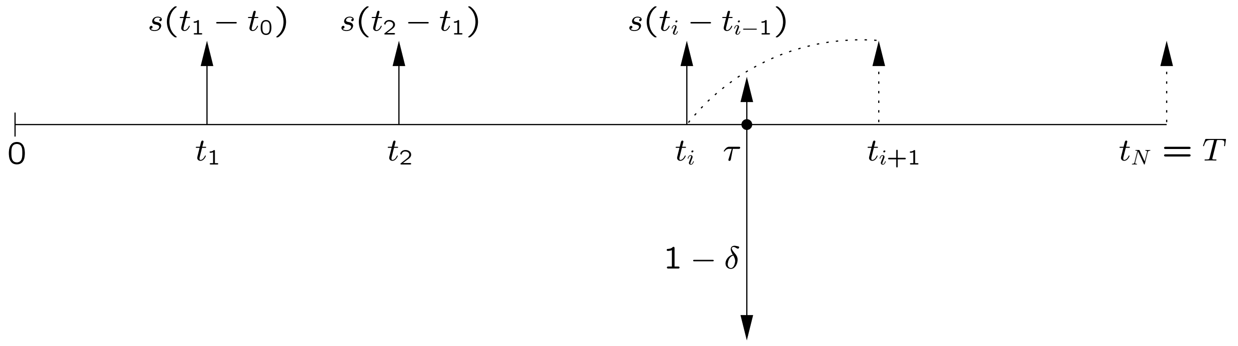
Marché des produits dérivés de crédit [3]



(source : Risk Survey 2003)

Produits dérivés de crédit : produit vanille [1]

credit default swap = produit permettant le transfert du risque de référence sur un émetteur.



$$\boxed{\text{spread} = (1 \text{ - Taux de recouvrement}) \times \text{intensité du défaut}}$$

Produits dérivés de crédit : produits structurés [2]

basket default swap

= produit permettant la re-distribution du risque de crédit d'un portefeuille de créances

$\longrightarrow$ En échange d'un spread, l'acheteur de protection est couvert contre le n-ième défaut du portefeuille

spread du first-to-defaut = (1 - $\langle$ Taux de recouvrement $\rangle$)

$\times$ minimum des intensités de défaut

Produits dérivés de crédit : produits structurés [3]

collateralized debt obligation = produit tranché synthétique

$\longrightarrow$ En échange d'un spread, l'acheteur de protection se couvre contre l'ensemble des pertes sur le portefeuille comprises entre A% et B% du nominal total.

$\longrightarrow$ **Jambe fixe** paiement périodique d'un spread

$\longrightarrow$ **Jambe variable** reçoit le call spread sur le pourcentage des pertes cumulées L

$$\text{Nominal de la tranche} \times \left\{ \Big(L - A\Big)_+ - \Big(L - B\Big)_+ \right\}$$

Dynamique de marché [1]

Comment se rencontrent l'offre et la demande ?

$\longrightarrow$ 1 exemple simple :

Demande Pour couvrir les risques associés aux portefeuilles de créances statiques (risque de concentration,...) les gérants de portefeuille cherchent à prendre des positions acheteuses de protection dans les cds

Offre Pour couvrir dynamiquement les risques engendrés par l'activité de titrisation synthétique (tranche de CDO), les structureurs prennent des positions vendeuses de protection dans les cds

Évaluation et couverture des produits structurés [1]

Les produits structurés de crédit sont traités OTC (over-the-counter = de gré-à-gré) Cette situation induit une double problématique :

1 $\longrightarrow$ valorisation des portefeuilles de négociation
2 $\longrightarrow$ gestion dynamique des risques contenus dans ces portefeuilles

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{nécessité d'un modèle mathématique}}$

En règle générale, on suppose que prix et ratios de couverture peuvent être déterminés dans un un modèle d'absence d'opportunités d'arbitrage.

Évaluation et couverture des produits structurés [2]

Sous l'hypothèse que l'évolution des actifs peut être modélisée par des processus stochastiques (semimartingales), l'absence d'opportunité d'arbitrage entraîne l'existence d'une mesure de probabilité dite risque-neutre telle que

$$\text{prix} = \mathbf{E}\Big[\text{somme des flux futurs actualisés au taux sans risque}\Big]$$

La modélisation revient donc à choisir la distribution risque-neutre des variables (sous-jacents) dont dépendent les flux futurs.

Modélisation [1]

L'évaluation des produits dérivés de crédit nécessite la modélisation de la distribution risque-neutre du vecteur aléatoire

$$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N)$$

où τ_i représente l'instant du défaut de l'émetteur i.

$\longrightarrow$ les lois marginales peuvent être implicitées à partir des prix de marché des cds et d'une hypothèse sur le taux de recouvrement

$\longrightarrow$ la structure de dépendance est modélisée par une copule qui est un paramètre crucial dans l'évaluation d'options sur la perte cumulée en vertu des analogies

$$\boxed{\text{co-dépendance} \simeq \text{corrélation} \simeq \text{volatilité de la perte cumulée}}$$

Choix de la copule [1]

En général, on postule l'existence de N facteurs de risque $X_1, \ldots, X_N$ tels que

$$\tau_i \leq T \Longleftrightarrow X_i \leq B_i(T)$$

Intuition : modèle de Merton multidimensionnel où les X_i sont les rendements normalisés de la valeur des actifs de l'entreprise i

En pratique :

$\rightarrow$ X vecteur gaussien
$\rightarrow$ X vecteur de loi de Student à 8-9 degré de liberté

Problème : Les valeurs des actifs des entreprises ne sont pas des variables observables...

Couverture dynamique [1]

Principe : Les flux garantis par le produit dérivé peuvent être répliqués dynamiquement à l'aide d'un portefeuille autofinancé constitué des sous-jacents (cds) du produit considéré.

Mathématiquement :

$$\text{payoff à maturité} = \text{prix initial} + \int_0^T H_t \cdot \mathrm{d}Z_t$$

où

$$H = \text{stratégie de couverture}$$
$$Z = \text{vecteur des sous-jacents}$$

Couverture dynamique [2]

Dans le cas des produits dérivés de crédit

$$Z = \text{les credit default swaps}$$
$$\text{payoff à maturité} = \text{une fonctionnelle de la perte cumulée}$$

Question : Est-ce que les modèles considérés en pratique autorisent, au moins théoriquement, cette réplication dynamique du risque de défaut ?

Réponse : OUI

Description du modèle simplifié [1]

On suppose que les taux sans risque sont nuls et on considère un portefeuille contenant le risque de défaut de 2 émetteurs.

- λ_i intensité du défaut de l'émetteur i
- $\mathbf{P}\left[\tau_1 \leq t_1 ; \tau_2 \leq t_2\right] = C(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_1 t_1}, 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t_2})$ loi jointe
- $\mathcal{G}_t = \sigma\left(\min(\tau_1, t), \min(\tau_2, t)\right)$ information disponible à la date t

Description du modèle simplifié [2]

On considère 3 contrats dont les payoffs respectifs sont

$P_i = I\{0 < \tau_i \leq T\}, i = 1, 2$ (digital cds)

$P_3 = C_1 I\{0 < \min(\tau_1, \tau_2) \leq T\} + C_2 I\{0 < \max(\tau_1, \tau_2) \leq T\}$

(produit structuré)

La valeur en t de ces contrats s'écrit

$$V_t^i = \mathbf{E}\left[P_i \middle| \mathcal{G}_t\right], \quad W_t = \mathbf{E}\left[P_3 \middle| \mathcal{G}_t\right]$$

Problème : Trouver une stratégie H telle que

$$W_T = W_0 + \int_0^T H_t \cdot \mathrm{d}V_t$$

Théorème de représentation de martingale [1]

On s'appuie sur le fait suivant : Toutes les $\mathcal{G}$-martingales peuvent se représenter comme la somme de deux intégrales stochastiques relativement aux martingales

$$M_t^i = N_t^i - \int_0^{\min(t,\tau_i)} h_i(s)\,\mathrm{d}s \text{ où } N_t^i = I\{\tau_i \le t\}, \quad i = 1,2$$

avec (voir [3])

$$\frac{\mathrm{d}h_i}{h_i} = h_i\Big(1 - \frac{C_{x_i x_i} C}{C_{x_i} C_{x_i}} - \lambda_i\Big)\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}N^i + \Big(\frac{C_{x_i x_j} C}{C_{x_i} C_{x_j}} - 1\Big)\Big(\mathrm{d}N_j - h_j\ ddt\Big)$$

De plus, les coefficients dans cette représentation ne dépendent que des sauts aux instants τ_1 et τ_2 de la martingale considérée.

Identification de la stratégie de couverture [1]

Soient L, K_1 et K_2 les processus bidimensionnels tels que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V^i &= K_1^i \, \mathrm{d}M^1 + K_2^i \, \mathrm{d}M^2 \\ \mathrm{d}W &= L_1 \, \mathrm{d}M^1 + L_2 \, \mathrm{d}M^2 \end{aligned}$$

Ces processus sont uniquement déterminés par les sauts des martingales W, V^1 et V^2 aux instants τ_1 et τ_2.

Ainsi, résoudre notre problème revient à trouver H tel que

$$H \, \mathrm{d}V = L_1 \, \mathrm{d}M^1 + L_2 \, \mathrm{d}M^2$$

ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{bmatrix} K_1^1 & K_2^1 \\ K_1^2 & K_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

Application numérique [1]

On suppose que la copule de survie de la loi jointe des instants de défaut est la copule de Clayton de paramètre θ, autrement dit que

$$\mathbf{P}\Big[\tau_1 > t_1 ; \tau_2 > t_2\Big] = \Big(\mathrm{e}^{\theta\lambda_1 t} + \mathrm{e}^{\theta\lambda_2 s} - 1\Big)^{-1/\theta}$$

On utilise les paramètres suivant

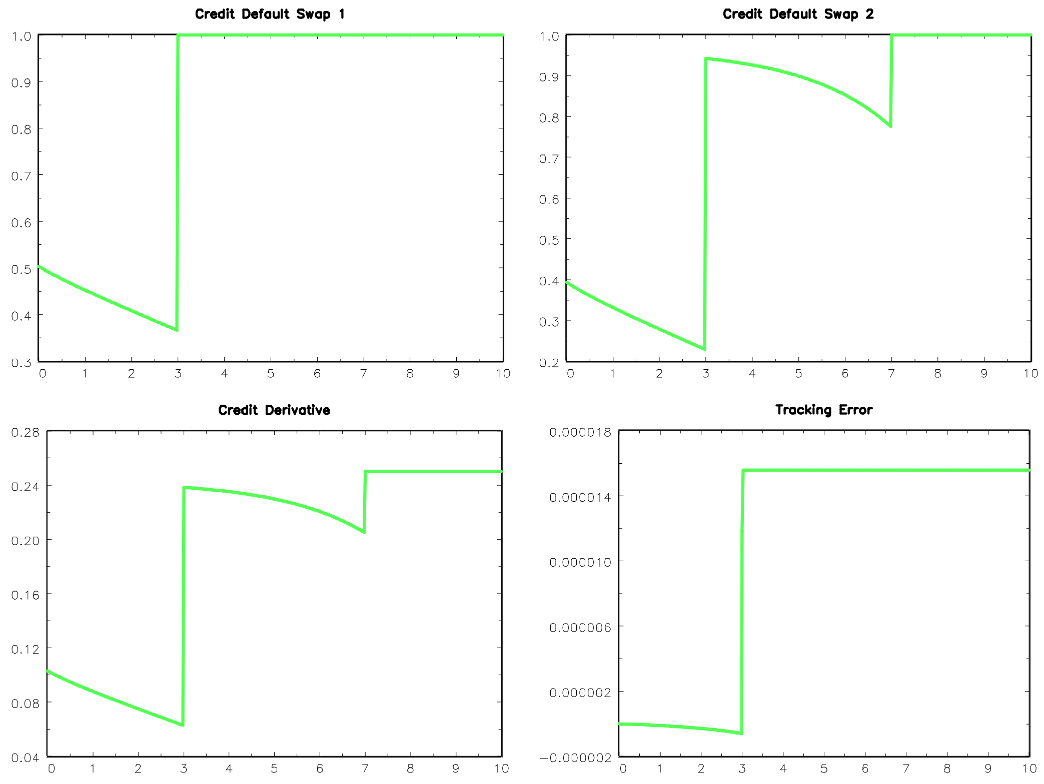
$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 700\, bp, & \lambda_2 = 500\, bp, & \theta = 10.0 \\ T = 10Y, & K = 50, & \text{(re balancement hebdomadaire)} \\ C_1 = 5\%, & C_2 = 20\%. & Notional = 1.0 \end{array}$$

On considère un portefeuille dont la couverture est re balancée une fois par semaine et l'on étudie la distribution du P&L final

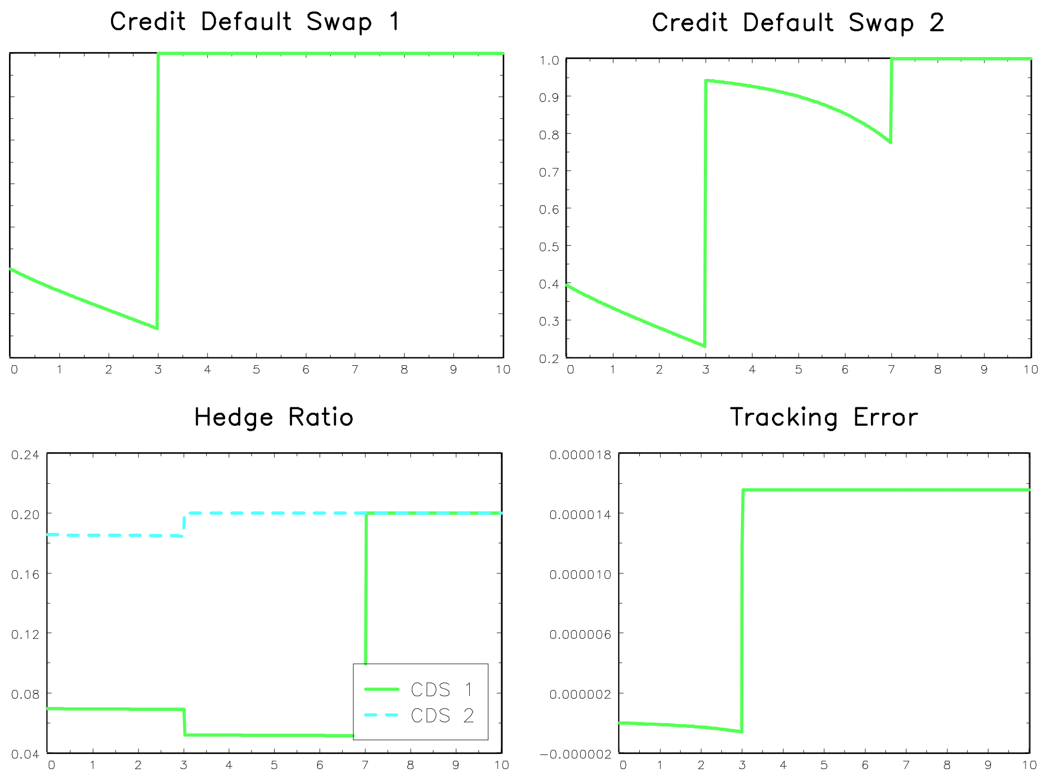
$$P\&L(T) = W_0 + \sum_{i=0}^{K-1} H(t_i) \cdot \Big(V_{t_{i+1}} - V_{t_i}\Big) - W_T\,,$$

où $t_k = kT/K$.

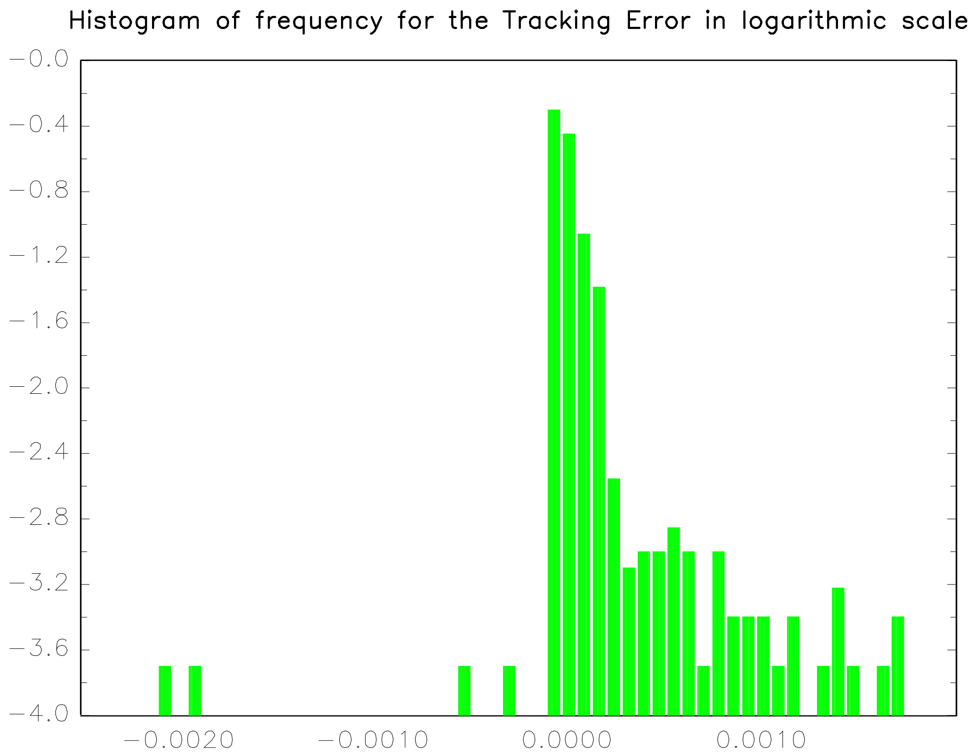
Application numérique [2]



Application numérique [3]



Application numérique



Conclusion [1]

1 Couverture dynamique des risques de crédit théoriquement possible dans les modèles à copule

2 **Problème :** ces modèles sont des modèles statiques (la copule n'est pas dépendante du temps)

3 **Perspectives :** inclure une dynamique de la structure de dépendance

Références

[1] Kurtz (D.), Riboulet (G.). Dynamic Hedging of Credit Derivatives : a First Approach. `gro.creditlyonnais.fr`

[2] Roncalli (T.). Gestion des risques multiples ou copules et aspects multidimensionnels du risque. `gro.creditlyonnais.fr`

[3] Schönbucher (P.), Schubert (D.). Copula-Dependent Default Risk in Intensity Models. `www.schonbucher.de`