Université de Paris IX Dauphine

UFR SCIENCES DES ORGANISATIONS

CONTENU EN INFORMATION DANS LES PRIX D'OPTIONS : ESTIMATION DE LA DENSITÉ NEUTRE AU RISQUE DU SOUS-JACENT ET APPLICATIONS

THÈSE

Pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN GESTION
(Mai 2001)

Présentée et soutenue par

Sophie COUTANT

JURY

H. GEMAN, Professeur de Finance à l'Université Paris IX Dauphine

D. MADAN, Professeur de Finance à l'Université du Maryland

M. ROCKINGER, Professeur de Finance à HEC

F. AFTALION, Professeur de Finance à l'ESSEC

J. HAMON, Professeur de Finance à l'Université Paris IX Dauphine

A. FRACHOT, Crédit Lyonnais

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier ma directrice de recherche Madame le Professeur Hélyette Geman qui a su être disponible et m'orienter dans mes choix lors de mes moments d'hésitation.

En second lieu je voudrais remercier Monsieur le Professeur Michael Rockinger et Monsieur le Professeur Dilip Madan qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs et ont le courage de lire attentivement l'ensemble des travaux. Je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à Antoine Frachot, Florin Aftalion et Jacques Hamon pour avoir accepté d'être membres du jury.

En troisième lieu je voudrais remercier les personnes de la Banque de France sans qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Je pense en particulier à mon directeur industriel Eric Jondeau qui a eu le courage de me supporter pendant trois ans et m'a véritablement soutenue. Je n'oublierai pas de mentionner Pierre Sicsic et Sanvi Avouyi-Dovi successivement directeurs du Centre de Recherche à la Banque de France qui m'ont donné tous les moyens pour arriver au bout de cette étude.

Enfin, je tiens à remercier sincèrement mes parents qui m'ont soutenu moralement dans les quelques moments de désespoir que j'ai pu rencontrer durant ces trois années.

Table des matières

Remerciements **2**

Introduction générale **8**

I Cadre institutionnel et présentation du problème **18**

1 Marchés et instruments financiers **19**

1.1 La Bourse de Paris 19

1.1.1 Organisation 19

1.1.2 Les instruments financiers 20

Les actions 20

Les indices 20

1.1.3 L'indice CAC 40 : propriétés statistiques 23

1.2 Les marchés dérivés 26

1.2.1 Le MONEP 26

Historique 26

Organisation 26

L'option sur indice CAC 40 27

Historique et définition 27

Notations et valorisation 27

Description de la base 29

1.2.2 Le MATIF 33

Historique 33

Organisation 33

1.2.3 Le taux d'intérêt PIBOR 35

Description 35

Propriétés statistiques . . . 36
1.2.4 Les instruments dérivés . . . 39
Le contrat à terme de taux d'intérêt PIBOR 3-mois . . . 39
Les options sur contrat PIBOR 3-mois . . . 39

2 Problématique **42**
2.1 Approche par équilibre d'arbitrage . . . 43
2.1.1 Hypothèses et définitions liées à l'équilibre par arbitrage . . . 43
2.1.2 Valorisation par arbitrage et modèle de Black-Scholes . . . 45
Définitions . . . 46
Valorisation d'une option . . . 47
2.1.3 Prime de risque . . . 50
2.2 Les densités neutres au risque . . . 50
2.2.1 Motivations . . . 50
La volatilité . . . 51
Etude de la prime d'asymétrie . . . 52
Le coefficient d'aplatissement . . . 53
2.2.2 Applications possibles . . . 56

II Estimation de la densité neutre au risque : une comparaison des méthodes **59**

1 Relation entre la DNR et les prix d'options **61**
1.1 Littérature . . . 61
1.2 La relation de Breeden et Litzenberger . . . 68
1.3 Notations, commentaires et options américaines . . . 69
1.3.1 Notations . . . 69
1.3.2 Correction des prix pour les options américaines . . . 70
Méthode de Barone-Adesi et Whaley . . . 71
La méthode de Melik et Thomas . . . 72
1.3.3 Remarques concernant les graphiques . . . 73

2 Modèles de diffusion du sous-jacent **75**
2.1 Les modèles de référence . . . 75
2.1.1 Le modèle de Black et Scholes sur les prix . . . 75

2.1.2 Le modèle de Black sur les taux . . . 79
2.2 Modèle à sauts . . . 83
2.2.1 Le modèle . . . 83
2.2.2 Moments . . . 84
2.3 Modèle à volatilité stochastique . . . 87
2.3.1 Le modèle . . . 87
2.3.2 Les moments d'une densité d'Heston . . . 90

3 Les méthodes non paramétriques 96
3.1 Le smile comme fonction polynômiale du prix d'exercice . . . 96
3.1.1 Le modèle . . . 96
3.2 Modèles d'arbre . . . 100
3.2.1 L'arbre de Derman et Kani . . . 100
Le modèle . . . 100
La construction de l'arbre . . . 100
Les moments . . . 103
3.2.2 L'arbre de Rubinstein . . . 107
Le modèle . . . 107
Les moments . . . 108
3.3 Estimateurs de noyaux . . . 111
3.3.1 Le modèle . . . 111
3.3.2 L'estimation de la DNR . . . 112
3.4 La maximisation de l'entropie . . . 117
3.4.1 Le modèle . . . 117

4 Les méthodes structurelles 123
4.1 Mélanges de lois lognormales . . . 123
4.1.1 Le modèle . . . 123
4.1.2 Prix d'un call . . . 124
4.1.3 Les moments de la densité de mélanges de lognormales . . . 124
4.2 Développements en série autour de la densité . . . 127
4.2.1 Développements en série d'Edgeworth . . . 127
Le modèle . . . 127
Evaluation d'une option . . . 128
Les moments de la densité d'Edgeworth . . . 129

4.2.2 Développement en polynômes d'Hermite . . . 132
Le modèle . . . 132
Le moments de la densité d'Hermite . . . 134

5 Comparaison des méthodes 139
5.1 Méthode d'estimation et critères de qualité . . . 139
5.2 Comparaison des modèles sur un événement empirique particulier . . . 140
5.2.1 Résultats des estimations des modèles paramétriques . . . 141
5.2.2 Taux . . . 153
5.2.3 Indices . . . 154

Annexes de la partie II 172
Annexe A : prix d'un call américain avec la méthode de Barone-Adesi et Whaley . . . 172
Annexe B : calculs pour Hermite . . . 177
Annexe C : calcul de la variance d'Heston . . . 181
Annexe D : optimisation de l'entropie . . . 185
Annexe E : méthode d'optimisation de Quasi-Newton . . . 187

III Applications des densités neutres au risque en terme de contenu en information 191

1 Outil descriptif de mesure du risque sur les marchés 193
1.1 Intervalles de confiance . . . 194
1.1.1 Taux d'intérêt . . . 196
1.1.2 Indices . . . 201

2 Volatilité implicite et efficience des marchés d'options 206
2.1 Volatilités historiques, implicites et GARCH . . . 208
2.1.1 Volatilités non conditionnelles . . . 208
Variance future réalisée . . . 208
Variance historique . . . 208
2.1.2 Volatilités conditionnelles GARCH . . . 209
2.1.3 Volatilités implicites et volatilités à-la-monnaie . . . 211
2.2 Tests d'efficience des marchés . . . 212
2.3 Résultats empiriques . . . 213
2.3.1 Méthode d'estimation . . . 213

2.3.2 Estimation des modèles GARCH . . . 215
2.3.3 Estimation de contenu en information . . . 216

3 Tests de la théorie des anticipations à partir des options 225
3.1 Le modèle . . . 226
3.2 Résultats . . . 228

4 Estimation de l'aversion au risque des agents du marché 237
4.1 Notion de risque et d'équilibre général . . . 238
4.1.1 Hypothèses liées à l'équilibre général . . . 238
4.1.2 Evaluation d'actifs contingents à l'équilibre . . . 239
4.1.3 Prime de risque . . . 242
4.2 Aversion au risque implicite dans les prix d'options . . . 243
4.2.1 Mise en évidence d'une relation théorique . . . 243
4.2.2 Un exemple : le modèle de Black-Scholes . . . 245
4.3 Estimation implicite de l'aversion au risque . . . 247
4.3.1 Estimation de la densité actuelle par une densité Conditionnellement Autoregressive 247
4.3.2 Estimation de la densité neutre au risque par un développement en polynômes d'Hermite . . . 249
4.3.3 Résultats de l'estimation . . . 249
4.4 Application en terme de stratégies de trading . . . 253

Annexes de la partie III 260
Annexe F : test de Dickey et Fuller augmenté . . . 260
Annexe G : calcul des dérivées $p_t^{\mathrm{HER}\prime}(S)$ et $q_t^{\mathrm{HER}\prime}(S)$ . . . 262
Annexe H : Moments de la distribution t-student décentrée . . . 263
Annexe I : Distributions de $\left(\xi_{x,t+h}, \xi_{y,t+h}\right)$ et $\left(\sqrt{V_t}dZ_t^1, dZ_t^2\right)$ . . . 267

Conclusion générale 269

Introduction générale

Les prix des produits optionnels reflètent-ils les anticipations des agents du marché sur les mouvements des prix futurs ? Nous examinons dans cette thèse le contenu en information dans les prix des options sur contrat à terme de taux d'intérêt et des options sur indices et tentons de répondre à la question posée.

Concrètement les options peuvent nous dire à quel point les participants du marché croient en leurs anticipations, et quelle probabilité ils attachent à une baisse de plus de $x\%$ ou une hausse de plus de $y\%$. En effet, une option donne le droit à son détenteur d'acheter un certain actif à un prix déterminé aujourd'hui, le prix d'exercice, pour une date future, l'échéance de l'option. Le règlement final pour le détenteur est nul si le prix de l'actif est plus bas que le prix d'exercice et strictement positif dans le cas contraire. Une option est donc un pari sur le niveau futur de l'actif faisant office de support de l'option. Considérons par exemple deux options similaires en tout point exceptées pour leur prix d'exercice. Intuitivement, on peut sentir que la différence entre les prix de ces deux options reflète la valeur attachée à la capacité d'exercer ces options quand le prix de l'actif sous-jacent se trouve entre les deux prix d'exercice. Cette valeur dépend elle-même de la probabilité que l'actif sous-jacent à l'échéance se trouve dans cet intervalle. Les prix d'options reflètent donc ce que pensent les agents du marché sur l'évolution future des cours, et comme les options d'une même échéance sont traitées pour plusieurs prix d'exercice, on peut déduire toute la distribution de probabilité de l'actif à l'échéance. En se plaçant dans un univers neutre au risque, Harrison et Kreps (1979) montrent qu'il existe une probabilité neutre au risque sous laquelle les prix actualisés sont des martingales. En particulier, le prix d'une option s'écrit comme l'espérance actualisée sous cette probabilité du gain terminal de l'option. C'est donc sous cette probabilité qu'est extraite la distribution du sous-jacent.

Si les années 70-80 ont été très prolifiques en matière de modèles d'évaluation des produits dérivés et de modèles de construction de la structure par terme des taux d'intérêt,

il faut attendre la fin des années 80 pour voir des travaux s'intéresser au problème de l'extraction d'information à partir des produits dérivés.

Les marchés dérivés subissent une croissance significative depuis le milieu des années 80. Une conséquence importante pour les institutions financières en est l'analyse du contenu en information dans les prix des produits dérivés. Les prix à terme peuvent être considérés comme l'équivalent à l'instant de cotation du prix de l'actif délivré dans le futur. Ils reflètent donc les anticipations d'un niveau de prix ou de taux dans le futur.

De nombreux auteurs ont cherché à tester l'efficience des marchés d'option en évaluant le contenu informationnel supplémentaire dans les volatilités implicites issues des options sur d'autres mesures de volatilités telles que la volatilité conditionnelle ou historique. Ainsi, Day et Lewis (1992) comparent le contenu en information dans les volatilités implicites des options sur S&P100 avec celui contenu dans les volatilités conditionnelles issues de modèles GARCH et EGARCH. Ils utilisent pour cela un test de rapport des vraisemblances des différents modèles. Ils examinent ensuite hors échantillon le pouvoir prédictif des différentes mesures de volatilités en régressant la volatilité future sur les volatilités implicites et les prévisions issues des modèles GARCH et EGARCH. Les auteurs trouvent que les volatilités implicites contiennent plus d'information que des volatilités issues de modèles GARCH. Mais ils mettent également en évidence des résultats opposés. Confondues, ces deux conclusions contradictoires impliquent que ni les volatilités implicites, ni les volatilités conditionnelles GARCH ne sont capables d'expliquer complètement la volatilité future du rendement du prix de l'actif.

Mais l'ensemble de ces études limite la connaissance de l'information à l'espérance ou à la volatilité du prix futur de l'actif sous-jacent, donc aux moments d'ordre 1 et 2 et non pas à la distribution tout entière. Or les prix des options dépendent des prix futurs et de la variation possible de ces prix. On peut donc légitimement penser que les prix d'options contiennent de l'information sur l'espérance du prix futurs, mais également sur la variance du prix, sur la direction la plus probable à la hausse ou à la baisse qu'il suivra et sa sensibilité à d'éventuelles variations extrêmes.

L'intérêt soudain pour les densités neutres au risque peut s'expliquer par la multiplication des crises boursières tant sur les marchés développés que sur les marchés émergents. Ainsi le crash d'octobre 1987 sur le marché américain, la crise du Système Monétaire Européen en octobre 1992 et, plus récemment, en 1998 la crise russe, suivie de la crise asiatique ont poussé l'ensemble des établissements bancaires, et les banques centrales en particulier, à s'intéresser de plus près à l'anticipation de ces crises en terme de probabilité

par l'intermédiaire de la distribution des actifs sous-jacents aux options.

Longtemps le modèle original de Black et Scholes (1973) pour l'évaluation et la couverture des produits dérivés a été considéré sur les marchés comme l'unique modèle d'évaluation. Ce modèle se base sur l'hypothèse que la volatilité des prix des actifs est constante et indépendant des caractéristiques de l'option, en particulier du prix d'exercice et de la maturité.

Cette situation change dans le milieu des années 80. En effet, suite aux premiers tests sur les prix d'options tels que ceux de Rubinstein (1985), le modèle de Black-Scholes (1973) est fortement remis en cause et les options sur indices ne peuvent plus être évaluées avec une simple formule de Black-Scholes. Depuis le crash de 1987, les volatilités implicites des options sur indices tendent à décroître en fonction du prix d'exercice alors que le modèle de Black-Scholes postule qu'elles restent constantes. Le phénomène qui consiste à tracer la volatilité d'une option en fonction du prix d'exercice est connu sous le nom de smile de volatilité. Nous avons parlé juste avant d'une forme de smile très générale mais de nombreuses formes de smile autres que la décroissance monotone peuvent apparaître. Par exemple, certains jours où l'on observe des options pour des prix d'exercice cotés très éloignés du prix instantané, le smile de volatilités peut exhiber une forme en U. Tomkins (1998) retrouve le même comportement sur les options sur indices issus des marchés japonais, allemands et anglais. Campa, Chang et Reider (1998) exhibent des smiles en U sur les options de change. Ce smile de volatilité est en bijection avec la distribution implicite du sous-jacent de l'option.

L'augmentation progressive du nombre de prix d'exercice cotés rend de plus en plus accessible la connaissance de cette distribution implicite. Il existe en effet une relation, mise en évidence par Breeden et Litzenberger (1978), entre les prix d'options et la densité neutre au risque (DNR). La plupart des méthodes d'extraction de la DNR s'appuient sur cette relation. Cependant la correspondance exacte des distributions risque neutre avec l'ensemble des prix d'options dépend de la complétude du marché. En effet, si les marchés sont incomplets, il existe des états du monde dans lesquels on ne peut pas répliquer l'option. Dans ce cas, les prix des options correspondent à plusieurs distributions neutres au risque et non plus à une unique distribution. C'est le cas par exemple lorsque l'une des variables modélisées est la volatilité. On est alors amené à faire des hypothèses supplémentaires sur la fonction d'utilité et la structure de risque de façon à ne pouvoir ne retenir qu'une seule distribution et un seul prix d'option.

A ce stade, nous pouvons citer plusieurs articles fondamentaux en termes d'analyse

des anticipations de marché à partir de la distribution neutre au risque du sous-jacent. Ces articles présentent soit une nouvelle méthode pour estimer la DNR, soit une comparaison de plusieurs méthodes, soit une analyse d'un événement politique ou économique particulier[1].

Ainsi Bates (1991) analyse le crash de 1987. Il montre que le marché pressentait une chute des cours bien avant le crash, depuis le mois de septembre 1986. Il remarque que durant toute cette période les puts hors-la-monnaie sont beaucoup plus chers que les calls hors-la-monnaie, signe d'une anticipation de chute des prix. Il confirme ce fait en appliquant un processus à sauts aux prix de l'actif et obtient des skewness systématiquement négatives, plus prononcées entre octobre 1986 et février 1987 et entre juin 1987 et août 1987. Il remarque par ailleurs que le marché n'exhibe pas de crainte marquée dans les deux mois qui précèdent le crash. Il en conclut que, s'il y avait eu une bulle sur les marchés d'actions, celle-ci aurait du éclater au milieu du mois d'août et non au milieu du mois d'octobre.

Malz (1996a) utilise un lissage du smile de volatilité pour estimer la densité neutre au risque. Il écrit le smile de volatilité sous la forme d'un polynôme quadratique des prix de risk-reversals, de strangles et de volatilités à-la-monnaie. Il applique cette méthode aux deltas à 25% des options de change à un mois sur dollar/mark, dollar/yen et sterling/mark du 31 mars 1992 au 4 juillet 1995. Malz teste si les moments neutres au risque ont un pouvoir prédictif des taux de change futurs. Il trouve que les écart-types implicites dans les prix d'options sont proches des écart-types actuels calculés à partir des taux de change réalisés. Il conclut également que les moments neutres au risque d'ordre 3 et 4 ont un pouvoir prédictif moins grands que les moments neutres au risque d'ordre moins élevé. Il trouve finalement que les moments neutres au risque exhibent une valeur explicative importante en termes de rebalancement de portefeuille.

Melik et Thomas (1997) appliquent le mélange de lois lognormales introduit par Bahra (1997) pour estimer la densité de distribution des prix futurs du pétrole à partir des options sur contrat à terme de pétrole. Leur méthode est ajustée pour les options américaines et ils l'appliquent à la période couvrant la crise du Golfe du 2 juillet 1990 au 30 mars 1991. Ils comparent les densités obtenues avec celles issues d'une seule loi lognormale et trouvent des résultats significativement différents. Entre autres, ils regardent le cas particulier du mardi 25 octobre 1990, jour où l'Irak a enflammé 300 des 1000 puits

[1] Jackwerth (1999b) donne une excellente revue de toute la littérature existante sur l'estimation de la densité neutre au risque à partir des prix d'options dans un cadre théorique, descriptif et empirique.

de pétrole du Koweit. Le 22 octobre, les anticipations de marché centraient encore les prix futurs autour de 24$ le baril, et le 25 octobre la distribution était clairement centrée autour de 60 à 70$ le baril. Les auteurs trouvent que l'hypothèse d'une seule lognormale décrit plus faiblement les données que l'hypothèse de deux lois lognormales. Ils expliquent que si les analystes avaient utilisé une seule loi lognormale pour leurs anticipations, ils auraient en général surestimé la probabilité d'une rupture et sous-estimé l'impact d'une telle rupture.

Söderlind (1998) estime la densité neutre au risque du taux de change livre/DM, du taux long à 10 ans et du taux court à 3 mois au Royaume-Uni, du taux court à 3 mois allemand en données quotidiennes. La période d'estimation court du 13 juin 1992 au 20 novembre 1992, entourant ainsi le 16 septembre 1992, jour de la sortie de la livre sterling de l'ERM. Il construit des intervalles de confiance à partir des densités et les utilise pour étudier de quelle façon les anticipations des agents ont changé en fonction de la politique monétaire au Royaume-Uni en été et automne 1992. L'auteur trouve les résultats suivants. Premièrement, la période qui précède le "vendredi noir" 16 septembre est marqué par une série de petites crises de la fin du mois d'août au début du mois de septembre 1992. Pendant cette période les distributions des taux d'intérêt futurs au Royaume-Uni et du taux de change futur mark/sterling s'aplatissent car les marchés commençaient alors à croire en la possibilité de taux d'intérêt hauts et d'un réalignement modéré. Deuxièmement, l'annonce de la cible d'inflation anglaise le 8 octobre rabaisse les taux longs anglais et l'incertitude concernant les taux longs futurs. Troisièmement, le Communiqué d'Automne du chancelier anglais le 12 novembre met fin à l'incertain sur la politique monétaire future : les distributions des taux courts futurs anglais se resserrent fortement immédiatement après le discours.

Campa, Chang et Reider (1998) comparent trois méthodes pour estimer la densité neutre au risque du sous-jacent. Ces méthodes sont un lissage du smile par un polynôme de degré 3, un arbre implicite de type Rubinstein et un mélange de lois lognormales. Ils estiment les DNR à partir des options de change sur dollar/mark, dollar/yen, mark/livre, mark/FF et mark/lire en données hebdomadaires du 3 avril 1996 au 5 mars 1997. Ils montrent que malgré d'importantes différences méthodologiques, les trois approches capturent bien l'écart entre la distribution implicite du sous-jacent et la distribution lognormale. Ils donnent trois mesures différentes de la skewness qui sont les risk-reversals, le moment d'ordre 3 de la densité neutre au risque et la taille relative des queues de distribution à droite et à gauche. A partir de ces trois mesures, les auteurs trouvent que dans

la majorité des cas la skewness est positive, signe que les investisseurs anticipent plus une forte appréciation qu'une forte dépréciation entre avril 1996 et mars 1997.

Coutant, Jondeau et Rockinger (2000) comparent la capacité de trois méthodes d'estimation de la DNR, en plus d'un modèle de référence donné par le modèle de Black (1973), à expliquer le comportement futur des taux d'intérêt français. Ces trois méthodes sont une méthode paramétrique donnée par un développement en polynômes d'Hermite autour de la densité, une méthode semi-paramétrique donnée par un mélange de lois lognormales et une méthode non paramétrique utilisant le principe du maximum d'entropie. Les auteurs définissent des critères de sélection et comparent les méthodes selon ces critères à partir des options sur contrat à terme Pibor 3 mois sur 5 dates. Ils trouvent que la méthode qui satisfait le plus grand nombre de critères est le développement en polynômes d'Hermite. Ils construisent des intervalles de confiance du taux Pibor 3 mois avec ce modèle sur la période du 3 février 1997 au 30 juillet 1997 encadrant ainsi les élections législatives anticipées de mai 1997 en France. Les auteurs trouvent que les prix d'options sur contrat à terme Pibor 3 mois reflètent que le marché anticipait la dissolution de l'Assemblée avant même son annonce officielle.

Jondeau et Rockinger (2000c) mettent en œuvre différentes méthodes d'estimation de la DNR dont un mélange de lois lognormales, un développement en polynômes d'Hermite et un développement d'Edgeworth, un processus à sauts et un modèle à volatilité stochastique. Ils comparent ces méthodes aux options de change sur FF/DM sur deux dates. Ils trouvent que le mélange de lois lognormales permet de bien se caler aux prix de marché mais est difficile à interpréter. En revanche, le modèle à sauts permet non seulement un bon calage aux données de marché mais fournit des paramètres faciles à interpréter. Par ailleurs, ils observent grâce aux moments neutres au risque que des événements considérés comme importants dans le court terme peuvent devenir normaux dans le long terme.

Beaucoup de ces articles analysent les anticipations des agents à travers le temps à l'aide d'intervalles de confiance et de séries temporelles des moments neutres au risque estimés mais aucun ne vérifie vraiment la stabilité des méthodes d'estimation de la DNR. Bliss et Panigirtgozlou (1999) testent la stabilité des densités neutres au risque aux différentes "erreurs" qui peuvent apparaître dans les prix d'options. Ces sources d'erreurs sont d'éventuelles erreurs dans l'enregistrement des prix, la non synchronisation entre le prix de l'option et le prix du sous-jacent, la prime de liquidité et la non continuité des prix d'options. La technique des auteurs consiste à réestimer les densités neutres au risque sur des échantillons de prix d'options perturbés de façon aléatoire. Le test est appliqué

au mélange de deux lois lognormales et à un lissage de smile par un polynôme de degré 3 avec une contrainte sur la courbure. Les résultats présentent une forte évidence de la supériorité en terme de stabilité du lissage de smile sur le mélange de lois lognormales. Les auteurs concluent que certaines méthodes d'estimation de la DNR ne permettent pas d'estimer avec précision les moments d'ordre 3 et 4. Ils suggèrent que les études empiriques qui utilisent les variations de la skewness et de la kurtosis à travers le temps devraient désormais prendre en compte ce résultat. Ils expliquent la supériorité du lissage de smile sur le mélange de lois par le fait que cette dernière méthode est très sensible aux problèmes de convergence lors de l'optimisation.

Il convient de rappeler que la distribution du sous-jacent extraite des options repose sur la notion d'univers neutre au risque et qu'en conséquence la lecture de ces informations peut être biaisée. Aucun papier ne donne de tests statistiques de significativité, ni ne contrôle d'éventuels facteurs externes qui pourraient être la cause de la forme particulière d'une distribution. Des études récentes se tournent vers la relation théorique entre les densités sous les univers statistique et neutre au risque et la fonction d'utilité d'un agent représentatif.

Rosenberg et Engle (1997) estiment les préférences d'un investisseur en les supposant variantes à travers le temps. Leur méthodologie repose sur l'estimation des probabilités des prix d'état, celles-ci pouvant s'écrire comme le rapport du prix par unité discret dans un état sur la probabilité discrète d'être dans cet état. La première quantité nécessite la connaissance de la densité neutre au risque discrète et la seconde la connaissance de la densité objective discrète. La méthode employée pour estimer la densité neutre au risque est un lissage de smile par un polynôme quadratique et la densité objective est estimée à l'aide d'un GARCH avec une composante intégrant les effets de levier. Engle et Rosenberg estiment leur modèle en données quotidiennes sur les options sur indice S&P500 et les rendements du S&P500 de 1992 à 1996. Ils trouvent que les préférences des agents varient beaucoup à travers le temps avec un degré d'aversion au risque quotidien fortement positivement autocorrélé, négativement corrélé avec les rendements du S&P500 et positivement corrélé avec l'écart entre la volatilité implicite et la volatilité objective.

Aït-Sahalia et Lo (2000) comparent deux mesures de Value-at-Risk (VaR) différentes. L'une est obtenue grâce à la probabilité neutre au risque estimée à partir des prix d'option et est notée Economic-VaR (E-VaR). L'autre est obtenue grâce à la probabilité objective estimée à partir des rendements réalisés et est appelée Statistical-VaR (S-VaR). Les auteurs estiment les deux densités à partir des options sur S&P500 du 4 janvier 1993

au 31 décembre 1993 en utilisant pour les deux densités une méthode de lissage par une fonction de noyau. Ils montrent que les deux VaR conduisent à des mesures du risque assez différentes. Ils en concluent que la E-VaR incorpore des aspects du risque non capturés par la S-VaR. Ils reconnaissent la complexité et le coût de calcul que nécessite une méthode non paramétrique.

Jackwerth (1999a) utilise la relation existant entre la densité neutre au risque, la densité subjective et la fonction d'aversion au risque pour retrouver la fonction d'aversion au risque implicite dans les prix d'options. La méthode qu'il utilise pour estimer la DNR est un arbre binomial implicite de Rubinstein légèrement modifié, la minimisation se fait sur les volatilités implicites au lieu des probabilités implicites. La densité statistique est obtenue par un estimateur de noyau. L'auteur estime la DNR à partir des options sur S&P500 minute par minute du 2 avril 1986 au 29 décembre 1995 et estime la densité statistique à partir des rendements réalisés du S&P500 du 2 janvier 1928 au 29 décembre 1995. L'auteur trouve que la fonction d'aversion au risque obtenue est largement cohérente avec la théorie économique standard durant la période précédant le crash de 1987, mais trouve des fonctions d'aversion au risque partiellement négatives et croissantes juste après le crash. Il remarque également que les fonctions d'aversion au risque sont très stables aux choix faits pour l'estimation.

A l'exception de Rosenberg et Engle (1997), ces études font l'hypothèse que les préférences des agents et leur degré d'aversion au risque sont constants dans le temps. L'utilisation de méthodes non paramétriques, si elles présentent un certain attrait puisqu'elles ne nécessitent pas d'hypothèse sur le processus sous-jacent, empêchent de supposer que les préférences des agents sont variantes avec le temps. Or il est légitime de penser que l'aversion au risque d'un agent évolue à travers le temps.

Coutant (1999) estime la fonction d'aversion au risque des investisseurs en supposant que celle-ci est variante dans le temps. L'auteur estime d'une part la densité neutre au risque en appliquant un développement en polynômes d'Hermite et d'autre part la densité statistique en utilisant une densité conditionnellement autorégressive avec des moments d'ordre 3 et 4 dépendant du temps. Elle estime les densités sous les deux probabilités à partir des options sur indice CAC 40 et des rendements réalisés du CAC 40 de janvier 1995 à juillet 1998 en données quotidiennes. Elle montre que les fonctions d'aversion au risque implicites obtenues sont assez différentes de celles obtenues avec un modèle de Black-Scholes. Celles-ci permettent de mieux prendre en compte le comportement des investisseurs en exhibant des fonctions fortement décroissantes en fonction du prix de

l'actif.

L'objectif général de la thèse est l'étude du processus implicite du prix de l'actif sous-jacent et son apport en terme de contenu en information dans les prix d'options. A cette fin, deux outils seront utilisés : d'une part les options sur contrat à terme de taux d'intérêt dans le but d'analyser les réactions sur les marchés de taux, d'autre part les options sur indice qui permettra l'analyse des réactions sur les marchés d'actions. Dans une première partie, nous décrirons les marchés sur lesquels nous allons travailler, et étudierons les caractéristiques des produits utilisés. Puis nous analyserons le problème posé par cet objectif. Dans une seconde partie, nous ferons une étude descriptive et empirique de différents modèles d'estimation de la densité neutre au risque du sous-jacent. Nous comparerons la capacité de ces modèles à dégager les sentiments du marché sur un événement économique ou politique particulier et essaierons de retenir le ou les meilleurs de ces modèles d'après plusieurs critères bien précis de comparaison. Enfin, dans une troisième partie, nous passerons en revue les différentes applications que l'on peut tirer de l'estimation de la densité neutre au risque du sous-jacent. Nous verrons qu'il existe plusieurs applications parmi lesquelles l'étude descriptive temporelle des réactions du marché à un événement, les tests d'efficience du marché des options à travers les volatilités, l'apport de l'information extraite des options dans l'amélioration des tests traditionnels de théorie des anticipations, l'estimation de la fonction d'aversion au risque ou du coefficient d'aversion au risque et enfin la possibilité de stratégies de trading que l'on peut déduire du biais entre les densités statistique et neutre au risque.

Première partie

Cadre institutionnel et présentation du problème

Chapitre 1

Marchés et instruments financiers

Nous décrivons dans ce chapitre la Bourse de Paris, d'où sera issue la totalité des données qui interviendront dans le cadre empirique de cette thèse. Nous présenterons également les caractéristiques des différents instruments financiers que nous serons amenés à utiliser.

1.1 La Bourse de Paris

La Bourse de Paris n'est pas seulement un marché, ou un ensemble de marchés. C'est aussi une entreprise dénommée Société des Bourses Françaises (SBF), et plus connue sous le nom de ParisBourse SA. Cette entreprise organise et assure le fonctionnement et la promotion des marchés boursiers français : Premier Marché, Second Marché, Nouveau Marché, MATIF, MONEP[1], qui bénéficient chacun du label de marché réglementé et qui offrent ainsi aux investisseurs les meilleures garanties de liquidité, d'égalité et de sécurité.

1.1.1 Organisation

Dotée de statut d'institution financière spécialisée, ParisBourse^{SBF} SA est une société anonyme privée dont les actions sont détenues par les membres du marché. ParisBourse^{SBF} SA établit les règles du marché qui sont soumises à l'approbation du Conseil des Marchés Financiers (CMF), prononce l'admission des valeurs à la cote, décide de l'adhésion de ses membres, gère les systèmes informatiques de cotation, assure la publicité des négociations

[1] Jusqu'au 1er juin 1999, le Nouveau Marché, le MATIF et le MONEP étaient respectivement gérés par la Société du Nouveau Marché, Matif SA, Monep SA, filiales à 100% de ParisBourse^{SBF} SA, qui a procédé à cette date à leur absorption.

et la diffusion des cours, enregistre les négociations entre les membres du marché dans le cadre d'une chambre de compensation Clearnet^{SBF} SA, sa filiale à 100% garantissant ainsi le paiement des titres vendus et la livraison des titres achetés, offre aux émetteurs les services du marché pour la cotation de leurs titres et la réalisation de leurs opérations financières.

Selon le cas, les titres sont négociés au comptant ou en règlement mensuel :

- Le marché au comptant : sur ce marché sont cotées les actions des sociétés françaises et étrangères les moins actives de la cote. Les opérations sont dénouées le jour même de leur exécution. Le dépôt des capitaux correspondant à un achat s'effectue en même temps qu'est donné l'ordre d'achat par le client. De même, le dépôt du titre de propriété du vendeur s'effectue en même temps que l'ordre de vente. Les ventes et les achats à découvert ne sont pas possibles sur ce marché.
- Le marché à règlement mensuel (RM) : les valeurs françaises cotées sur ce marché sont les actions des plus grandes sociétés cotées à la bourse de Paris. On compte 200 valeurs françaises et 70 actions étrangères traitées sur le marché à règlement mensuel. Ce marché n'existe qu'à la Bourse de Paris. Une opération d'achat ou de vente sur le RM est arrêtée dans toutes ses conditions le jour de la négociation, mais le règlement et la livraison des titres sont reportés à la fin du mois. En attendant le dénouement de l'opération, l'acheteur et le vendeur ont l'engagement de payer pour l'acheteur, ou de livrer les titres pour le vendeur. Les opérations effectuées sur le marché à règlement mensuel sont dénouées le jour de la liquidation, mais elles peuvent être reportées jusqu'à la liquidation suivante.

1.1.2 Les instruments financiers

Les actions

Une action[2] est un titre d'associé, une valeur à revenu variable, qui représente une fraction du capital social. A chaque action ordinaire sont attachés un droit de vote, un droit au dividende et un droit à l'information.

Les indices

L'évolution d'une place boursière se mesure par des indices synthétiques qui résument

[2] Pour une description complète du marché français des actions et de leur méthode de cotation, on pourra se réferrer à Hamon et Jacquillat (1992).

un grand nombre d'observations. Les indices permettent aussi de mesurer les performances boursières des investisseurs et des gestionnaires de portefeuilles. Ils servent de support aux contrats à terme et aux options négociées sur les marchés dérivés. La place de Paris dispose d'une gamme complète d'indices boursiers : le CAC 40, le SBF 120, le SBF 250 et le MIDCAC. Le CAC 40 qui sert de base à notre étude fait l'objet d'une attention particulière.

Le CAC 40 est lancé en juin 1988 (base 1000 au 31 décembre 1987) et devient rapidement une référence internationale. Il est calculé à partir d'un échantillon de 40 valeurs cotées sur le Premier Marché à règlement mensuel. Le choix des titres repose sur des critères boursiers et économiques. La nécessité de fournir aux marchés dérivés (options et contrats à terme sur indice) un instrument adapté aux opérations de couverture, d'arbitrage et de spéculation entraîne le suivi constant de la liquidité des valeurs de l'indice. De ce fait, la détermination de la composition de l'échantillon s'effectue selon les critères suivants :

- un critère de taille : les valeurs éligibles figurent parmi les 100 premières capitalisations boursières[3] du RM,
- des critères de liquidité : mesurant l'étendue et la profondeur du marché de chaque valeur. L'étendue du marché est déterminée par le montant des transactions, le taux de rotation[4] quotidiens calculés en moyenne quotidienne sur 12 mois et le flottant[5]. L'impact des transactions est mesuré par la fourchette et la volatilité calculées en moyenne sur 12 mois.

La valeur de l'indice CAC 40 I_t est donnée par la moyenne arithmétique des cours des titres composant l'indice, pondérée par leur capitalisation boursière :

$$\begin{aligned} I_t &= 1000 \times \frac{\text{capitalisation boursière échantillon en t}}{\text{capitalisation de base ajustée en t}} \\ &= 1000 \times \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(Q_t^i \times C_t^i\right)}{K_t \times \sum_{i=1}^{N} \left(Q_0^i \times C_0^i\right)}, \end{aligned}$$

[3] La capitalisation boursière d'une société est égale au produit du cours de l'action par le nombre de titres émis. Par agrégation, il est possible de calculer la capitalisation de l'ensemble des actions. La capitalisation totale est la valeur boursière de tous les titres inscrits à la cote d'une place financière. Elle dépend de l'évolution des cours et du nombre de titres cotés. Elle enregistre les variations consécutives aux fluctuations des cours et aux opérations en capital. Les introductions en bourse, les privatisations, les augmentations de capital renforcent la capitalisation boursière. En revanche les radiations réduisent la capitalisation boursière. Elles ont pour origine les nationalisations, les fusions-absorptions, les offres publiques d'achat ou d'échange, l'insuffisance des transactions.

[4] Le taux de rotation est le rapport du nombre de titres échangés quotidiennement au nombre de titres inscrits.

[5] Le flottant est l'estimation de la part du capital susceptible de circuler dans le public.

où t est le jour de calcul, N est le nombre de valeurs dans l'échantillon, Q_t^i est le nombre de titres inscrits de la valeur i au jour t, C_t^i est le cours de la valeur i au jour t, $\sum_{i=1}^{N}(Q_0^i \times C_0^i)$ est la capitalisation boursière de base, K_t est le coefficient d'ajustement au jour t de la capitalisation boursière de base. Une valeur qui ne répond plus aux critères définis ci-dessus sort de l'échantillon et est remplacée par une autre. L'indice CAC 40 est calculé en continu et à chaque nouveau cours coté de l'une des valeurs de l'échantillon. Il est diffusé toutes les 30 secondes en temps réel de 10h à 17h, sur les vecteurs d'information boursière. En début de séance de 8h30 à 10h et tant que les valeurs de marché n'ont pas fait l'objet d'une première cotation, un éclaireur donne la tendance du marché. En cours de séance, l'éclaireur peut se substituer à l'indice de manière exceptionnelle lorsque plus de 35% de la capitalisation boursière de l'échantillon n'est momentanément plus susceptible d'être cotée ; le dernier indice diffusé devient alors le nouvel indice de référence. Dès que le poids des valeurs cotées est de nouveau supérieur à 65%, un niveau d'indice est diffusé après un délai de temporisation de 5 mn.

Au niveau européen, des indices européens Dow Jones STOXX ont été développés par les Bourses de Paris, Francfort et Zurich en partenariat avec la société Dow Jones. Ils ont vocation à compléter les indices français, et non à les remplacer.

Si les actions qui composent l'indice paient un ou plusieurs dividendes jusqu'à la date d'échéance T, il faut en tenir compte dans la valeur des options. En effet, le cours des actions incorpore la valeur actualisée des dividendes qui vont être versés ; mais comme la détention des options ne permet pas de percevoir les dividendes et que la valeur de l'indice baisse lors du versement des dividendes, il convient de retrancher de la valeur de l'indice la somme des dividendes futurs actualisés, notée D :

$$D = \int_t^T \left(\sum_{i=1}^{n} D_{is} w_{it} \right) B(t,s) ds \tag{1.1}$$

avec

- D_{is} est le montant du dividende versé par l'action de rang i à l'instant $s > t$
- w_{it} est le coefficient de pondération de l'action i dans l'indice à la date t, i.e. si on note A_{it_0} et N_{it_0} respectivement le cours de l'action et le nombre de titres inscrits de l'action i à une date $t_0 < t$, et I_{t_0} le cours de l'indice à cette même date

$$w_{it} = \frac{N_{it}}{\sum_{i=1}^{40} N_{it_0} A_{it_0}} \tag{1.2}$$

– $B(t,s)$ est le facteur d'actualisation à l'instant t pour une période $s-t$. Dans l'ensemble des travaux empiriques de la thèse, on fera l'hypothèse que le taux sans risque est connu. Celui-ci sera calculé par une interpolation du taux au jour-le-jour et des taux EURO à 1 mois, 3 mois, 6 mois et 1 an. Dans ce cas, on a $B(t,s) = e^{-r_t(s)(s-t)}$.

1.1.3 L'indice CAC 40 : propriétés statistiques

On note $r_t = \ln(S_{t+1}/S_t)$ le rendement de l'indice S entre t et $t+1$. Le tableau (1.1.1) reporte un résumé des statistiques descriptives de la distribution historique du rendement du CAC 40. Une skewness négative et un excès de kurtosis positif indiquent une déviation significative de la distribution historique par rapport à la loi normale. La statistique de test de Jarque et Bera (1980) permet de rejeter l'hypothèse nulle de normalité à n'importe quel niveau de significativité.

La statistique de Ljung-Box (1978) calculée avec 20 retards permet de détecter des corrélations sérielles des rendements. Diebold (1988) propose une statistique de Ljung-Box corrigée pour l'hétéroscédasticité LB_c. On note que les corrélations sérielles des rendements au carré sont significativement plus grandes que les corrélations sérielles des rendements, impliquant que de larges variations tendent à être suivies par de larges variations de n'importe quel signe.

Tableau 1.1.1 : Statistiques descriptives des rendements quotidiens du CAC 40 pour la période de janvier 1987 à décembre 1998.

$\rho(h)$ est l'autocorrélation d'ordre h. $LB_c(20)$ est la statistique de Ljung-Box corrigée pour l'hétéroscédasticité pour le test de nullité des 20 premières autocorrélations des rendements. Sous l'hypothèse de nullité, cette statistique est distribuée comme un χ^2 avec 20 degrés de liberté. W est la statistique de Jarque et Bera qui permet de faire un test de normalité.

	x_t	x_t^2
Taille de l'échantillon	1040	1040
Moyenne	$0.70\ 10^{-3}$	$0.16\ 10^{-3}$
Ecart-type	$1.3\ 10^{-2}$	$0.33\ 10^{-3}$
Skewness	-0.161	5.181
Excès de kurtosis	2.428	36.042
$\rho(1)$	0.029	0.208
$\rho(5)$	-0.007	0.128
$\rho(10)$	0.043	0.148
$\rho(20)$	0.074	0.097
$LB_c(20)$	44.53	473.55
W	268.44	60943.04

Figure 1.1.a: indice CAC 40:
periode de janvier 1990 a decembre 1999

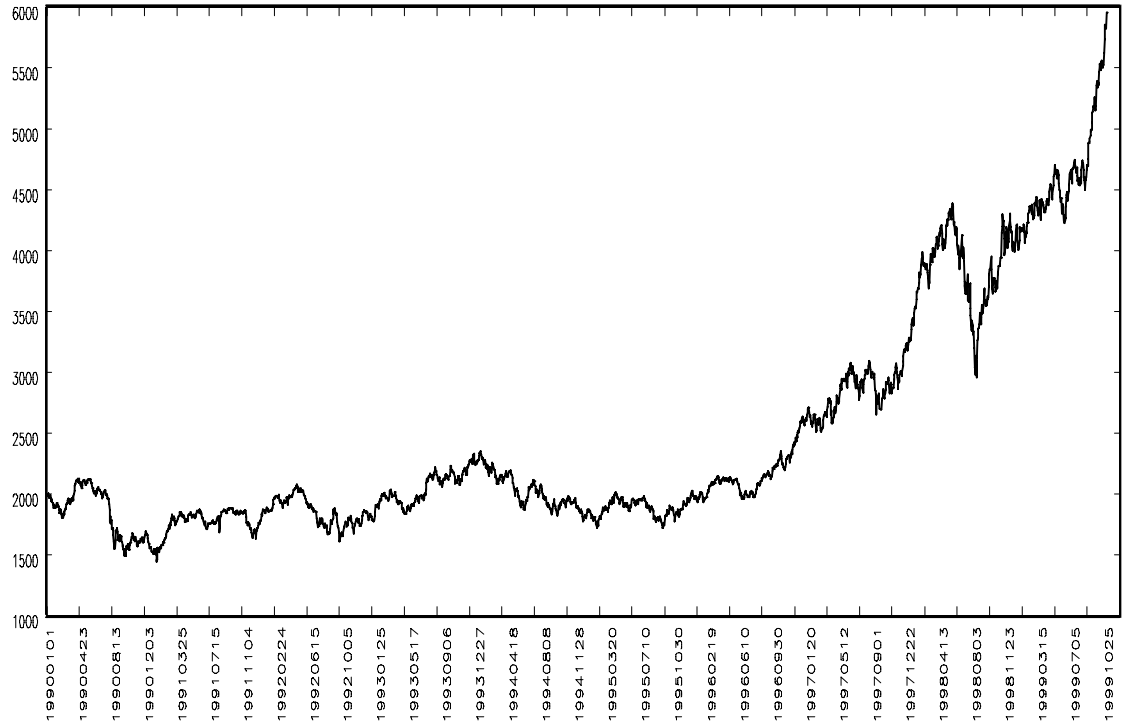
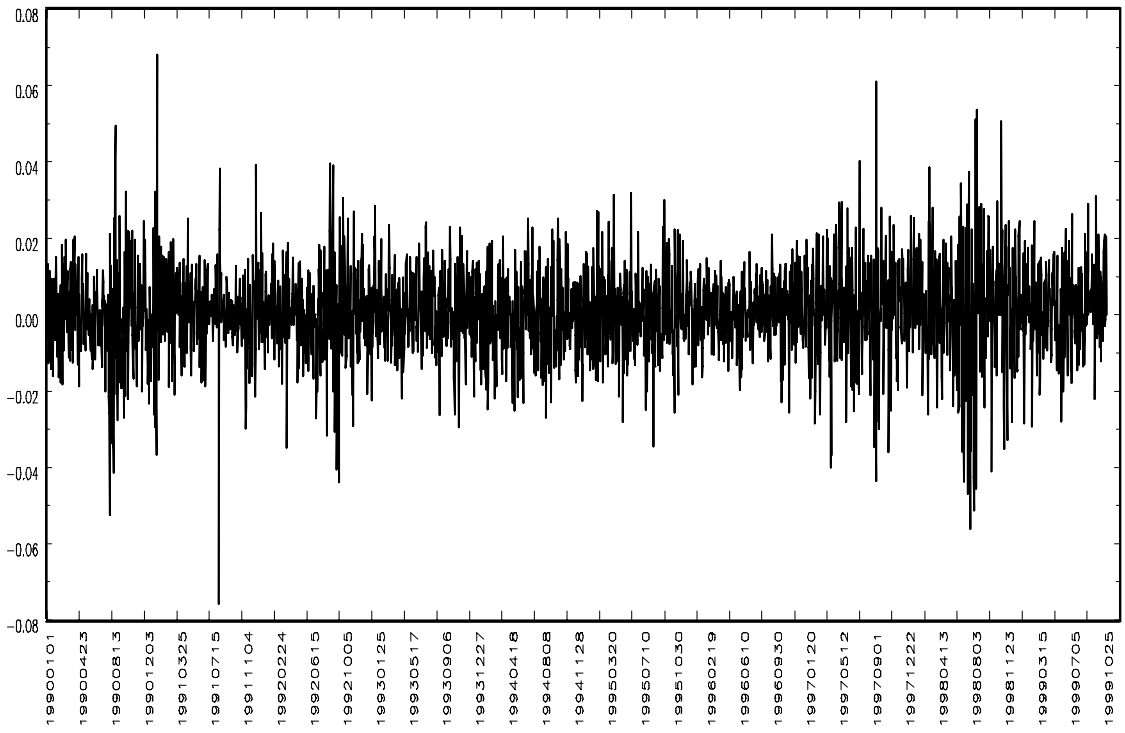


Figure 1.1.b: rendements instantanes de l'indice CAC 40:
periode de janvier 1990 a decembre 1999



1.2 Les marchés dérivés

1.2.1 Le MONEP

Historique

Créé en 1987, dans le cadre des structures de la Bourse de Paris, le MONEP (Marché des Options Négociables de Paris) est le marché réglementé des options négociables sur valeurs mobilières. L'accès à la négociation sur le MONEP est réservé aux seules sociétés de bourse, agréées par le Conseil des Bourses de Valeurs (CBV) pour être membres des marchés organisés, et aux sociétés de contrepartie, contrôlées par une société de bourse, pour assurer les fonctions de teneur de marché. La réglementation, le contrôle et le cas échéant les procédures et sanctions disciplinaires du MONEP sont établis et conduits par le CBV, les entreprises de marché, la Société des Bourses Françaises (SBF) et la Société de Compensation des Marchés Conditionnels (SCMC). Sa gestion est assurée par la SBF ; la compensation est assurée conjointement par la SBF - pour ce qui est de la garantie de bonne fin des contrats assurée aux membres compensateurs - et par la SCMC - pour ce qui concerne l'enregistrement et la mise à jour des positions.

La première démarche du MONEP a consisté à développer le nombre des actions support d'options. Le 10 septembre 1987, le MONEP ouvrait avec à son actif trois classes d'options portant sur les actions Lafarge, Paribas et Peugeot. A côté de la famille des options sur actions, qui a constitué sa vocation première, le MONEP a entrepris dès 1988 une autre diversification avec la création d'une option sur indice. L'option sur indice CAC 40 naît le 8 novembre 1988 et s'affirme rapidement.

Organisation

Le MONEP est un marché à l'organisation différenciée en groupes de cotation fonctionnant de la façon suivante : sur chaque classe d'options sur actions cotée en continu, un "teneur de marché spécialiste" est chargé d'une fonction spécifique d'encadrement du marché et agit en conséquence avec des "teneurs de marché contrepartistes" sur un système de marché entièrement automatisé ; sur les classes d'options sur indice, une organisation de marché mixte combine l'utilisation d'un parquet, où officient en continu des teneurs de marché et des commis courtiers, et d'un carnet d'ordres public automatisé.

L'option sur indice CAC 40

Historique et définition Bien que leur principe soit bien connu depuis l'Antiquité, les options ne sont apparues qu'au XVIIIe siècle en Angleterre. Les marchés des options ne prirent leur essor qu'en 1973 avec l'ouverture à Chicago d'un marché d'options négociables, le Chicago Board Options Exchange (CBOE). Cette même année, Black et Scholes (1973), dans le Journal of Political Economy, et Merton (1973), dans le Bell Journal of Economics and Management Science, publient deux articles fondamentaux sur l'évaluation des options.

Un contrat d'option confère le droit, et non l'obligation, de vendre ou d'acheter un actif financier ou physique, à un prix défini à l'avance (le prix d'exercice ou strike), à - ou jusqu'à - une date fixée, appelée échéance. Si ce droit ne peut être exercé qu'à l'échéance, on parle d'option européenne. Si l'option peut être exercée à n'importe quel moment avant la date d'expiration, on parle d'option américaine. Le support, ou sous-jacent de l'option, peut être de nature diverse : action, obligation, devise, contrat à terme, indice boursier,... Sur les marchés organisés (le MONEP, par exemple), l'acheteur et le vendeur peuvent à tout moment fermer leur position en effectuant une opération en sens contraire à leur opération initiale. Comme pour la plupart des contrats à terme, les options se dénouent avant l'échéance.

Les options appartiennent aux marchés dérivés. Il existe deux types d'option : les options d'achat (ou calls) et les options de vente (ou puts). Le prix de l'option, appelé prime, est payé immédiatement au vendeur par l'acheteur. Dans le cas d'une option d'achat, celui-ci a l'obligation de livrer le sous-jacent au prix d'exercice.

Notations et valorisation Dans toute la suite de la thèse, les notations suivantes seront utilisées :

- L'instant présent t.
- L'échéance T de l'option ; la durée $\tau = T - t$, appelée maturité, qui sépare une option de son échéance exerce un double effet sur la valeur de la prime, à travers la volatilité d'une part et le loyer de l'argent d'autre part. Plus l'échéance est lointaine, plus la probabilité de voir le cours du support s'écarter fortement du prix d'exercice (et donc pour l'acheteur de réaliser un profit) est élevée. Cette influence positive de la durée de vie $T-t$ sur la valeur des options due à la volatilité est commune au call et au put. La seconde influence, celle du loyer de l'argent, est différente pour les deux types d'option. Pour le call, plus l'échéance est éloignée, plus tardivement s'effectuera

le décaissement du prix d'exercice si l'option est exercée et, par conséquent, plus l'option est chère. Pour le put, le facteur taux d'intérêt joue un rôle négatif puisqu'il est préférable d'encaisser le prix d'exercice le plus tôt possible.

- La valeur S_t du titre sous-jacent à l'instant t ; quand S_t augmente, la valeur du call augmente et la valeur du put diminue.
- Le prix d'exercice K ; plus ce dernier est élevé, plus le call est bon marché et plus le put est cher puisque, en cas d'exercice, K sera payé par le détenteur du call et encaissé par le détenteur du put.
- La volatilité implicite σ du titre sous-jacent ; celle-ci est mesurée par l'écart-type de la distribution du taux de rentabilité du support. Plus le cours du titre est volatile, plus il a de chances, au terme d'une période donnée, de s'élever au-dessus du prix d'exercice et plus il a de chances aussi de descendre au-dessous de celui-ci. Donc le call et le put sont d'autant plus chers que la volatilité du sous-jacent est forte. Pour chaque option, on peut calculer la volatilité implicite en inversant la formule de Black et Scholes dont nous verrons plus loin le calcul.
- Le taux d'intérêt sans risque $r_t(T)$; les calls sont d'autant plus élevés et les puts d'autant moins chers que les taux d'intérêt sont élevés.
- Le taux de dividende versé par le sous-jacent (dans le cas des actions par exemple) $d_t(T)$: il profite à l'acheteur d'une option de vente car il aura à livrer un titre moins cher.
- La valeur $F_{t,T}$ du titre forward à l'instant t pour l'échéance T (que l'on notera F_t lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté sur T) ; $F_{t,T}$ représente l'équivalent aujourd'hui du prix du sous-jacent S_t à la date T. Dans le cas d'un sous-jacent versant des dividendes, le forward $F_{t,T}$ est tel que

$$F_{t,T} = e^{(r_t(T)-d_t(T))(T-t)} S_t,$$

et dans le cas des options sur contrat à terme, $F_{t,T}$ représente directement le sous-jacent.

- Le prix $C(t,S,K,T)$ le prix d'une option d'achat sur un support S_t en t, de prix d'exercice K et de maturité $T-t$. De même le prix d'une option de vente est donné par $P(t,S,K,T)$.

A l'instant T, le call $C(T,S,K,T)$ vaut zéro si le support a une valeur inférieure au prix d'exercice K, et vaut la différence $S_T - K$ dans le cas contraire. L'acheteur acquiert en

payant K, le support qu'il peut immédiatement revendre pour S_T :

$$C(T, S, K, T) = \max(0, S_T - K) \tag{1.3}$$

A l'instant T, le put $P(T, S, K, T)$ vaut zéro si le support a une valeur supérieure au prix d'exercice K, et vaut la différence $K - S_T$ dans le cas contraire. L'acheteur cède pour K le support qu'il peut obtenir sur le marché en payant S_T :

$$P(T, S, K, T) = \max(0, K - S_T) \tag{1.4}$$

Description de la base Les options sur actions françaises sont de deux types. Les options à court terme (9 mois maximum) et de type américain, c'est-à-dire exerçables à tout moment et les options à long terme (2 ans maximum) et de type européen, c'est-à-dire exerçables seulement à l'échéance. Les options sur indice, de type européen, portent sur l'indice CAC 40 et les indices Dow Jones STOXX^{SM} 50, Dow Jones Euro STOXX^{SM} 50 et les indices sectoriels Dow Jones STOXX^{SM}. Les options sur indice, de type américain, portent sur l'indice CAC 40.

La base des options sur CAC 40 est fournie par la SBF-Bourse de Paris qui procure chaque mois un CD-ROM incluant les cotations du CAC 40 enregistré toutes les 30 secondes, ainsi que les prix horodatés des options sur actions cotés sur le MONEP. La base de données comprend l'heure de cotation, la maturité de l'option, le prix d'exercice, le prix de clôture, le prix de compensation pour tous les calls et puts, le volume de transaction, le nombre de positions ouvertes sur une période allant du 1^{er} janvier 1995 au 31 décembre 1998. Les prix des options sur CAC 40 doivent être ajustés pour les dividendes. Il existe plusieurs façons de faire face à cette difficulté. La première, détaillée dans le paragraphe précédent des dividendes historiques, est celle retenue par Bakshi, Cao et Chen (1997). Mais ce calcul est laborieux et les dividendes futurs difficiles à obtenir. Une deuxième solution est proposée par Aït-Sahalia, Wang et Yared (1998) qui font un calcul implicite du taux de dividendes en utilisant la relation d'arbitrage spot-forward. Si l'on note S_t le cours du sous-jacent à l'instant t le prix du futur F_t est donné par :

$$F_t = e^{(r_t(T) - d_t(T))\tau} S_t. \tag{1.5}$$

On applique alors la parité call/put qui nécessite que la relation suivante soit valable sur

l'option à-la-monnaie[5] en particulier :

$$C^{\mathrm{atm}} - P^{\mathrm{atm}} = e^{-r_t(T)\tau}(F_t - K^{\mathrm{atm}}) \tag{1.6}$$

où C^{atm} et P^{atm} représentent respectivement le prix du call et du put à-la-monnaie K^{atm}. Enfin une troisième solution consiste à utiliser la relation de parité call/put sur l'ensemble des prix d'exercice et d'estimer la régression suivante :

$$e^{r_t(T)\tau}(C_i - P_i) = \alpha + \beta K_i + \varepsilon_i,\ i = 1, ..., m$$

où m est le nombre de prix disponibles. α représente la constante dans la régression et correspond au prix du sous-jacent F_t. Il suffit ensuite d'appliquer (1.5) pour retrouver le taux de dividendes implicite. Après avoir tester les 3 méthodes, il nous est apparu que celle qui donne les meilleurs résultats est celle de Aït-Sahalia, Wang et Yared (1998c), c'est donc cette méthode que nous utilisons dans la suite de la thèse.

Les prix intégrés dans la base de données peuvent présenter des aberrations (dues par exemple à des erreurs de saisie). Il est donc nécessaire de filtrer la base avant de l'utiliser en enlevant les prix inférieurs à 3/8 ; on note qu'en général, les options hors-la-monnaie sont plus cotées que les options dans-la-monnaie ; donc si pour un même prix d'exercice, le call et le put sont tous les deux cotés, on conserve celui qui est hors-la-monnaie. Notons également que la maturité la plus liquide est la première maturité (inférieure à un mois) et que la liquidité décroît lorsque l'échéance s'éloigne.

Le tableau (1.2.1) montre les caractéristiques de l'échantillon de la base des options. Les volumes moyens journaliers en milliers de francs des options sur CAC 40 pour chaque maturité y sont reportés. Chaque volume est calculé en fonction de l'écart du prix d'exercice de la monnaie défini par F_t/K. On note que les options très loin en dehors de la monnaie sont très échangées. On remarque également une augmentation progressive des volumes, particulièrement entre 1997 et 1998 où les montants échangés ont crû 82.7%.

[5] L'option à-la-monnaie est déduite en minimisant la quantité $|K_i - F|$ pour tous les prix d'exercice $i = 1, ...$

Tableau 1.2.1 : Résumé des statistiques pour l'échantillon des options

Moyenne des volumes de transactions du CAC 40 en milliers de francs pour chaque année de l'échantillon de 1995 à 1998 en fonction de la *moneyness*.

F_t/K	1995			1996		
	Calls	Puts	All	Calls	Puts	All
< 0.95	238	10	248	158	2	160
$0.95 - 0.97$	293	15	308	246	8	254
$0.97 - 0.99$	384	65	449	386	32	418
$0.99 - 1.01$	229	197	426	308	171	479
$1.01 - 1.03$	71	290	361	99	300	399
> 1.03	32	506	538	69	596	665
Total	1247	1083	**2330**	1266	1109	**2375**
F_t/K	1997			1998		
	Calls	Puts	All	Calls	Puts	All
< 0.95	281	12	293	815	79	894
$0.95 - 0.97$	237	17	254	401	54	455
$0.97 - 0.99$	280	53	333	390	117	507
$0.99 - 1.01$	211	169	380	341	225	566
$1.01 - 1.03$	85	244	329	161	282	443
> 1.03	121	905	1026	165	1748	1913
Total	1215	1400	**2615**	2273	2505	**4778**

Figure 1.2.a: volumes sur les options sur CAC 40 pour la premiere maturite:
periode de janvier 1995 a decembre 1998

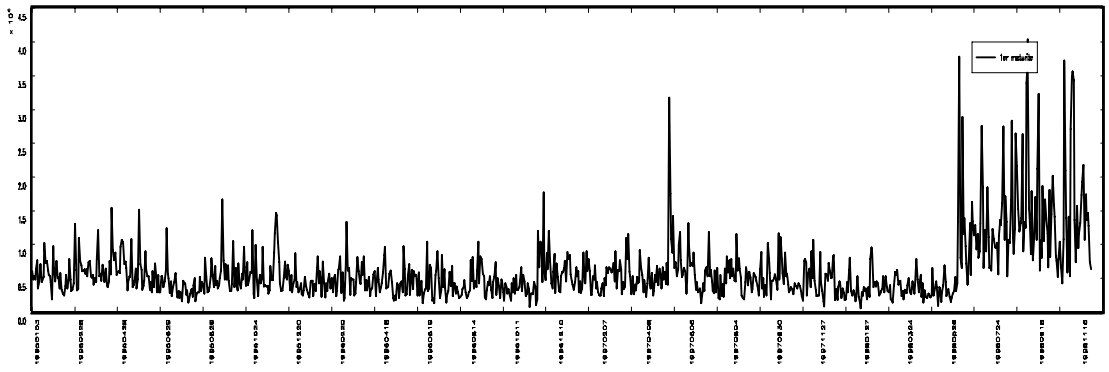


Figure 1.2.b: volumes sur les options sur CAC 40 pour la seconde maturite:
periode de janvier 1995 a decembre 1998

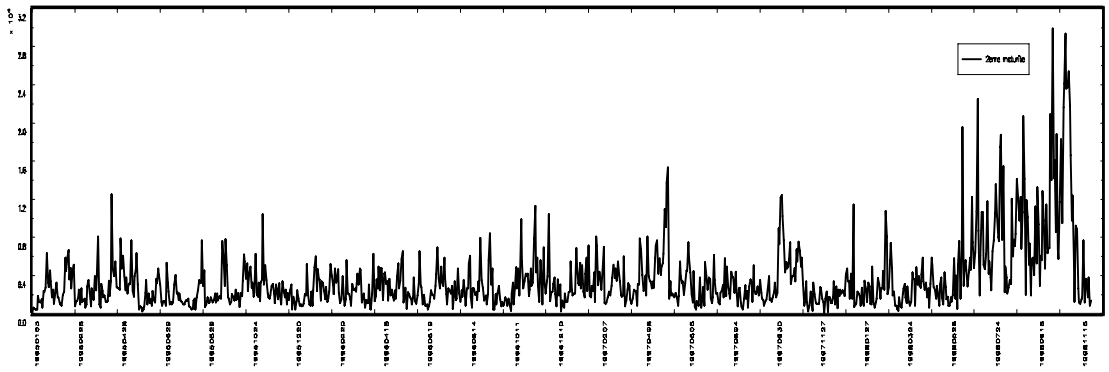


Figure 1.2.c: volumes sur les options sur CAC 40 pour la troisieme maturite:
periode de janvier 1995 a decembre 1998

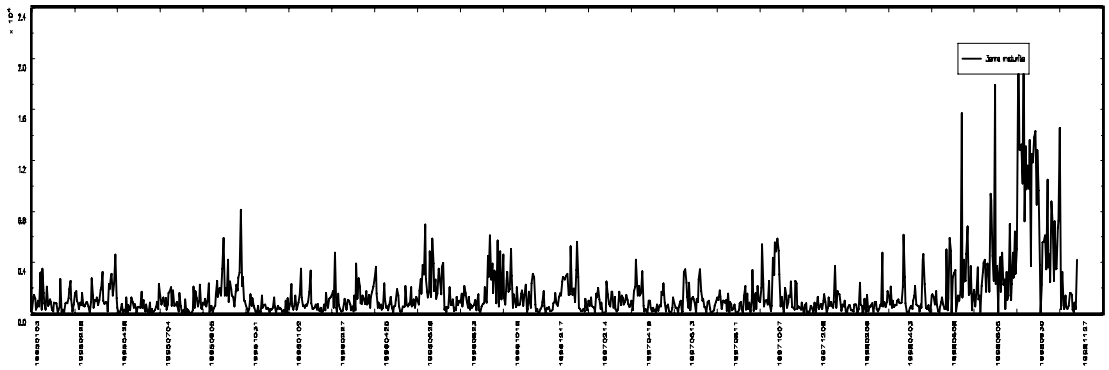
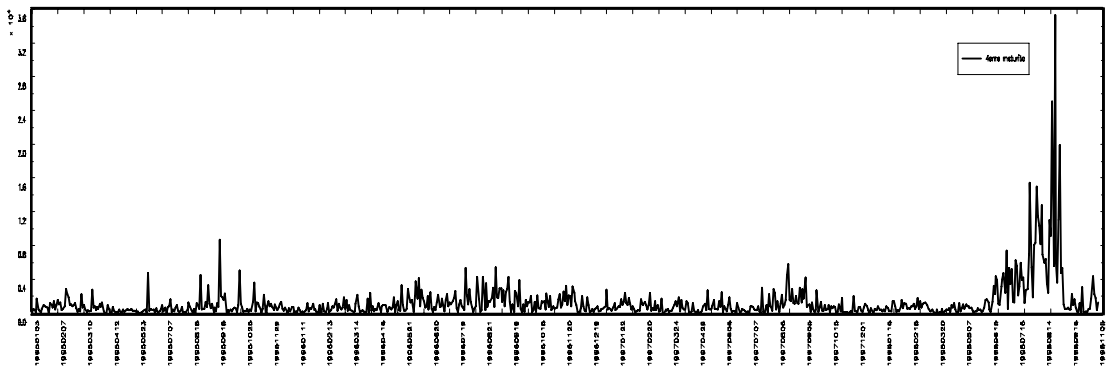


Figure 1.2.d: volumes sur les options sur CAC 40 pour la quatrieme maturite:
periode de janvier 1995 a decembre 1998



1.2.2 Le MATIF

Historique

Les années 70 sont marquées, aux Etats-Unis et dans les autres pays industrialisés, par une période d'instabilité économique caractérisée par une hausse de l'inflation. Ce phénomène s'accompagne d'importantes fluctuations des taux d'intérêt qui font office d'instruments directeurs des politiques économiques. Créés en 1975 sur les bourses de commerce de Chicago, et aujourd'hui développés sur la plupart des grandes places financières, les marchés à terme de taux d'intérêt apparaissent comme une réponse au besoin de gestion du risque de variation de taux d'intérêt que ressentent les différents acteurs de l'économie financière. En prenant sur le marché à terme une position opposée à celle détenue sur le marché au comptant, l'opérateur cherche à réaliser, en cas d'évolution favorable des taux d'intérêt, un gain sur les contrats à terme qui compense la perte constatée sur l'instrument financier couvert.

L'essor spectaculaire de l'activité sur ces contrats financiers constitue l'élément marquant de ces vingt dernières années. Alors qu'en 1970, les marchandises étaient le seul produit négocié sur les marchés à terme, leur part ne représente plus aujourd'hui qu'environ 30% de leur activité contre 70% pour les contrats financiers.

La création du MATIF[7] (Marché à Terme International de France) le 20 février 1986 s'inscrit dans le processus de modernisation de la place financière française. La réforme du marché obligataire et plus particulièrement les mesures mises en œuvre par le Trésor français pour moderniser le marché des titres émis par l'Etat a favorisé l'émergence d'un marché à terme liquide.

Organisation

MATIF SA est une institution financière spécialisée relevant de la loi bancaire. Son capital est réparti par tiers entre la SBF (Société des Bourses Françaises), les banques et institutions financières et les compagnies d'assurance. MATIF SA est une "entreprise de marché" et une chambre de compensation.

- En tant qu'entreprise, elle organise la négociation, c'est-à-dire la confrontation de l'offre et de la demande, fixe le calendrier et les horaires de négociation, constate et diffuse les cours et veille au respect des règles régissant la négociation.

[7] Une description du MATIF et des opérations qui y sont traitées sont données par Afatalion et Poncet (1991).

– En tant que chambre de compensation, MATIF SA habilite les adhérents ayant accès à la compensation. Elle enregistre chaque transaction, s'en porte contrepartie et garantit la bonne fin des opérations enregistrées. MATIF SA organise également la circulation des flux financiers propres à assurer la sécurité des transactions, avec les dépôts de garantie et les appels de marge, et surveille les positions des opérateurs. Enfin elle organise la livraison des contrats à échéance et liquide, s'il y a lieu, les positions des opérateurs défaillants.

Dans le cadre des opérations à terme (au comptant avec livraison différée), un vendeur s'engage à livrer une quantité donnée de marchandise à un acheteur à une date future, date à laquelle le règlement sera réalisé. Le règlement est effectué sur la base d'un prix fixé dès la négociation.

Une opération à terme consiste à arrêter aujourd'hui les conditions d'une transaction effectuée à une date future. On donne les définitions suivantes pour un contrat *forward* et un contrat futur.

Définition 1 *: Un contrat forward d'échéance T et de sous-jacent un actif dont le prix, à l'instant t est S_t, est un contrat qui permet à son détenteur d'acheter ou de vendre l'actif à l'instant T à un prix fixé au moment de la signature du contrat (en t). Ce contrat ne donne lieu à aucun échange de flux au moment de sa conclusion. On appelle prix du contrat, le prix convenu F_t auquel la transaction se fera à l'instant T.*

Définition 2 *: Un contrat futur est un contrat forward avec réajustement continu. Plus précisément, un contrat future d'échéance T, écrit sur un actif de prix S_t à l'instant t, est un contrat qui fixe un prix (le prix du contrat) sur la base duquel on pratique les "appels de marge". Chaque opérateur verse un dépôt de garantie dont le montant lui est crédité sur un compte courant. A la clôture quotidienne, la position de l'opérateur est ajustée. Si une perte apparaît, l'opérateur doit en assurer le financement ; dans le cas contraire, son compte est crédité. La livraison du sous-jacent se fait au prix de la date T, et non au prix convenu dans le contrat.*

Les caractéristiques des opérations à terme font l'objet d'un accord bilatéral entre l'acheteur et le vendeur : accord sur la quantité et la qualité de la marchandise, accord sur la date et le lieu de la livraison.

Cette absence de standardisation constitue la première limite au développement de ce marché. Par ailleurs, la défaillance de certains opérateurs a mis en lumière le risque de contrepartie inhérent aux transactions bilatérales.

Les réformes entreprises par le CBOT (Chicago Board of Trade) ont permis au milieu du 19ème siècle d'établir les principes fondamentaux des marchés à terme utilisés aujourd'hui par l'ensemble des marchés tant aux Etats-Unis, qu'en Europe ou dans les pays de la zone Asie-Pacifique.

Par opposition aux opérations forward, les caractéristiques des contrats à terme sont standardisées :

- Qualité de la marchandise
- Quantité ou unité de négociation
- Echéance de livraison
- Conditions de livraison

Cette standardisation aboutit à la possibilité pour un opérateur de dénouer sa position avec une contrepartie différente de sa contrepartie initiale et améliore donc le fonctionnement du marché.

En réponse aux problèmes de défaillance rencontrés sur les marchés forward, assurer une sécurité maximum des opérations représente un objectif prioritaire pour les marchés à terme. Cette sécurité s'appuie sur l'existence d'une chambre de compensation, contrepartie unique de l'ensemble des acheteurs et des vendeurs dans le cadre d'une négociation multilatérale qui romp avec les transactions bilatérales en vigueur sur les marchés forward. La mise en place de mécanismes de couverture rigoureux ont également permis de consolider l'édifice. Ainsi, la constitution obligatoire d'un dépôt de garantie et la procédure des appels de marges quotidiens renforcent la sécurité des marchés à terme.

Les dérivés de taux négociables sont, pour le long terme, le contrat à terme sur obligation Notionnelle (désormais Euro Notionnel) et son option, pour le court terme, le contrat à terme PIBOR (désormais Euribor) 3 mois et son option. Les dérivés sur marchandises sont un contrat à terme sur le colza et son option, un contrat à terme sur le blé, un contrat à terme sur le maïs, un contrat à terme sur le tourteau de colza.

1.2.3 Le taux d'intérêt PIBOR

Description

Depuis le 3 octobre 1986, l'Association Française des Banques (AFB) publie quotidiennement les taux interbancaires offerts à Paris sur des dépôts en francs pour des maturités allant de 1 à 12 mois. Les taux Pibor (Paris Interbank Offered Rate), officiellement publié à 11h30, résultent d'une moyenne arithmétique (après élimination des 4 extrêmes haut

et des 4 extrêmes bas) des taux offerts aux signatures nationales de première catégorie par une sélection de 16 établissements de crédit dits de référence. Ces taux, et plus particulièrement le Pibor 3-mois, sont désormais des taux directeurs sur le marché monétaire français. Même si les historiques des données de cette thèse ne prennent pas en compte le passage à l'Euro il convient de glisser une précision à ce sujet. La continuité des taux Pibor est assurée après 1999 par le taux Euribor qui n'est pas un simple taux domestique en Euro, mais un véritable taux européen.

Propriétés statistiques

Le tableau (1.2.2) présente les statistiques descriptives du taux Pibor 3-mois $R_t(0,25)$, de ses variations quotidiennes $\Delta R_t = R_{t+1}(0,25) - R_t(0,25)$ et des variations quotidiennes au carré $(\Delta R_t)^2$ pour la période de janvier 1990 à décembre 1999. Une skewness négative et un excès de kurtosis positif montrent la nonnormalité de la distribution historique. La statistique W de Jarque et Bera (1980) pour construire un test de normalité permet de rejeter la normalité à un seuil de 5%.

La statistique de Ljung et Box (1978), $LB(20)$ pour tester l'hétéroscédasticité, rejette l'homoscédasticité des rendements au carré. La statistique de Ljung-Box $LB_c(20)$ proposée par Diebold (1988) corrigée pour l'hétéroscédasticité calculée avec 20 retards permet de détecter l'autocorrélation des rendements. On remarque que l'autocorrélation des rendements au carré est significativement supérieure à celle des rendements, ce qui implique que de grandes variations tendent à être suivies par d'autres grandes variations de n'importe quel signe.

Tableau 1.2.2 : statistiques descriptives du taux PIBOR $R_t(0,25)$, de ses variations quotidiennes $\Delta R_t = R_{t+1}(0,25) - R_t(0,25)$ et des variations quotidiennes au carré $(\Delta R_t)^2$ pour la période de janvier 1990 à décembre 1999. $LB(20)$ est la statistique de Ljung-Box pour tester l'hétéroscédasticité. $\rho(h)$ est l'autocorrélation d'ordre h. $LB_c(20)$ est la statistique de Ljung-Box corrigée pour l'hétéroscédasticité pour tester la nullité des 20 premières autocorrélations des rendements. Sous l'hypothèse nulle, la statistique est distribuée comme un χ^2 à 20 degrés de liberté. W est la statistique de Jarque et Bera (1980) qui permet de tester la normalité[8].

	$R_t(0,25)$	ΔR_t	$(\Delta R_t)^2$
Nombre d'observations	1304	1303	1303
Minimum	$3,313$	$-2,000$	$0,000$
Maximum	$13,914$	$1,453$	$4,000$
Moyenne	$5,677$	$-0,63\ 10^{-2}$	$2,46\ 10^{-2}$
Ecart-type	$2,111$	$0,157$	$0,165$
Asymétrie	$1,137$	$-0,413$	$15,774$
Excès de kurtosis	$1,463$	$42,775$	$309,887$
$LB(20)$		$94,877$	$236,173$
$\rho(1)$		$-0,011$	$0,230$
$\rho(5)$		$-0,054$	$0,113$
$\rho(10)$		$0,100$	$0,057$
$\rho(20)$		$-0,004$	$0,071$
$LB_c(20)$		$91,814$	$236,173$
W	$398,96$	$99703,94$	$52,677\ 10^5$

[8] La Statistique de Jarque et Bera est basée sur la skewness empirique, $\widehat{sk}$ et la kurtosis empirique $\widehat{kt}$:

$$\widehat{sk} = \frac{1}{N}\frac{\sum_{k=1}^{N}(x_{k\Delta t} - \overline{x})^3}{\overline{s}^3}, \widehat{kt} = \frac{1}{N}\frac{\sum_{k=1}^{N}(x_{k\Delta t} - \overline{x})^4}{\overline{s}^2}$$

où $\overline{x}$ et $\overline{s}$ représentent respectivement la moyenne et l'écart-type empiriques.

On note t_1 et t_2 les statistiques suivantes :

$$t_1 = \sqrt{N\frac{\widehat{sk}^2}{6}},\ t_2 = \sqrt{N\frac{(\widehat{kt}-3)^2}{24}}.$$

Sous l'hypothèse nulle de normalité, $W = t_1^2 + t_2^2$ suit asymptotiquement un $\chi^2(2)$.

Figure 1.3.a: taux PIBOR:
periode de janvier 1990 a decembre 1999

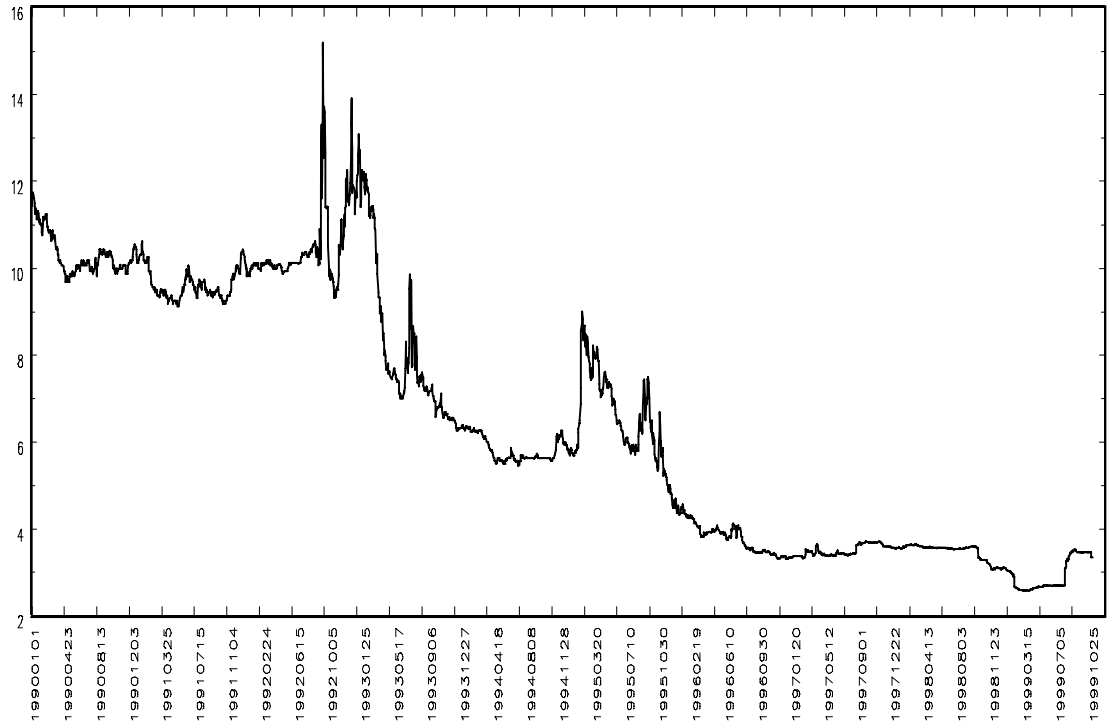
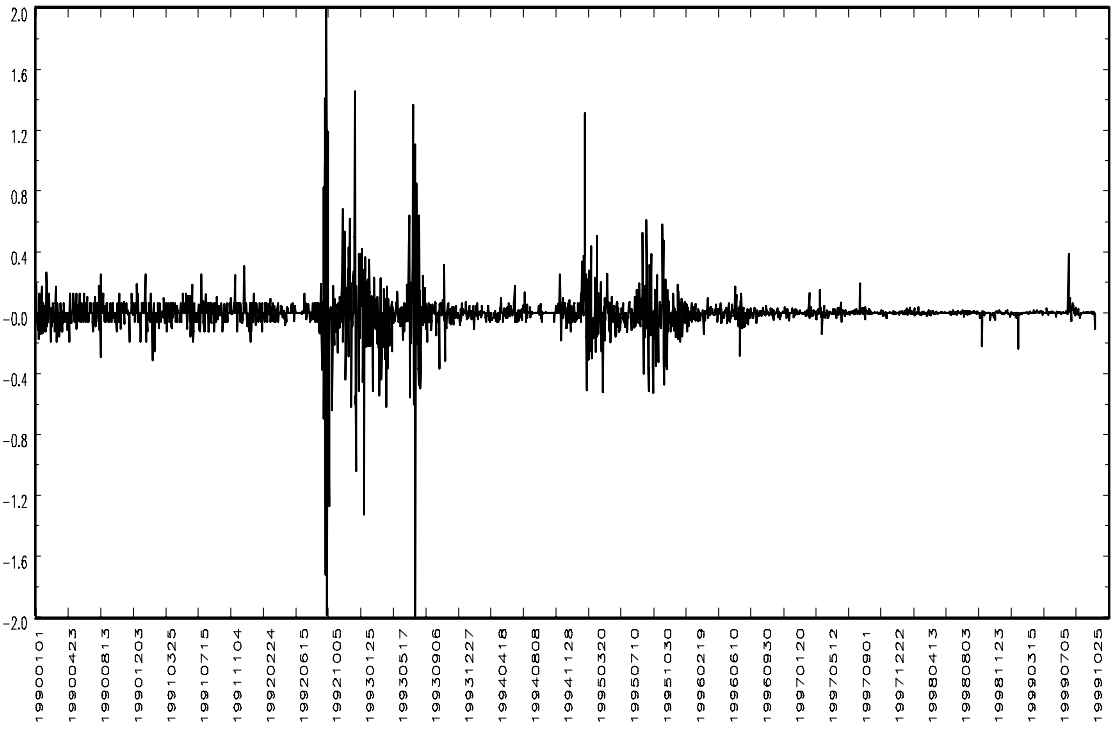


Figure 1.3.b: variations instantanees du taux PIBOR 3 mois:
periode de janvier 1990 a decembre 1999



1.2.4 Les instruments dérivés

Le contrat à terme de taux d'intérêt PIBOR 3-mois

Le contrat à terme Pibor 3-mois a été introduit sur le MATIF le 8 septembre 1988. C'est un contrat standardisé qui porte sur une garantie de taux d'intérêt. Le sous-jacent du contrat à terme Pibor 3-mois correspond à un dépôt d'une valeur de 5 millions de francs pour une durée de 90 jours. Le Pibor 3-mois peut être négocié sur un horizon de trois années de cotation, favorisant en cela les stratégies de couverture (swaps, fras, tcn,...), les prises de position sur l'évolution de la courbe des taux français et les opérations de spreads inter-marchés. Négocié sur le MATIF, le contrat à terme Pibor 3-mois permet aux trésoriers, aux opérateurs des banques ainsi qu'aux gestionnaires de fonds (SICAV, FCP,...) de gérer leur risque de taux d'intérêt court terme jusqu'à trois ans dans le cadre d'un marché transparent, grâce à une négociation multilatérale et à une diffusion publique des cours.

La cotation du contrat s'effectue sous la forme d'un cours à deux décimales, le taux annuel implicite étant obtenu en retranchant à 100 le cours observé. Les cotations se font à la criée et en continu entre 8h30 et 16h00. Le dernier jour de cotation est le deuxième jour de bourse précédant le onzième jeudi de chaque trimestre civil. Les échéances cotées sont celles du cycle mars, juin, septembre, décembre. Une nouvelle échéance est introduite le quatrième jour de bourse précédant le onzième jeudi de chaque trimestre civil. Le dépôt de garantie est normalement égal à 0,30% de la valeur nominale du contrat (15000FF). A l'échéance, le contrat à terme Pibor 3-mois ne fait l'objet d'aucune livraison physique, mais du paiement d'un ultime appel de marge : il n'y a pas véritablement livraison de dépôt en francs, mais paiement de la différence entre le cours de liquidation et celui de compensation. La continuité du contrat Pibor 3-mois est assurée par le contrat à terme Euro 3-mois depuis 1999.

Dans le cadre des marchés de taux à court terme, le tick est égal à 0,01% de la valeur nominale du contrat, ce qui correspond pour le contrat PIBOR à : $5000000 \times \frac{90}{360} \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = 125FF$.

Les options sur contrat PIBOR 3-mois

L'option sur contrat à terme PIBOR 3-mois apparaît le 1er mars 1990. Elle est de type américain et porte sur le contrat à terme Pibor 3-mois. Cette option donne le droit à l'acheteur, mais non l'obligation, d'acheter ou de vendre un contrat à terme

Pibor 3-mois à un cours égal au prix d'exercice de l'option. Les prix d'exercice sont espacés de 10 points de base sur l'option Pibor (contre 25 habituellement sur des produits équivalents sur d'autres marchés à terme). Les échéances de l'option correspondent aux quatre premières échéances cotées sur le contrat sous-jacent, auxquelles s'ajoutent deux échéances mensuelles. L'option Pibor est cotée en pourcentage du nominal du contrat à terme, rapporté à la durée du dépôt, avec trois décimales. L'acheteur de l'option règle la totalité de sa prime au vendeur par l'intermédiaire de MATIF SA. Le vendeur de l'option reçoit la totalité de la prime mais doit constituer auprès de MATIF SA un dépôt de garantie réévalué quotidiennement en fonction de la valeur liquidative de sa position. Les options bénéficient du système SPAN (Standard Portfolio Analysis of Risk) pour la détermination des dépôts de garantie. La liquidité de l'option Pibor est garantie sur l'ensemble des séries ouvertes à la négociation par cinq teneurs de marché[7].

La base de données a été mise à disposition par MATIF SA et est composée de données quotidiennes d'options du 3 janvier 1994 au 29 août 1997. Pour chaque date de cotation on a les caractéristiques suivantes de l'option : la maturité, le prix d'exercice, le prix de clôture, le prix de compensation[8], le volume de transactions, le nombre d'opérations, le nombre de positions ouvertes brutes et nettes et la volatilité implicite. On a les mêmes caractéristiques pour les bases des contrats Pibor 3-mois à l'exception des prix d'exercice et de la volatilité implicite. Le taux sans risque qui apparaît dans la formule d'évaluation de l'option est issu de la base Datastream.

Lorsque, pour un même prix d'exercice, le call et le put sont cotés tous les deux, on a retient l'option hors-la-monnaie[9].

[7] Jusqu'en 1997 ces derniers étaient BNP, CPR, CNCA, Société Générale et Transoptions Finance.

[8] Le prix de compensation est donné par la moyenne pondérée des prix cotés dans les 30 dernières secondes de cotation.

[9] Les options hors-la-monnaie sont celles dont la valeur intrinsèque ($F - K$ pour les calls et $K - F$ pour les puts) est négative ; cela concerne donc les puts avant la monnaie et les calls après la monnaie.

Figure 4.1.a: volumes sur les options PIBOR pour la premiere maturite:
periode de janvier 1993 a janvier 1998

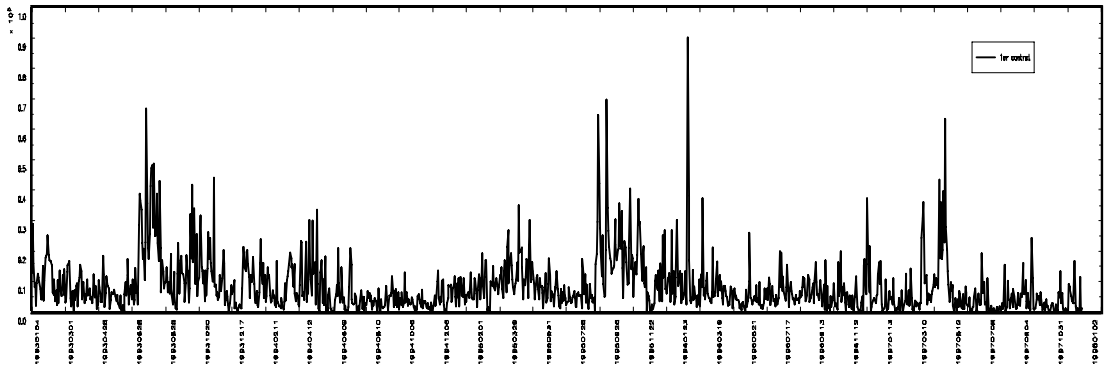


Figure 4.1.b: volumes sur les options PIBOR pour la seconde maturite:
periode de janvier 1993 a janvier 1998

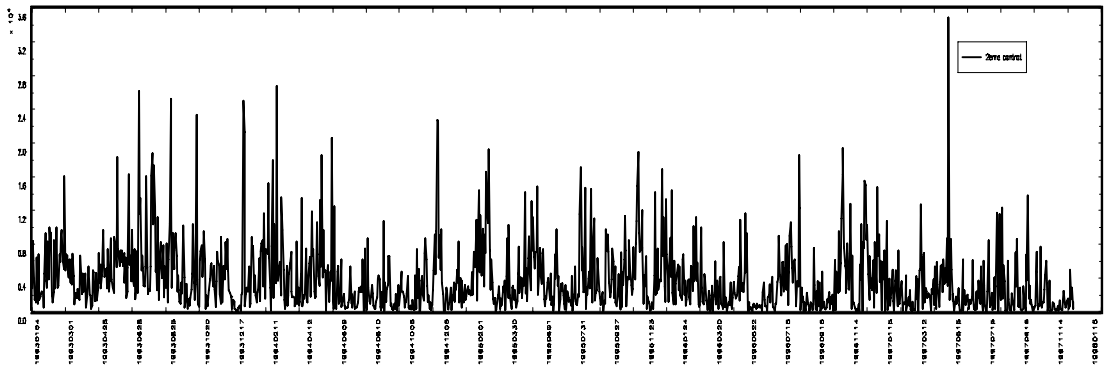


Figure 4.1.c: volumes sur les options PIBOR pour la troisieme maturite:
periode de janvier 1993 a janvier 1998

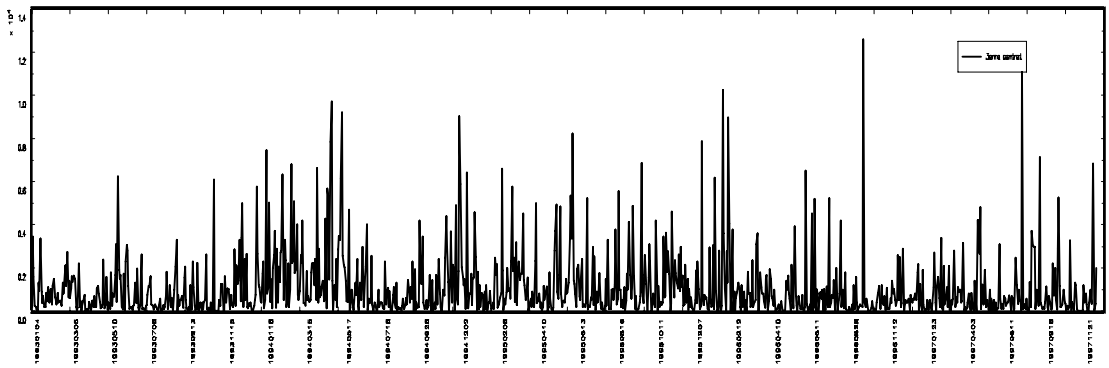
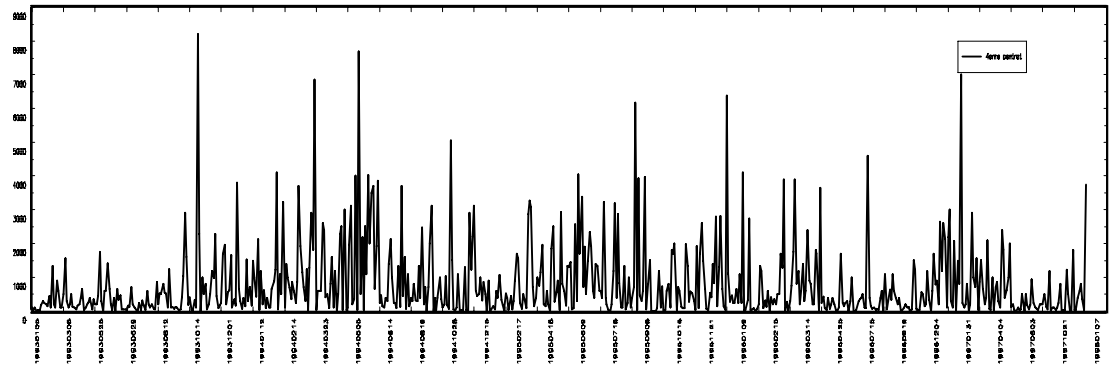


Figure 4.1.d: volumes sur les options PIBOR pour la quatrieme maturite:
periode de janvier 1993 a janvier 1998



Chapitre 2

Problématique

Les objectifs de cette thèse sont multiples. Dans un premier temps nous tentons de déterminer la structure de densité la plus appropriée aux sous-jacents des options que nous serons amenés à utiliser, à savoir taux et indices. Pour cela, nous analyserons et comparerons différents modèles d'estimation de la densité neutre au risque, ce qui fera l'objet de la seconde partie de la thèse. Dans un second temps, nous nous intéresserons aux diverses applications que l'on peut tirer de la connaissance de la densité neutre au risque. Dans une première application, nous testerons l'efficience des marchés en étudiant le contenu en information dans les volatilités implicites ; une deuxième application consistera à tester la théorie des anticipations ; dans une troisième application nous analyserons à partir d'intervalles de confiance les réaction des agents du marché vis-à-vis de tel ou tel événement ; enfin, dans une quatrième application nous comparerons la densité neutre au risque avec la vraie densité, afin d'estimer le biais entre ces deux densités et d'en tirer des stratégies de *trading*.

Pour mettre en œuvre ces recherches, on doit introduire des notions d'équilibre. L'estimation des densités neutres au risque est liée à l'équilibre d'arbitrage qui repose sur l'absence d'opportunité d'arbitrage et qui permet l'évaluation des prix d'options dans un monde neutre au risque, alors que l'estimation de l'aversion pour le risque résulte d'un équilibre général qui exige l'égalité entre offres et demandes sur les marchés de biens et de titres. On verra que ces deux modèles sont parfaitement compatibles notamment dans leur façon identique de décrire l'incertitude, à l'aide de variables d'état dont l'évolution dynamique est décrite par des processus aléatoires. Cox, Ingersoll et Ross (1985a) montrent que le modèle d'équilibre économique général recouvre totalement le modèle

d'équilibre d'arbitrage, en ce sens que tous les résultats du dernier se retrouvent dans le premier. Nous présentons dans cette partie l'équilibre d'arbitrage et introduisons en section (4.1) de la partie III l'équilibre général en utilisant dans la mesure du possible les mêmes notations.

2.1 Approche par équilibre d'arbitrage

L'équilibre d'arbitrage repose sur le principe que dans un marché sans friction où les ventes à découvert sont autorisées, des actifs ayant des flux de trésorerie égaux doivent également valoir la même chose. Sur ce principe, si nous disposons d'un portefeuille de base constitué de K titres parfaitement identifiés, les caractéristiques des titres hors-base peuvent être répliqués par une combinaison linéaire des caractéristiques des K titres de la base. Dans ces conditions, le prix d'équilibre des actifs hors-base doit respecter une relation du même type avec les prix des actifs du portefeuille de base, sous peine de garantir la présence d'opportunités d'arbitrage. On obtient alors une contrainte d'arbitrage devant être respectée par les prix des titres échangés sur le marché.

Dans cette approche, le prix est défini indépendamment des préférences des agents, ou de leur attitude vis-à-vis du risque. L'emploi du principe de non-arbitrage pour déterminer le prix des actifs impose l'identification à priori des facteurs d'incertitude qui affectent l'économie, de façon à pouvoir sélectionner un sous-ensemble de titres offrant la meilleure protection possible contre le risque. La perspective est purement financière, mais procède d'une description explicite de la structure de l'économie. En examinant ces modèles, on différencie immédiatement les hypothèses spécifiques aux titres considérés. Par nature, ces hypothèses sont exogènes au modèle, et peuvent donc être choisies, soit de manière totalement arbitraire, soit en référence à une théorie définie par ailleurs[1].

2.1.1 Hypothèses et définitions liées à l'équilibre par arbitrage

On définit une opportunité d'arbitrage de la façon suivante :

Les marchés sont supposés parfaits et on a les hypothèses suivantes :

Définition 3 *On dit qu'il y a opportunité d'arbitrage si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
il existe un portefeuille $\theta = (\theta_0, \theta_1, ..., \theta_d)$ *tel que la valeur initiale* $\theta.S = \sum_{i=0}^{d} \theta_i S^i$ *est stric-*

[1] la présentation faite ici repose en partie sur Bisière (1994).

tement négative et la valeur à l'instant 1 est positive dans tous les états du monde, soit : $\sum_{i=0}^{d} \theta_i v_j^i \geq 0,\ j \in \{1, ..., k\}$ *;*
il existe un portefeuille $\theta = (\theta_0, \theta_1, ..., \theta_d)$ *tel que la valeur initiale* $\theta.S$ *est négative ou nulle et la valeur à l'instant 1 est positive dans tous les états du monde et strictement positive dans au moins un état, soit :* $\sum_{i=0}^{d} \theta_i v_j^i \geq 0,\ j \in \{1, ..., k\}$ *et* $\exists j_0,\ \sum_{i=0}^{d} \theta_i v_{j_0}^i > 0$.

Une opportunité d'arbitrage constitue un moyen de s'enrichir sans apport personnel. Il est évident que cela ne saurait exister sans être rapidement exploité. Nous faisons donc l'hypothèse suivante, dite *absence d'opportunité d'arbitrage* (AOA).

Hypothèse 1 *Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage sur les marchés.*

Hypothèse 2 *Il n'existe aucun coût de transaction, taxe, ou problème d'indivisibilité des actifs. Tous les marchés sont compétitifs, tels que chaque individu soit persuadé qu'il peut acheter ou vendre autant d'actifs qu'il le souhaite, au prix de marché. Sur ces marchés, les échanges ne peuvent avoir lieu qu'au prix d'équilibre.*

Hypothèse 3 *Il existe un marché pour l'emprunt et le prêt instantané au taux* r_t *et pour les prêts et emprunts de durée supérieure. Les titres de créance sont des obligations zéro-coupon, de valeur faciale unitaire exempts de tout risque de défaut.*

On donne aux investisseurs un comportement rationnel standard :

Hypothèse 4 *Les investisseurs sont insatiables et suffisamment tolérants vis-à-vis du risque pour qu'ils puissent accepter de détenir un actif risqué ayant une espérance de rendement finie.*

A ces quatre hypothèses, viendra s'ajouter une cinquième hypothèse sur la structure de l'information pertinente pour les investisseurs, qui différera selon les modèles employés. Dans le cas particulier du modèle que nous allons prendre comme exemple pour développer la théorie de la valorisation par arbitrage, cette hypothèse est la suivante[2],[3] :

[2] On rappelle qu'un mouvement brownien est un processus à trajectoires continues, à accroissements indépendants et stationnaires ; plus précisément, $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien réel issu de 0 sur l'espace de probabilité (Ω, F, P) si
a) $P(B_0 = 0) = 1$,
b) $\forall\ 0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire réelle $B_t - B_s$ suit une loi normale centrée de variance $t - s$,
c) $\forall\ 0 = t_0 < t_1 < ... < t_p$, les variables $(B_{t_k} - B_{t_{k-1}},\ 1 \leq k \leq p)$ sont indépendantes.

[3] On rappelle qu'un processus d'Itô est un processus de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Psi_u du + \int_0^t \varphi_u dW_u,$$

où $\int_0^t |\Psi_u|\, du < \infty$, $\int_0^t |\varphi_u|^2\, du < \infty$.

Hypothèse 5 *L'information pertinente pour les investisseurs est représentée par la valeur courante de S. Cette variable suit un processus d'Itô :*

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

où μ_t est la tendance instantanée (ou drift) de S_t et σ_t est la volatilité instantanée de S_t et W_t est un mouvement brownien standard sous la probabilité vraie (ou subjective) $\mathbf{P}$.

L'hypothèse suivante suppose l'existence d'un actif dit sans risque

Hypothèse 6 *Il existe un actif sans risque, noté S^0 tel que :*

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= S_t^0 r_t dt, \\ S_0^0 &= 1, \end{aligned}$$

où r_t est un processus adapté positif vérifiant $\int_0^T r_t dt < \infty$ p.s.

L'actif S^0 est dit sans risque même si r_t est un processus stochastique au sens où S_t^0 est connu dès lors que r_t est connu.

Une dernière hypothèse permet de boucler le modèle, en établissant les croyances des agents quant au fonctionnement de l'économie :

Hypothèse 7 *Tous les investisseurs sont persuadés que l'économie est telle qu'elle est présentée dans l'hypothèse (5) et ont des croyances homogènes quant à la valeur des paramètres du modèle.*

Cette dernière hypothèse conduit implicitement à admettre que les anticipations des investisseurs sont rationnelles. Ceux-ci croient connaître la vraie structure de l'économie ainsi que la valeur des paramètres qui la caractérisent à un instant donné. Sachant qu'ils sont naturellement attirés par la richesse, on peut penser qu'ils utilisent au mieux l'information pour prévoir le futur. De plus, si l'on ajoute que l'information est disponible pour tous, on doit conclure que les marchés sont efficients au sens large.

2.1.2 Valorisation par arbitrage et modèle de Black-Scholes

Nous montrons dans cette partie comment valoriser une option en absence d'opportunité d'arbitrage. La clé consiste à construire un portefeuille autofinançant sans risque à l'aide d'une action dont le cours est noté S, d'une option d'échéance T et de prix d'exercice K dont le prix à l'instant t est noté $C(t, S, K, T)$ et du cash qui représente l'actif sans

risque, S^0. Invoquant la condition d'arbitrage, on rend alors égaux le rendement instantané du portefeuille et le taux sans risque du marché et l'on obtient une relation entre l'espérance et la volatilité du rendement instantané du prix de chacun des titres ainsi qu'une équation aux dérivées partielles pour le prix de l'option[4]. Cette équation peut être résolue après adjonction des conditions aux bornes, spécifiques à l'option.

Définitions

Nous donnons en premier lieu les définitions d'une stratégie de portefeuille et d'une stratégie autofinançante. On considère un agent qui détient, à l'instant t, θ_t^1 parts de l'actif S et θ_t^0 parts de l'actif S^0 ; il n'y a aucune restriction sur le signe de $\theta = (\theta^0, \theta^1)$, on note $\widetilde{S} = (S^0, S)$.

Définition 4 *Une stratégie de portefeuille est la donnée d'un processus vectoriel* $(\theta_t, 0 \leq t \leq T)$ *tel que l'intégrale stochastique*

$$\int_0^t \theta_u dS_u$$

est définie pour tout t*. La valeur en* t *de cette stratégie est notée*

$$V_t(\theta) = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t. \tag{2.1}$$

On définit une stratégie autofinançante comme suit.

Définition 5 *La stratégie est autofinançante si, pour tout* t*,*

$$V_t(\theta) = V_0(\theta) + \int_0^t \theta_u d\widetilde{S}_u. \tag{2.2}$$

Le modèle utilisé ici est celui de Black et Scholes (1973). Il ne s'agit pas ici de le critiquer ou de le défendre mais de l'utiliser comme un modèle de référence pour l'ensemble de la thèse. Pour ce modèle particulier, la dynamique de S sous $\mathbf{P}$ dans l'hypothèse (5) devient :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{2.3}$$

où le drift instantané μ et la volatilité instantanée σ sont constants. De plus on va supposer que le taux sans risque r_t est constant et égal à r.

[4] On peut se référer à Black et Scholes (1973) et Merton (1973).

Valorisation d'une option

On va chercher le prix de l'option comme une fonction du cours de l'actif S et du temps $t \in [0,T]$, $C(t,S,K,T) = \Gamma(t,S)$. On suppose qu'un agent détient la stratégie suivante $\theta = (\theta^0, \theta^1, \theta^2)$ où les éléments de θ représentent respectivement le montant investi dans l'actif sans risque, dans l'action et dans l'option. La valeur de son portefeuille à l'instant t est donnée par :

$$V_t = \theta_t^1 S_t + \theta_t^2 \Gamma(t,S) + \theta_t^0 S_t^0. \tag{2.4}$$

On s'arrange pour avoir un portefeuille de valeur nulle à chaque instant, on va donc ajuster la valeur investie dans le *cash* en t de façon à avoir un portefeuille de valeur nulle en t :

$$V_t = 0 \iff \theta_t^0 S_t^0 = -\theta_t^1 S_t - \theta_t^2 \Gamma(t,S). \tag{2.5}$$

On fait varier le portefeuille de façon infinitésimale et comme le portefeuille est auto-finançant, on peut écrire :

$$dV_t = \theta_t^1 dS_t + \theta_t^2 d\Gamma(t,S) + \theta_t^0 S_t^0 r dt,$$

où $d\Gamma$ représente la variation du cours de l'option.

Le lemme d'Itô[5] appliqué à la fonction Γ nous permet d'écrire, en utilisant (2.3) :

$$\begin{aligned} d\Gamma(t,S) &= \frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial t} dt + \frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \Gamma(t,S)}{\partial S^2} dt \\ &= \left[\frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \Gamma(t,S)}{\partial S^2} dt + \mu S_t \frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial S} \right] dt + \frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial S} \sigma S_t dW_t. \end{aligned} \tag{2.6}$$

La variation dV_t du portefeuille est alors donnée par :

$$\begin{aligned} dV_t = &\left[\theta_t^1 \mu + \theta_t^2 \frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial t} + \theta_t^2 \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \Gamma(t,S)}{\partial S^2} + \theta_t^2 \mu S_t \frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial S} + \theta_t^0 S_t^0 r_t \right] dt \\ &+ \left[\theta_t^1 \sigma + \theta_t^2 \frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial S} \sigma S_t \right] dW_t \end{aligned} \tag{2.7}$$

---

[5]

Lemme 1 (Itô) *Si X_t est un processus d'Itô à du type*

$$dX_t = \Psi_t dt + \varphi_t dW_t$$

et $f \in \mathcal{C}^2([0,T] \times \mathbb{R})$, une fonction du temps et de X alors

$$df(t,X_t) = \frac{\partial f(t,X)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t,X)}{\partial S} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t,X)}{\partial X^2} \varphi_t^2 dt$$

Pour obtenir un portefeuille sans risque, on annule la partie aléatoire en dW_t dans (2.7) :

$$\theta_t^1 + \theta_t^2 \frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial S} S_t = 0. \tag{2.8}$$

De plus, pour éviter toute possibilité d'arbitrage, la partie en dt doit être nulle aussi de telle sorte qu'il n'y a aucun rendement possible

$$\theta_t^1 \mu + \theta_t^2 \frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial t} + \theta_t^2 \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \Gamma(t,S)}{\partial S^2} + \theta_t^2 \mu S_t \frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial S} + \theta_t^0 S_t^0 r = 0. \tag{2.9}$$

En injectant (2.5) et (2.8) dans (2.9), on obtient pour le prix de l'option une équation aux dérivées partielles avec une condition terminale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Gamma(t,S)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial S} + \frac{\partial \Gamma(t,S)}{\partial t} &= r\Gamma(t,S) \\ \Gamma(T,S) = g(S) &= (S-K)^+. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pour résoudre cette équation, on applique le théorème suivant connu sous le nom de formule de Feymann-Kac.

Théorème 1 (Feymann-Kac) *Soit x et t fixés et $Z_s^{x,t}$ le processus indexé par s, $(t \leq s \leq T)$, défini par*

$$Z_s^{t,x} = x + r \int_t^s Z_u^{t,x} du + \sigma \int_t^s Z_u^{t,x} dW_u,$$

alors si $g \in C^2(\mathbb{R})$ est à valeurs positives et g, g', g'' lipschitziennes[6]*, la fonction*

$$C(t,x) = E\left(e^{-\int_t^T r_u du} g(Z_T^{t,x})\right)$$

est l'unique solution lipschitzienne de (2.10).

Or le processus des prix S ne suit pas exactement la même loi que $Z_s^{t,x}$ sous la probabilité subjective, on va donc se placer sous une probabilité $\mathbf{Q}$ équivalente à $\mathbf{P}$[7] sous laquelle les prix actualisés sont des martingales. L'étude des relations entre arbitrage et existence d'une probabilité équivalente à $\mathbf{P}$ faisant des prix actualisés une martingale a été entreprise par Harrison et Kreps (1979) et Harrison et Pliska (1981) en temps discret. On peut trouver une bonne approche du problème en temps continu dans le livre de Müller (1987).

[6] *Une fonction g est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ s'il existe $k > 0$ tel que $|g(x) - g(y)| < k\,|x - y|$ pour tout x, y.*

[7] On rappelle que deux probabilités P_1 et P_2 sont équivalentes si et seulement si, pour tout événement A, $P_1(A) = 0 \Longleftrightarrow P_2(A) = 0$. Ici, Q équivalente à P signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$, $Q(\{\omega\}) > 0$.

Si on note $S_t^a = e^{-rt}S_t$ le processus du prix actualisé, en appliquant le lemme d'Itô, la diffusion de S_t^a est la suivante :

$$dS_t^a = S_t^a[(\mu - r)dt + \sigma dW_t].$$

Le théorème de Girsanov va nous permettre de transformer S_t^a en martingale :

Théorème 2 (Girsanov) *Soit L_t le processus défini par*

$$L_t = \exp\left\{\int_0^t h_s dW_t - \frac{1}{2}\int_0^t h_s^2 ds\right\},$$

où $(h(s), 0 \leq s \leq T)$ est un processus adapté borné.
Le processus L_t est l'unique solution de $dL_t = L_t h_t dW_t$, $L_0 = 1$ et $E_{\mathbf{P}}(L_t) = 1$, $\forall t \in [0,T]$. L_t est une martingale.
Soit $\mathbf{Q}$ la probabilité définie sur (Ω, F_t) par $Q(A) = E_{\mathbf{P}}(1_A L_T)$. Sous $\mathbf{Q}$, le processus $W_t^* = W_t - \int_0^t h_s ds$ est un mouvement brownien.

En appliquant le théorème à $h_s = -(\mu - r)\sigma^{-1}$, on peut montrer que sous la probabilité $\mathbf{Q}$ définie par $d\mathbf{Q} = L_t d\mathbf{P}$ le processus S_t^a vérifie

$$dS_t^a = S_t^a \sigma dW_t^*, \tag{2.11}$$

où $W_t^* = W_t + (\mu - r)\sigma^{-1}t$ est un $\mathbf{Q}$-mouvement brownien. La première partie du théorème nous assure que S_t^a est une $\mathbf{Q}$-martingale. On déduit facilement de (2.11) que la dynamique de S_t sous $\mathbf{Q}$ est

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^* \tag{2.12}$$

La probabilité $\mathbf{Q}$ est appelée probabilité neutre à l'égard du risque ou risque neutre car sous $\mathbf{Q}$ les actifs risqués et sans risque ont la même espérance de rendement.

En appliquant le théorème (1) à (2.10) sous $\mathbf{Q}$, le prix d'une option européenne est donnée par :

$$C(t, S, K, T) = E_t^{\mathbf{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+]. \tag{2.13}$$

2.1.3 Prime de risque

Notons maintenant λ^{BS} et ρ^{BS} les quantités suivantes :

$$\lambda^{\mathrm{BS}} = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \tag{2.14}$$

$$\rho^{\mathrm{BS}} = \sigma\lambda^{\mathrm{BS}}. \tag{2.15}$$

Le terme λ^{BS} représente le prix de marché du risque associé à l'actif S pour le modèle de Black-Scholes et ρ^{BS} est appelée la prime de risque. Nous reviendrons sur cette notion de prime de risque lorsqu'on se place dans un contexte d'équilibre général. Si le passage à une probabilité neutre vis-à-vis du risque s'avère très utile pour l'évaluation de produits dérivés tels que les options, il peut être intéressant de se demander si cette probabilité est très éloignée de la probabilité subjective et de tenter d'évaluer cette prime de risque qui fait le pont entre les deux probabilités ; c'est ce que nous tenterons de faire dans la dernière partie de cette thèse.

2.2 Les densités neutres au risque

2.2.1 Motivations

On a vu qu'une option donne le droit d'acheter ou de vendre un actif, à une date future et à un prix convenu d'avance. Ce droit a un prix aujourd'hui qui est fonction des caractéristiques de l'option. Dans le call par exemple, le prix est d'autant plus élevé que la probabilité qu'a le sous-jacent de dépasser le prix d'exercice à échéance est élevée. On peut ainsi déduire du prix d'une option ce que le marché anticipe sur les variations possibles du sous-jacent.

Trois indicateurs paraissent importants dans l'anticipation des agents du marché :

- l'écart-type ou volatilité qui mesure la dispersion des anticipations,
- l'asymétrie ou *skewness* qui indique si la probabilité d'une forte hausse est plus importante que celle d'une forte baisse, ou inversement,
- le coefficient d'aplatissement ou *kurtosis* qui révèle les cas où, indépendamment de toute asymétrie éventuelle, le marché accorde une forte probabilité à des événements extrêmes.

Ces indicateurs sont mis en évidence empiriquement sur les options par l'existence d'un *smile* de volatilité. Cette courbe qui se construit en traçant les volatilités implicites en fonction des prix d'exercice illustre la relation entre la volatilité des puts et des calls hors-

la-monnaie. En abscisse, figurent les prix d'exercice répartis autour du prix comptant du sous-jacent pour le jour étudié. On montre en figures (1.5) et (1.6), les smiles de volatilité issus d'options sur CAC 40 et d'options sur contrat à terme Pibor 3-mois.

Nous avons vu que le modèle de Black et Scholes est basé sur l'hypothèse que la volatilité instantanée du prix de l'actif sous-jacent est constante. Cette hypothèse est fortement remise en cause par l'existence de ce smile qui montre que justement la volatilité varie en fonction du prix d'exercice de l'option, ce qui revient à dire qu'elle varie en fonction des prix anticipés futurs de l'actif. Le modèle de Black et Scholes en supposant un mouvement brownien géométrique pour la dynamique du prix, donne une structure gaussienne au rendement du prix qui empêche la prise en compte des moments d'ordre 3 et 4 du rendement. La structure que les deux auteurs proposent n'est donc pas suffisamment riche pour expliquer le comportement futur des prix. Nous allons donc faire des hypothèses supplémentaires sur le processus sous-jacent pour essayer de mieux expliquer ce comportement. Détaillons dans un premier temps plus précisément les notions de volatilité, skewness et kurtosis.

La volatilité

La volatilité est le paramètre qui permet de mesurer le risque associé au rendement de l'actif sous-jacent. Dans le cas des options nous parlons de volatilité implicite. Ces volatilités implicites sont liées directement aux prix actuels du marché[8] et peuvent être extraites sans erreur en inversant la formule du prix de l'option avec le modèle de Black et Scholes (1973). Les smiles des figures (1.5) et (1.6) sont plus ou moins incurvés, selon que les investisseurs sont prêts à payer plus ou moins cher dans une option. On voit clairement sur le premier graphique que, pour la première maturité, plus le prix d'exercice est bas, plus la volatilité (donc le prix) est élevé. Sans faire aucun calcul, on peut déjà sentir que les opérationnels anticipent plutôt une baisse des prix qu'une hausse dans le court terme. Cet effet est connu sous le nom de skewness. Lorsque les volatilités sont élevées des deux côtés du smile, i.e. lorsque celui-ci présente un aspect en U marqué, les opérationnels cotent cher les options très hors-la-monnaie. Dans ce cas, ils anticipent une forte variation du sous-jacent dans un horizon donné sans apporter de précision sur l'orientation de cette variation. Ici, c'est l'effet de kurtosis qui est mis en avant. Ces deux effets sont décrits dans le paragraphe qui suit.

[8] Le marché cote les options sous formes de prix ou de volatilité selon les produits.

Etude de la prime d'asymétrie

Mathématiquement le coefficient d'asymétrie ou skewness est le moment d'ordre 3 de la distribution, normé par l'écart-type au cube :

$$\text{skew}(x) = \frac{E\left[(x - E(x))^3\right]}{E\left[(x - E(x))^2\right]^{3/2}}.$$

Plus intuitivement, nous pouvons la décrire de la façon suivante. Comme on l'a vu en section (1.2.1), le prix d'une option est donné par l'espérance du payoff terminal actualisé. Pour le prix d'un call on rappelle que :

$$\begin{aligned} C(t, S_t, K_c, T) &= e^{-r_t(T)(T-t)} E^{\mathbf{Q}}\left[\max(S_T - K_c)\right] \\ &= e^{-r_t(T)(T-t)} E^{\mathbf{Q}}\left[S_T - K_c / S_T \geq K_c\right] Q(\mathbf{S}_T \geq K_c), \end{aligned} \tag{2.16}$$

et pour celui d'un put, on a :

$$\begin{aligned} P(t, S_t, K_p, T) &= e^{-r_t(T)(T-t)} E^{\mathbf{Q}}\left[\max(K_p - S_T)\right] \\ &= e^{-r_t(T)(T-t)} E^{\mathbf{Q}}\left[K_p - S_T / S_T < K_p\right] Q(\mathbf{K_p} \leq \mathbf{S}_T), \end{aligned} \tag{2.17}$$

avec

$$E^{\mathbf{Q}}(S_T) = F_t.$$

Des équations (2.16) et (2.17) on déduit que l'asymétrie de la distribution sera directement reflétée par les prix relatifs des calls et des puts hors-la-monnaie. Pour tester l'asymétrie de la distribution, on peut donc comparer les prix des calls et des puts dont les prix d'exercice sont répartis symétriquement autour du prix au comptant à la date d'aujourd'hui. Si la distribution des prix attendus de l'actif sous-jacent est symétrique, les calls et les puts hors de la monnaie devraient avoir le même prix. Des distributions asymétriques traduisent donc des décalages de prix entre les calls et les puts. Cette asymétrie peut être visible dans le smile lorsque celui-ci présente une branche plus allongée que l'autre. Intuitivement, lorsque la branche gauche d'un smile issu d'options sur actions est plus allongée, on a un signe que les *traders* cotent plus cher les options sur prix d'exercice bas, donc qu'ils anticipent une baisse des prix plutôt qu'une hausse. On va pouvoir utiliser les prix observés des calls européens pour juger si la skewness obtenue avec les hypothèses imposées sur la distribution par un modèle est cohérente avec une mesure empirique de la skewness. La skewness estime la direction et l'importance des

mouvements attendus des prix des actifs.

Le coefficient d'aplatissement

Le coefficient d'aplatissement ou kurtosis correspond mathématiquement au moment centré d'ordre 4 de la distribution, normé par la variance au carré :

$$\text{kurt}(x) = \frac{E\left[(x - E(x))^4\right]}{E\left[(x - E(x))^2\right]^2}.$$

De même que pour la skewness, la kurtosis trouve une explication économique. Une relativement forte kurtosis, phénomène connu sous le nom de leptokurtosis, révèle la possibilité de variations élevées, voire extrêmes, des fluctuations des cours futurs jusqu'à l'échéance de l'option. Cet effet leptokurtique se retrouve dans le phénomène du smile par une courbure en U marquée. Dans ce cas, on en déduit que les *traders* cotent très cher des prix d'exercice très éloignés de la monnaie et qu'indépendamment du signe, ils anticipent une brusque hausse ou une brusque baisse des prix.

Figure 5.1.a: smile de volatilite sur les options CAC 40
pour la date 19960916

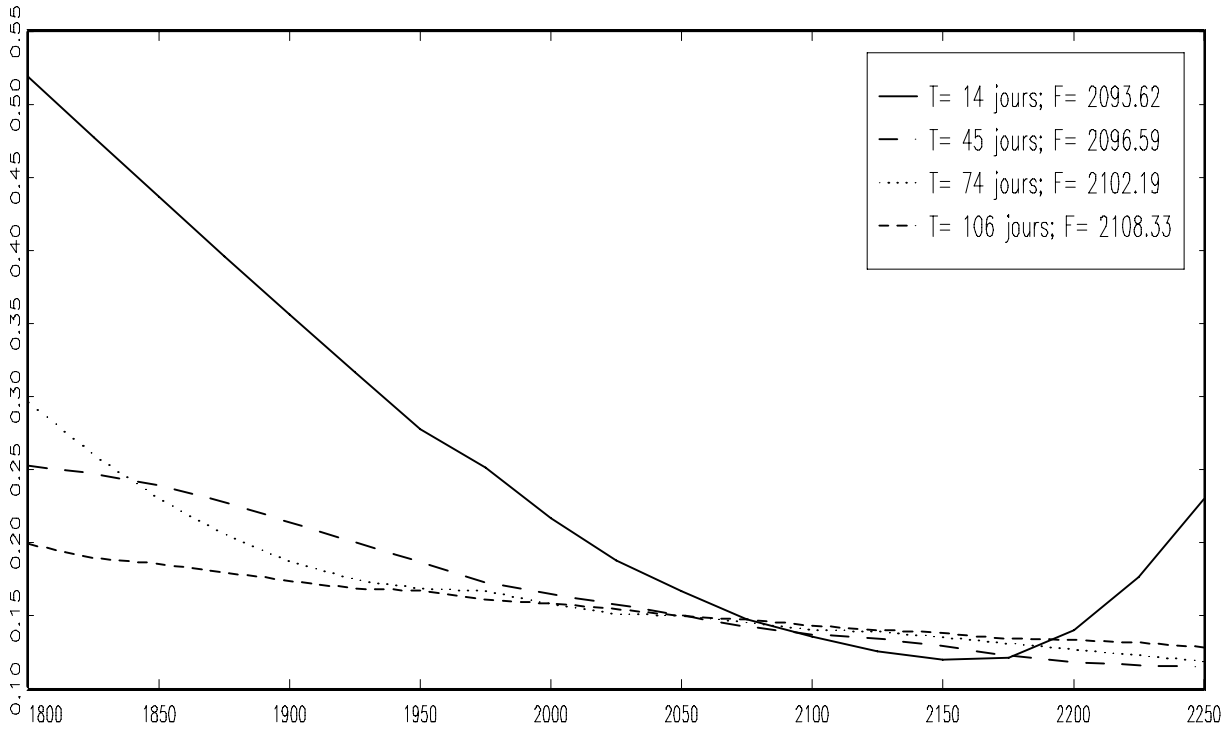


Figure 5.1.b: smile de volatilite sur les options CAC 40
pour la date 19981016

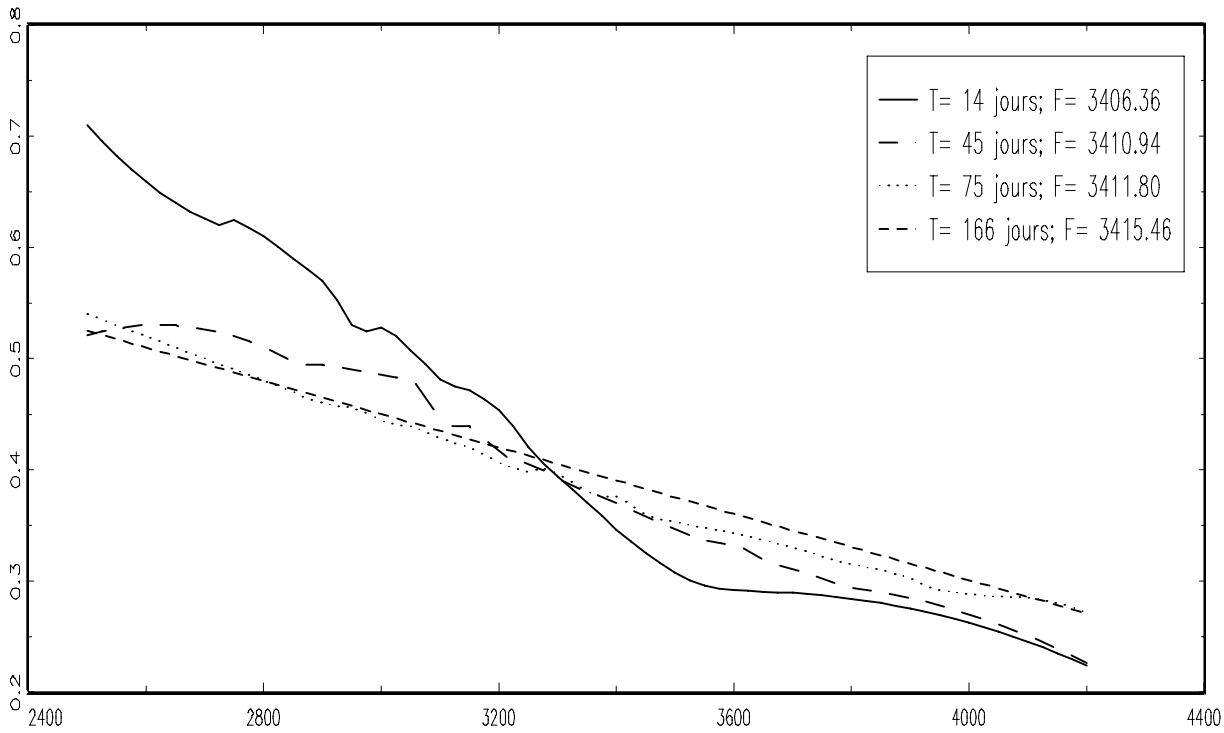


Figure 1.6.a: smiles de volatilites sur les options PIBOR:
pour la journee du 19970616

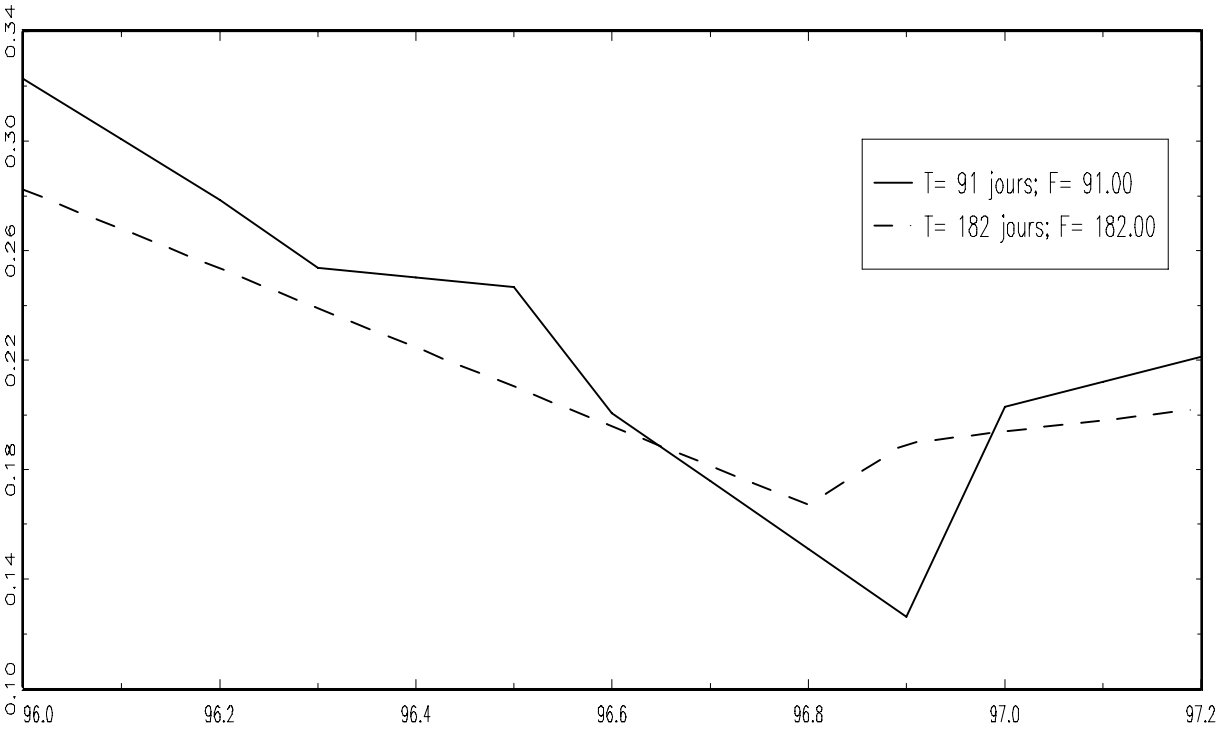
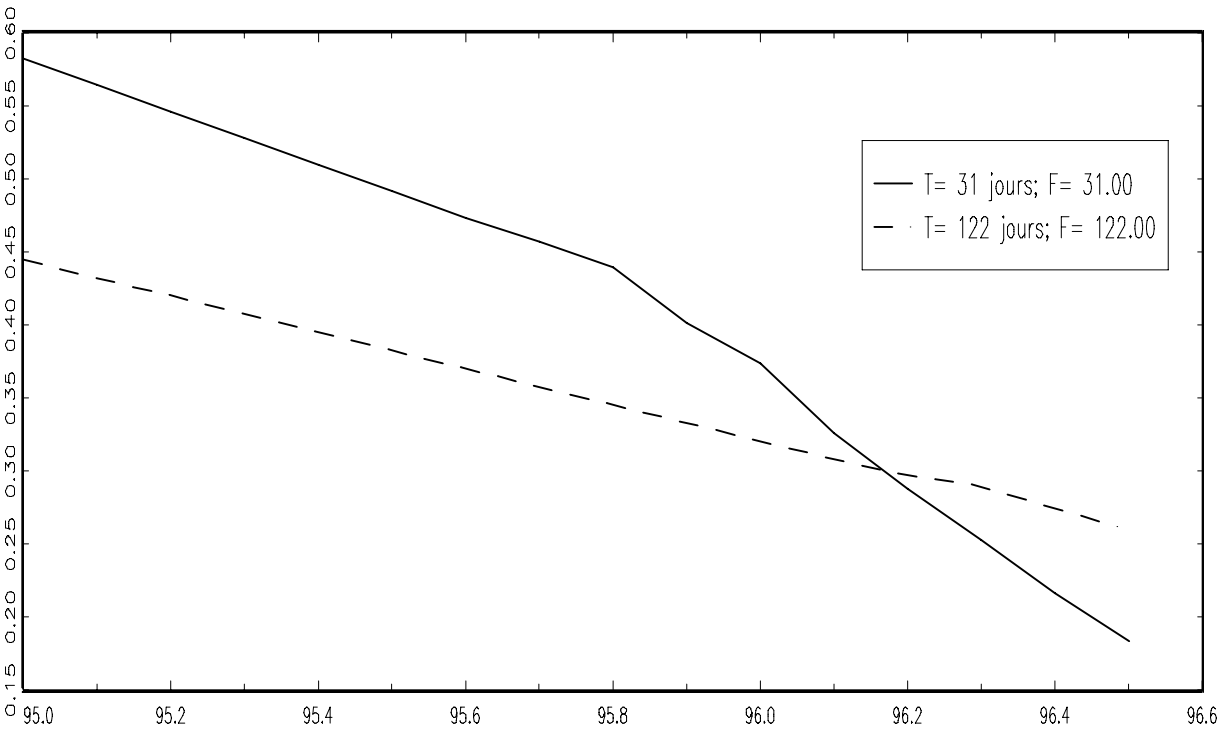


Figure 1.6.b: smiles de volatilites sur les options PIBOR:
pour la journee du 19961115



2.2.2 Applications possibles

La seconde partie de la thèse sera centrée sur la comparaison de différentes méthodes pour extraire la densité neutre au risque de l'actif et chercher le processus le plus pertinent pour décrire les données. On peut envisager plusieurs applications qui utilisent l'information ainsi obtenue sur les marchés et qui feront l'objet de la troisième partie de cette thèse.

- la mesure de la crédibilité de la politique monétaire : la lecture des densités de probabilité éclaire les banques centrales sur la perception des taux d'intérêt et des taux de change futurs. La distribution des anticipations pourrait ainsi fournir aux autorités monétaires des indications ex-ante sur ce que seraient les réactions du marché à un resserrement ou à une détente des conditions monétaires ;
- le calcul d'intervalles de confiance pour la prévision : il s'agit de construire un écart-type de la distribution et donc un intervalle de confiance des taux d'intérêt, des taux de change ou encore des prix futurs. On rejoint ici la notion de Value-at-Risk (VaR) qui a pris son essor récemment dans les cellules de contrôle de risque des établissements bancaires. D'un point de vue purement descriptif, ces intervalles de confiance permettent de donner une idée des anticipations des acteurs du marché. Ainsi, une banque centrale pourra tester les réactions du marché à un événement en particulier et une banque commerciale aura un bon indicateur des positions à prendre sur le marché ;
- la construction de tests d'efficience du marché : on va pouvoir tester le pouvoir prévisionnel de la volatilité implicite pour prévoir la volatilité future. En effet si la volatilité implicite contient plus d'information qu'une autre mesure de la volatilité, on pourra en conclure que les investisseurs sur les marchés d'options sont rationnels et donc que ces marchés sont efficients ;
- la construction de tests de la théorie des anticipations : la connaissance des moments supérieurs (variance, skewness et kurtosis) va permettre de mettre en place des tests de théorie des anticipations plus précis que ceux existant jusqu'à maintenant, incluant l'espérance et parfois la variance du rendement de l'actif ou de l'écart de taux. Il s'agit d'essayer d'expliquer une partie de la prime de risque par ces moments ;
- l'estimation du coefficient d'aversion au risque des agents du marché : l'estimation du biais entre la densité vraie estimée à partir des séries temporelles et la densité neutre au risque estimée à partir des options donne une idée de la prime de risque du marché. On va ainsi pouvoir établir des stratégies de trading prenant en compte

cette information supplémentaire ;

– la “prédiction” des crises : on a ici une estimation de la probabilité des fortes variations du cours de la variable sous-jacente importantes pour les institutions financières.

Deuxième partie

Estimation de la densité neutre au risque : une comparaison des méthodes

Chapitre 1

Relation entre la DNR et les prix d'options

Comme nous l'avons déjà exposé en introduction, les options sont un produit conditionnel et apportent donc des indications sur les anticipations des agents du marché sur l'évolution des cours futurs du sous-jacent. En particulier, comme les options sont cotées pour plusieurs prix d'exercice il est possible d'extraire l'ensemble de la densité du sous-jacent sous la probabilité neutre au risque définie dans la partie précédente.

1.1 Littérature

Une littérature extrêmement variée a surgi dans les années 90 sur la façon d'estimer cette fonction de distribution implicite. A l'origine de toutes les méthodes que nous serons amenés à étudier, on trouve les travaux de Breeden et Litzenberger (1978) qui, les premiers, ont écrit une relation entre les prix d'options et la densité neutre au risque (DNR). On donne ici un aperçu par thème des différents modèles existant en différenciant ce que l'on appellera par la suite les modèles non paramétriques, les modèles structurels et les modèles de diffusion. On entend par modèles non paramétriques, les modèles qui ne nécessitent aucune hypothèse sur l'évolution du processus du sous-jacent ; les modèles structurels sont ceux pour lesquels on fait directement une hypothèse sur la forme fonctionnelle de la distribution ; enfin, les modèles de diffusion sont les modèles faisant appel à une description temporelle stochastique du processus de prix de l'actif sous-jacent.

Historiquement, la recherche a porté en premier lieu sur les modèles de diffusion dans

les années 70. Ils s'orientent davantage vers l'évaluation en soi de l'option que vers l'estimation de la distribution du sous-jacent. Néanmoins, il existe un lien avec cette dernière puisqu'il s'agit de chercher le processus stochastique implicite se rapprochant le plus de l'évolution du processus générateur des données. On peut différencier les modèles de taux des modèles de prix.

Dans le domaine des actions, les premiers travaux sont ceux de Black et Scholes (1973) qui supposent que le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique avec dérive pour évaluer les options européennes sur actions. Merton (1973) adapte le modèle pour la prise en compte des versements des dividendes ; Black (1976) l'adapte aux options sur contrat à terme et Garman et Kohlhagen (1983) aux options de change.

Les véritables modifications dans l'évolution du processus commencent avec le modèle de Merton (1976) qui suppose une discontinuité de l'évolution du processus sous-jacent en introduisant la possibilité que le cours de l'actif saute avant l'échéance de l'option. La distribution du prix de l'actif sous-jacent est alors un mélange d'une loi lognormale et d'une loi de Poisson. Ball et Torous (1983, 1985) reprennent ce modèle pour estimer des prix de calls du CBOE et AMEX sur contrat à terme portant sur des actions du NYSE. Bates (1991) reprend l'idée du modèle à sauts pour analyser si le crash de 1987 était prévisible à travers les prix d'options sur les contrats futurs du S&P500 entre 1985 et 1987. Il trouve que les paramètres du modèle estimés implicitement grâce aux prix d'options indiquent qu'un crash était attendu et que les distributions implicites étaient négativement asymétriques d'octobre 1986 à août 1987. Bates (1996a) applique la diffusion à sauts aux options sur contrat à terme sur yen et deutsche mark sur les périodes 1984-1992 et 1986-1992 et conclue que les distributions neutres au risque issues des prix d'option sont un baromètre des sentiments du marché. Bates (1996b, 2000) cumule une diffusion stochastique de la volatilité et l'existence de sauts dans les variations du prix de l'actif sous-jacent. Malz (1996a) utilise un modèle à sauts simplifié de type Bernoulli, n'autorisant qu'un saut jusqu'à l'échéance de l'option pour estimer la probabilité de réalignement de la livre sterling dans le Système Monétaire Européen.

Hull et White (1987) introduisent un modèle à volatilité stochastique sans corrélation entre les variations du prix du sous-jacent et sa volatilité. Chesney et Scott (1989) étudient l'apport d'un modèle à volatilité stochastique (MVS) par rapport au modèle de Black-Scholes (BS) pour évaluer les options de change dollar/franc suisse. Ils trouvent que le MVS est meilleur qu'un simple modèle de BS avec une volatilité constante mais moins performant qu'un modèle de BS avec une volatilité révisée chaque jour. A l'inverse,

Melino et Turnbull (1990) trouvent qu'une volatilité stochastique donne des résultats bien meilleurs pour la distribution du taux de change entre le Canada et les Etats-Unis. Stein et Stein (1991) développent un modèle où la volatilité suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ils obtiennent des formules fermées pour les prix des options qui incorporent l'effet de queues épaisses. Heston (1993) obtient des formules fermées des prix d'options sur actions, contrats futurs et taux de change, en postulant une diffusion en racine carrée de type Cox-Ingersoll-Ross (1985b) pour la volatilité et en supposant de plus une corrélation non nulle entre les variations de prix et la volatilité. Ball et Roma (1994) comparent plusieurs MVS dont ceux de Heston (1993) et de Stein et Stein (1991). Ils examinent les biais du modèle de BS qui peuvent être éliminés par de tels modèles. Bakshi, Cao et Chen (1997) comparent la capacité des modèles à sauts et des MVS pour l'évaluation et la couverture des options sur contrat futur S&P500. Ils trouvent que l'incorporation de volatilité stochastique et de sauts est importante pour l'évaluation, mais que seul le caractère stochastique de la volatilité améliore la couverture. Moraux, Navatte et Villa (1998) proposent une nouvelle technique de Fourier pour calculer les prix d'option dans un modèle à volatilité stochastique de type Hull et White (1987).

Engle et Mustafa (1992) cherchent à identifier les modèles ARCH (AutoRegressive Conditionally Heteroskedastic) implicites dans les prix d'options avant et après le mois d'octobre 87 et trouvent que la persistance des chocs de volatilité dans les options sur S&P500 est similaire à celle estimée à partir de séries du S&P500.

Enfin, des modèles récents supposent que le temps évolue de façon aléatoire. Ainsi, Madan, Carr et Chang (1998) modélisent le sous-jacent par un mouvement brownien pris à un instant aléatoire donné par un processus gamma. Ils obtiennent des formules fermées pour les prix des options et estiment la densité neutre au risque de l'indice S&P500 à partir des options sur S&P500. Enfin, Geman et Ané (2000) adoptent une idée nouvelle. Ils proposent de modéliser la distribution des rendements en utilisant des changements de temps stochastiques au lieu des processus surbordinateurs traditionnellement utilisés. Ils montrent entre autres que l'utilisation du nombre de transactions est un meilleur changement de temps que le volume de transactions pour retrouver la normalité des rendements. Ils appliquent leur modèle à des données de haute fréquence des prix d'actifs technologiques issus du NASDAQ et retrouvent une normalité des rendements presque parfaite sans hypothèse particulière sur la distribution du changement de temps.

Concernant les modèles de taux, les modèles que nous allons maintenant citer représentent une liste non exhaustive des principaux modèles de taux. Nous ne cherchons pas

ici à faire une revue complète de la littérature sur ces modèles, nous ne citerons que ceux qui nous paraissent apporter un élément à l'estimation de la distribution.

L'adaptation du modèle de Black-Scholes (1973) aux taux courts est due à Merton (1973) pour calculer le prix d'une obligation zéro-coupon[1]. Ce modèle consiste en un simple mouvement brownien avec dérive.

Vasicek (1977) utilise un processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour dériver un modèle d'équilibre des prix de zéro-coupon. Il s'agit d'un processus gaussien avec retour à la moyenne. Cox, Ingersoll et Ross(1985b) utilisent un processus en racine carrée comme modèle de structure par terme à un facteur. Le taux court pour ce modèle suit une distribution khi-deux décentrée. Longstaff (1989) reprend un processus en racine carrée en intégrant la racine carrée du taux court dans le dérive. La distribution correspondante autorise la présence d'asymétrie marquée.

Brennan et Schwartz (1982) modélisent le taux court et le taux long. Longstaff et Schwartz (1992) introduisent un modèle à deux facteurs qui sont le taux court et la variance des variations instantanées du taux court. La distribution résultante est celle d'une combinaison linéaire de variables gamma indépendantes. Hördhal (1999) estime la distribution du taux court futur avec un tel modèle en l'appliquant aux obligations. Ball et Torous (1999) mettent en évidence le caractère stochastique de la volatilité du taux court.

Marsh et Rosenfield (1983) cherchent les processus implicites du taux court en testant plusieurs sous-modèles du taux court. Chan, Karolyi, Longstaff et Sanders (1992) comparent une variété de différents modèles de taux court en utilisant la méthode des moments généralisés. Ils trouvent que les modèles les plus performants sont ceux qui permettent à la volatilité conditionnelle de dépendre fortement du niveau du taux d'intérêt. Ils suggèrent le modèle de Dothan (1978) comme modèle particulièrement performant pour décrire la dynamique des taux courts.

Dothan (1978) propose une structure lognormale sans drift du taux court. Black, Derman et Toy (1990) et Black et Karazinski (1991) suggèrent, au même titre que Dothan (1978), des taux courts lognormaux. Le défaut de ces modèles est de mener à des taux courts infinis et donc de ne pas permettre l'évaluation des contrats à terme sur taux Euro.

Heath, Jarrow et Morton (1992) proposent un modèle des taux forward instantanés reposant sur une structure de volatilité lognormale. Mais les taux deviennent infinis avec

[1] On rappelle qu'un zéro-coupon d'échéance T, noté $B(t,T)$, est un titre qui donne droit à 1F à la date T.

une probabilité strictement positive. La conséquence est que l'on peut construire des actifs contingents de prix nul et de payoff positif, donc des opportunités d'arbitrage. Pour pallier cette difficulté, Brace, Gatarek et Musiela (1997) proposent un modèle rendant chaque taux lognormal sous la probabilité forward[2] au lieu de la probabilité spot. Ainsi les taux à terme semi-annuels et trimestriels peuvent être lognormaux tandis que le modèle reste sans possibilité d'arbitrage[3].

La deuxième catégorie de méthodes que nous étudierons dans cette partie sont les méthodes non paramétriques qui ont pris leur essor principalement à la fin des années 90.

Une première idée est fondée sur l'interpolation du smile de volatilité. Shimko (1993) lisse le smile à l'aide d'un polynôme quadratique avec des restrictions sur les prix d'exercice non cotés. Andersen (1995) s'intéresse à un modèle de volatilité déterministe et utilise des méthodes implicites et semi-implicites de différences finies pour retrouver le prix de l'option. Il souligne l'avantage en temps de calcul d'un tel modèle par rapport aux modèles d'arbres binomiaux implicites. Bordutha et Jermakyan (1996) et Laganado et Osher (1997) reprennent un modèle d'interpolation de surface de volatilités. Malz (1996) propose une interpolation des smiles sur les options de change incorporant les prix des *strangles*, les *risk reversals* et les volatilités à-la-monnaie. Cooper et Talbot (1999) utilisent cette méthode pour essayer d'expliquer les perceptions du marché sur le comportement du JPY/USD pendant l'année 1998. Dumas, Fleming et Whaley (1997) testent plusieurs interpolations du smile de volatilité comme polynôme quadratique du prix d'exercice et de la maturité. Rosenberg et Engle (1997) lissent le logarithme du smile de volatilité, prévenant ainsi la possibilité de volatilité négative. Coleman, Li et Verma (1998) lissent la surface de volatilité avec un spline bicubique. Toujours dans le domaine de la surface de volatilité, Carr et Madan (1998) travaillent avec un processus généralisé à une dimension.

Dupire (1994) utilise le problème dual pour trouver le processus de diffusion unique qui permet de retrouver la densité neutre au risque en reliant la volatilité instantanée à la dérive de la diffusion. Andreasen (1996) reprend le phénomène de dualité mis en évidence par Dupire pour estimer numériquement les surfaces de volatilité qui lui permettent de retrouver les prix d'options et la densité neutre au risque. Britten-Jones et Neuberger

[2] On rappelle que la probabilité forward neutre en m est la probabilité qui rend $\left(\frac{B(t,T)}{B(t,m)}\right)$ martingale ainsi que tous les prix des actifs exprimés dans le numéraire $B(t,m)$ (voir Geman (1989), Jamshidian (1989))

[3] Pour une bonne revue des modèles de structure par terme des taux d'intérêt, on peut se réferer à Musiela et Rutkowski (1998), Gourlaouen (1997).

(1999) sont capables de décrire l'ensemble des processus continus compatibles avec les prix d'options. Ils forcent la composante de volatilité à être markovienne en discrétisant la volatilité dans un ensemble d'états de la volatilité.

Hutchinson, Lo et Poggio (1994) appliquent la théorie des réseaux de neurones pour retrouver une approximation de la formule de Black-Scholes à partir des prix d'options simulés et pour caler les prix d'options sur contrat à terme sur S&P500. Herrmann et Narr (1997) appliquent la théorie des réseaux de neurones aux options sur indice allemand et exhibent le phénomène du smile.

Derman et Kani (1994) proposent un algorithme pour retrouver un arbre implicite risque neutre construit à partir de l'interpolation de la volatilité comme fonction à la fois du prix d'exercice et de la maturité. Rubinstein (1994) développe un arbre implicite pour estimer les prix des actifs contingents à partir des prix d'options, en minimisant sous certaines contraintes les écarts entre les probabilités implicites de l'arbre et les probabilités issues d'un arbre de Cox-Ross-Rubinstein (1979). Jackwerth et Rubinstein (1996) appliquent cette méthode aux options sur S&P500.

Dans un autre domaine, Neuhauss (1995) reprend directement la relation de Breeden et Litzenberger (1978) en travaillant avec la fonction de répartition au lieu de la densité neutre au risque, perdant ainsi moins d'information.

Mizrach (1996) développe une méthode de moments simulés pour estimer la distribution des taux de change USD/GBP et USD/FRF.

Duan (1996) applique la théorie des modèles GARCH pour modéliser le smile de volatilité.

Aït-Sahalia (1996) et Aït-Sahalia et Lo (1998) ont l'idée d'estimer la densité neutre au risque du S&P500 par la technique d'estimation des noyaux. Pritsker (1998) emploie la méthodologie des kernels pour estimer la densité de distribution neutre au risque des taux d'intérêt.

Buchen et Kelly (1996) et Stutzer (1996) appliquent le principe du maximum d'entropie, généralement utilisé dans le domaine de la physique, à l'estimation des densités neutres au risque et à l'évaluation des options. Avallaneda, Friedman, Holmes et Samperi (1997) utilisent cette méthode pour calibrer les surfaces de volatilité.

Bouchouev et Isakov (1997) inversent la formule d'évaluation d'une option et obtiennent une solution numérique de la densité.

L'apparition des méthodes structurelles a été motivée par le besoin de prendre en compte certains aspects des séries temporelles comme la skewness ou l'effet de kurtosis

souvent non suffisamment marqués par des modèles usuels comme les modèles ARCH. Il s'agit de supposer directement que le processus générateur des données suit une distribution déterminée, généralement caractérisée par un ou deux paramètres en plus de la moyenne et la variance de la loi normale et la loi lognormale. De façon logique, il s'en est suivi l'estimation des densités neutres au risque, mais la littérature associée est moins conséquente que pour les modèles de diffusion et les modèles non paramétriques car les méthodes structurelles sont rarement utilisées pour l'évaluation des options.

Les premiers auteurs de ce genre de modèle sont Jarrow et Rudd (1982). Les auteurs supposent que la densité neutre au risque du prix du sous-jacent est donnée par un développement en série d'Edgeworth autour de la loi lognormale, ce qui permet d'estimer directement la skewness et l'excès de kurtosis de la distribution. Corrado et Su (1996, 1997) mettent en œuvre l'idée de Jarrow et Rudd pour obtenir des estimations des moments d'ordre 3 et 4 implicites dans les prix d'options sur S&P500. Rubinstein (1998) utilise des développements en série d'Edgeworth sur une distribution de base binomiale.

McCulloch (1985) s'intéresse à l'évaluation des options européennes lorsque le prix de l'actif sous-jacent est dirigé par une loi log-stable. Il obtient des formules fermées d'options européennes sur action, taux de change, obligations. Belkacem (1996) écrit la diffusion du prix de l'actif lorsque celui-ci suit un processus α-stable et calcule le prix d'une option européenne par des simulations de Monte-Carlo.

Madan et Milne (1994) se placent dans un espace de Hilbert et écrivent les densités statistique et neutre au risque du cours de l'actif sous la forme d'un développement en polynômes d'Hermite. Abken, Madan et Ramamurtie (1996) appliquent la méthode aux options sur contrats à terme sur Eurodollars. Chiarella, El-Hassan et Kucera (1998) utilisent des développements en séries de Fourier-Hermite pour évaluer des options européennes et américaines sur action.

Sherick, Garcia et Tirupattur (1996) utilisent la fonction de Burr III pour modéliser la distribution du sous-jacent et l'appliquent aux options sur contrat à terme de soja du CBOT. Sherrick, Irwin et Forster (1992, 1996) estiment la distribution neutre au risque du S&P500 par une densité de Burr XII mais ne tiennent pas compte de la correction due à l'exercice anticipé par les options américaines.

Bahra (1996), puis Melick et Thomas (1997) supposent que la densité neutre au risque est donnée par la combinaison linéaire de densités lognormales. Ces derniers estiment la densité neutre au risque du prix du pétrole pendant la crise du Golfe et trouvent que la densité diffère sensiblement de celle obtenue par des modèles standard. Söderlind et

Svensson (1997) utilisent également un mélange de lois lognormales sur les options sur obligations pour retrouver la distribution du taux d'intérêt. Galati et Melick (1999) estiment les moments à l'aide d'un mélange de lois lognormales pour comprendre comment sont perçues les interventions de la Banque Centrale par les traders des marchés de change à partir des options sur JPY/USD entre 1993 et 1996.

Backus, Foresi, Li et Wu (1997) approchent la distribution conditionnelle du prix du sous-jacent par un développement en série de Gram-Charlier et trouvent que les biais par rapport à une densité lognormale sont très présents pour les options de maturité courte et tendent à disparaître pour des maturités assez longues.

Abadir et Rockinger (1997) utilisent des fonctions hypergéométriques (ou de Kummer) comme base pour la densité neutre au risque et dérivent des formules fermées des prix d'options.

Brenner et Eom (1997) utilisent des polynômes de Laguerre comme correction d'une loi gamma.

Potters, Cont et Bouchaud (1998) utilisent un développement à partir des cumulants pour ajouter un terme de correction unique à la distribution normale, qui permet de prendre en compte la kurtosis de la distribution neutre au risque.

Aparicio et Lodges (1998) utilisent des fonctions beta généralisées du second ordre.

1.2 La relation de Breeden et Litzenberger

Historiquement, Breeden et Litzenberger (1978) sont les premiers auteurs à trouver une relation entre le prix d'une option et la distribution du prix de son sous-jacent. Ils montrent en effet que cette dernière peut être obtenue, à un terme d'actualisation près, en différenciant deux fois le prix d'une option d'achat par rapport au prix d'exercice, en appliquant la règle de Leibnitz suivante. Le prix d'un call de prix d'exercice X et de valeur du sous-jacent aujourd'hui S s'écrit :

$$C(t,T,S,X) = e^{-r_t(T)(T-t)} \int_X^\infty (S_T - X) q(S_T) dS_T$$

où $q(x)$ est la densité de probabilité de l'actif sous-jacent. On note Q sa fonction de répartition.

En différenciant deux fois le prix du call par rapport au strike, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial X} &= -e^{-r_t(T)(T-t)}\left[1-Q(X)\right] \\ \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} &= e^{-r_t(T)(T-t)}q(X).\end{aligned}$$

On a donc bien le résultat attendu :

$$q(x) = e^{-r_t(T)(T-t)}\frac{\partial^2 C(t,T,F,x)}{\partial x^2}. \tag{1.1}$$

Dans l'hypothèse d'un nombre suffisamment élevé de prix d'exercice, on a ici une manière très simple de retrouver la densité neutre au risque du prix du sous-jacent à partir des prix d'option. Dans la réalité, une option n'est cotée que pour un nombre très limité de prix d'exercice, généralement insuffisant pour appliquer l'équation (1.1). On doit alors recourir à des méthodes de lissage donnant le prix de l'option comme une fonction du prix d'exercice.

1.3 Notations, commentaires et options américaines

1.3.1 Notations

Pour chaque modèle étudié, on calcule, quand cela est possible les moments de F_T[4]. On adopte les notations suivantes : si a est la loi de F_T, les moments de la densité sont définis par :

$$\gamma_j(F_T) = \int x^j a(x)dx,$$

et les moments centrés par :

$$\mu_j(F_T) = \int (x-\gamma_1)^j a(x)dx.$$

[4] représente ici le prix du contrat à terme dans le cas des options sur contat Pibor 3 mois, et le prix à terme implicite dans le cas du CAC 40.

On définit l'espérance, la variance, la skewness et la kurtosis d'une variable X par :

$$\begin{aligned}
\text{esp}(X) &= \gamma_1(X) \\
\text{var}(X) &= \mu_2(X) \\
\text{skew}(X) &= \frac{\mu_3(X)}{\mu_2(X)^{\frac{3}{2}}} \\
\text{kurt}(X) &= \frac{\mu_4(X)}{\mu_2(X)^2}.
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
\tau &= T - t \\
m &= \ln(F_t) - \frac{1}{2}\sigma^2\tau \\
s &= \sigma\sqrt{\tau} \\
y &= \frac{(\ln(x) - m)}{s} \\
q^2 &= \exp\left(\sigma^2\tau\right) - 1.
\end{aligned}$$

1.3.2 Correction des prix pour les options américaines

Une option américaine est un contrat qui autorise le détenteur de l'option à choisir l'instant d'exercice. Il existe plusieurs méthodes pour ajuster le prix d'une option américaine[5]. Les deux méthodes employées dans cette étude sont celles de Barone-Adesi et Whaley (1987) et Melik et Thomas (1997).

Whaley (1981, 1982) apporte une correction aux équations de Roll (1977) et Geske (1979) pour l'évaluation des calls sur des actions payant des dividendes. Geske et Johnson (1984) introduisent une autre approche moins coûteuse numériquement que celle des différences finies, mais encore trop coûteuse, puisqu'elle nécessite l'évaluation de densités normales cumulées bivariées, trivariées ou multivariées d'ordre plus grand.

Barone-Adesi et Whaley (1987) proposent une forme analytique approchée pour le prix de l'option américaine. Leur approche est fondée sur l'approximation quadratique de

[5] La première méthode est celle des différences finies utilisée par Schwartz (1977) qui évalue le prix des warrants sur action payant des dividendes, puis par Brennan et Schwartz (1977) qui calculent le prix d'une option put américain sur des actions ne payant pas de dividende. Ramaswamy et Sundaresan (1985) et Brenner, Courtadon et Subrahmanyam (1985) ont appliqué la méthode des différences finies pour évaluer des options américaines sur contrat à terme. La limite de cette méthode réside dans le coût numérique qu'elle occasionne. Pour s'assurer un bon niveau de convergence, il faut discrétiser le prix de l'actif et le temps sur une grille et la parcourir de façon que le prix de l'option traverse tous les chemins possibles jusqu'à sa maturité.

MacMillan (1986) qui donne une approximation de la prime d'exercice anticipé. Whaley (1986) adapte la méthode aux options sur contrat à terme.

Melik et Thomas (1997) donnent une formule analytique très rapide pour calculer le prix d'une option américaine en encadrant celui-ci par deux bornes et en écrivant le prix de l'option comme une combinaison linéaire de ces bornes.

Méthode de Barone-Adesi et Whaley

Cette méthode repose sur l'idée suivante : si le prix de l'option américaine suit la même équation aux dérivées partielles (EDP) que l'option européenne, la prime d'exercice anticipé suit également cette même EDP.

Le prix du call américain $C^{\mathrm{a}}(t,T,S,K)$ pour le modèle de Black et Scholes avec la méthode de Barone-Adesi et Whaley (1987) est donné par :

$$C^{\mathrm{a}}(t,T,S,K) = \begin{cases} C^{\mathrm{e}}(t,T,S,K) + A_2 \left(\frac{S_t}{S^*}\right)^{q_2} & \text{si } S_t < S^*, \\ S_t - K & \text{si } S_t \geq S^*, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $C^{\mathrm{e}}(t,T,S,K)$ représente le prix du call européen avec :

$$A_2 = \left[1 - e^{(b-r)\tau} N(d_1(S^*))\right] \frac{S^*}{q_2}, \tag{1.3}$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\left[-(N-1) + \sqrt{(N-1)^2 + 4\frac{M}{G}}\right], \tag{1.4}$$

$$d_1(S) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln(\frac{S}{K}) + (b + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\right), \tag{1.5}$$

$$M = 2r/\sigma^2, \tag{1.6}$$

$$N = 2b/\sigma^2, \tag{1.7}$$

$$G = 1 - e^{-r_t(T)\tau} \tag{1.8}$$

et S^* est solution de l'équation

$$S^* - K = C^{\mathrm{e}}(t,T,S^*,K) + \left[1 - e^{(b-r)\tau} N(d_1(S^*))\right] \frac{S^*}{q_2}.$$

On peut obtenir une formule similaire pour le prix du put américain :

$$P^{\mathrm{a}}(t,T,S,K) = \begin{cases} P^{\mathrm{e}}(t,T,S,K) + A_1 \left(\frac{S_t}{S^{**}}\right)^{q_1} & \text{si } S_t > S^{**}, \\ K - S_t & \text{si } S_t \leq S^{**}, \end{cases} \tag{1.9}$$

où

$$A_1 = -\left[1 - e^{(b-r)\tau} N(-d_1(S^{**}))\right] \frac{S^{**}}{q_1}, \tag{1.10}$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\left[-(N-1) - \sqrt{(N-1)^2 + 4\frac{M}{G}}\right], \tag{1.11}$$

et S^{**} est solution de l'équation :

$$K - S^{**} = P^e(t, T, S^{**}, K) - \left[1 - e^{(b-r)\tau} N(-d_1(S^{**}))\right] \frac{S^{**}}{q_1}. \tag{1.12}$$

Tous les détails du calcul du prix d'une option européenne avec la méthode de Whaley se trouvent en Annexe A page 171.

La méthode de Melik et Thomas

L'approche développée par Melik et Thomas est plus intuitive que celle de Barone-Adesi et Whaley. Il s'agit d'encadrer le prix de l'option par deux bornes représentant la valeur minimum et maximum du prix, connaissant la forme de la distribution du prix futur. Cette méthode peut s'appliquer à n'importe quel processus stochastique dont la densité de distribution a une forme connue. Si l'on arrive à encadrer le prix de l'option, on pourra écrire celui-ci comme combinaison linéaire des deux bornes d'encadrement. L'idée de la méthode repose sur l'hypothèse de martingale du sous-jacent sous la probabilité risque neutre. En notant $r_t(1)$ le taux à un jour, les bornes inférieures et supérieures pour un call et un put sont données par :

$$C_t^u = \max\left[E_t(S_T) - K, e^{r_t(1)} E_t\left(\max(0, S_T - X)\right)\right], \tag{1.13}$$

$$C_t^l = \max\left[E_t(S_T) - K, e^{r_t(T)} E_t\left(\max(0, S_T - X)\right)\right], \tag{1.14}$$

$$P_t^u = \max\left[K - E_t(S_T), e^{r_t(1)} E_t\left(\max(0, X - S_T)\right)\right], \tag{1.15}$$

$$P_t^l = \max\left[K - E_t(S_T), e^{r_t(T)} E_t\left(\max(0, K - S_T)\right)\right]. \tag{1.16}$$

Nous utiliserons la parité call-put et n'aurons donc que les calls à notre actif pour estimer la distribution du sous-jacent. Le prix d'une option d'achat américaine sera donc donnée par

$$C^{\mathrm{a}}(t, T, S, K) = w_1 C_t^u + (1 - w_1) C_t^l$$

et l'on peut noter que l'on a un paramètre supplémentaire w_1 à estimer.

Dès que le modèle nous le permettra, nous retiendrons cette dernière méthode pour ajuster les prix des options européennes aux options américaines.

1.3.3 Remarques concernant les graphiques

Pour chaque méthode mise en œuvre dans cette partie, nous montrons à la fin de la présentation de la méthode un graphique de la forme de la densité neutre au risque. Ces densités sont estimées à partir de données réelles d'options sur indice CAC 40 et d'options sur contrat à terme Pibor 3 mois. Les graphiques présentés font office d'exemple du type de courbe que l'on peut obtenir avec les différents modèles. Les détails de l'estimation de ces courbes n'est donc pas expliqué ici mais dans le dernier chapitre de cette partie.

Chapitre 2

Modèles de diffusion du sous-jacent

Nous définissons par modèles de diffusion tout modèle nécessitant une hypothèse sur la dynamique du processus de prix de l'actif sous-jacent. Parmi ces modèles, on retrouve le modèle choisi comme modèle de référence, à savoir le modèle de Black-Scholes (1973), étendu aux contrats à terme par Black (1973).

2.1 Les modèles de référence

2.1.1 Le modèle de Black et Scholes sur les prix

Nous avons exposé en (2.1.2) les fondements du modèle de Black-Scholes. On rappelle que la dynamique du prix S_t est donnée par (2.12) et on en déduit que le prix à terme F_T sous $\mathbf{Q}$ est un mouvement brownien géométrique :

$$dF_t = \sigma F_t dW_t^*. \tag{2.1a}$$

Le prix d'un call européen sur une action versant des dividendes avec le modèle de Black-Scholes (1973) est calculé à l'aide de (2.13) et est donné par :

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{BS}}(t,T,S_t,K) &= S_t e^{-d_t(T)\tau} N(d_1) - K e^{-r_t(T)\tau} N(d_2) && (2.2)\\ &= e^{-r_t(T)\tau}\left[F_t N(d_1) - K N(d_2)\right], && (2.3) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln(\frac{F_t}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau\right), \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{\tau}. \end{aligned}$$

La densité de F_T est une densité lognormale, notée $q^{\mathrm{BS}}(x)$, de moyenne m et de variance s^2 dont les expressions sont les suivantes :

$$q^{\mathrm{BS}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}sx}\exp\left[-\frac{\left(\ln(x)-m\right)^2}{2s^2}\right], \tag{2.4}$$

où

$$\begin{aligned} m &= \ln(F_t) - \frac{1}{2}s^2 \\ s &= \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

L'espérance de F vaut :

$$\gamma_1(F_T) = \exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right) = F_t.$$

Les moments centrés jusqu'à l'ordre 4 valent :

$$\begin{aligned} \mu_2(F_T) &= \left[\gamma_1(F_T)\right]^2 p^2 \\ \mu_3(F_T) &= \left[\gamma_1(F_T)\right]^3 p^3\left(3p + p^3\right) \\ \mu_4(F_T) &= \left[\gamma_1(F_T)\right]^4 p^4\left(3 + 16p^2 + 15p^4 + 6p^6 + p^8\right) \end{aligned}$$

où $p = \sqrt{\exp(s^2) - 1}$.

Les graphiques (2.1.a) à (2.1.d) montrent les densités lognormales que l'on peut obtenir. Cette distribution sera considérée dans la suite comme le modèle de référence au sens où les rendements suivant une loi normale, ils ne sont soumis à aucune asymétrie ni excès de kurtosis.

Figure 2.1.a: DNR du CAC 40 avec une lognormale
pour la date du 970314

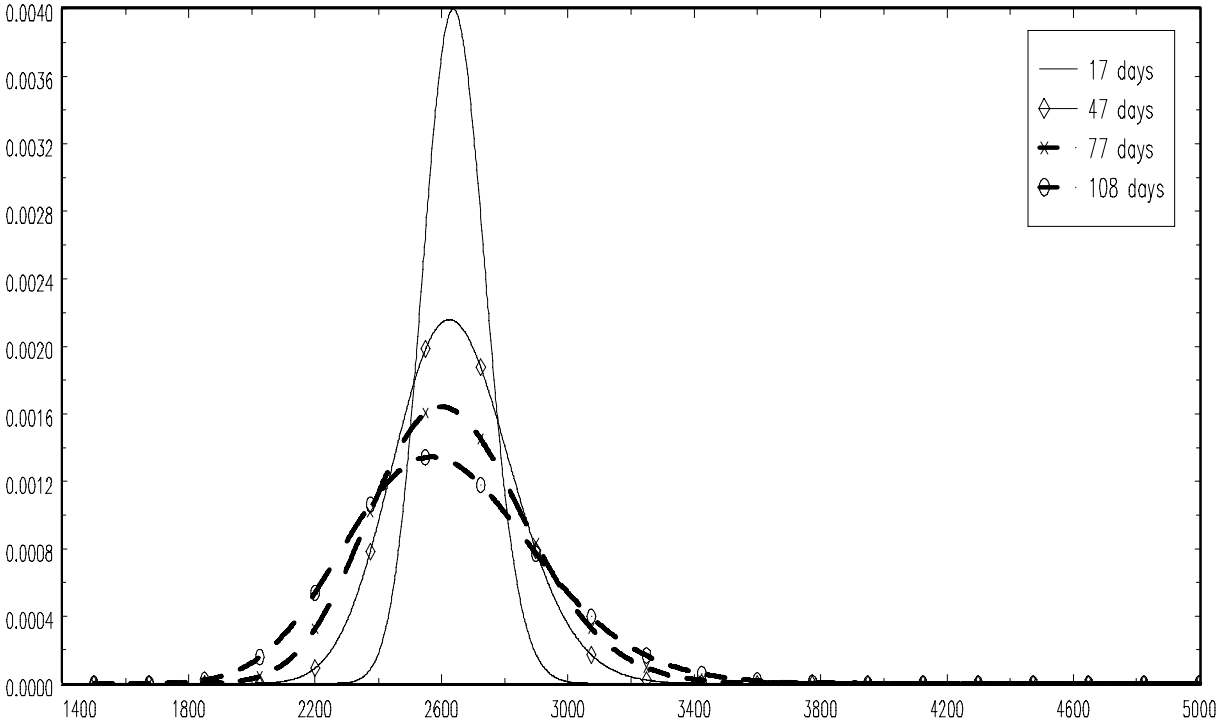


Figure 2.1.b: DNR du CAC 40 avec une lognormale
pour la date du 970814

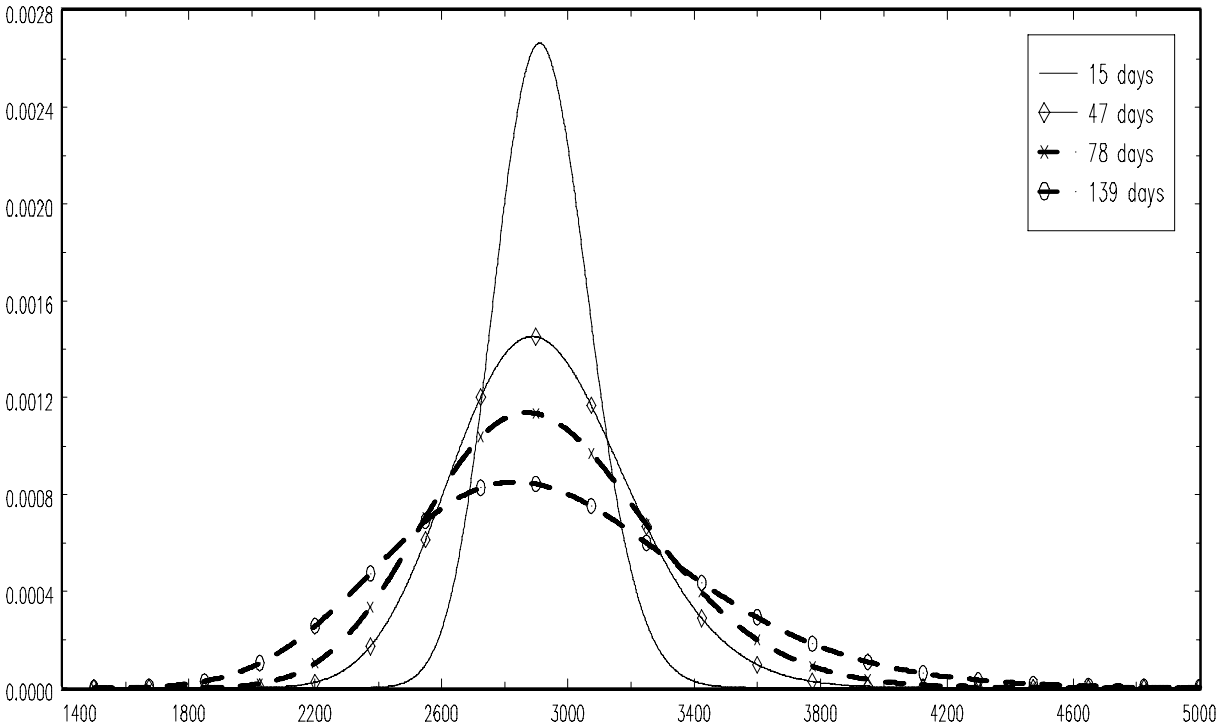


Figure 2.1.c: DNR du CAC 40 avec une lognormale
pour la date du 971015

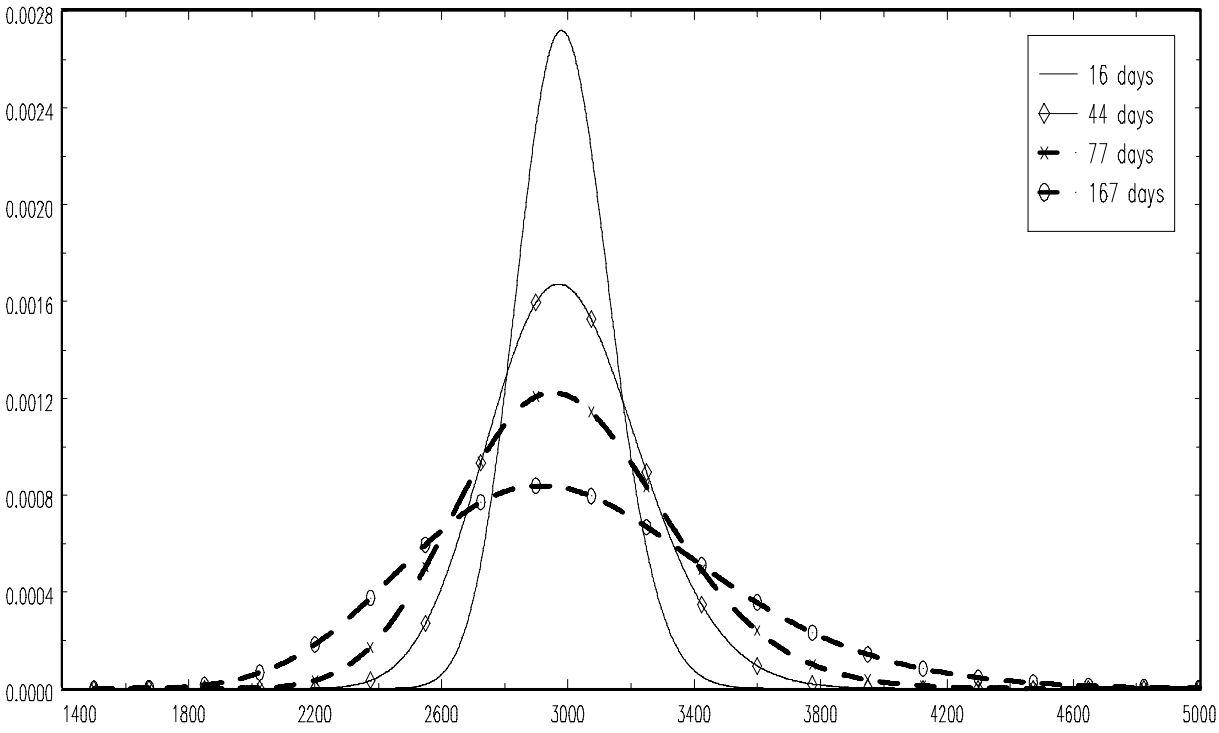
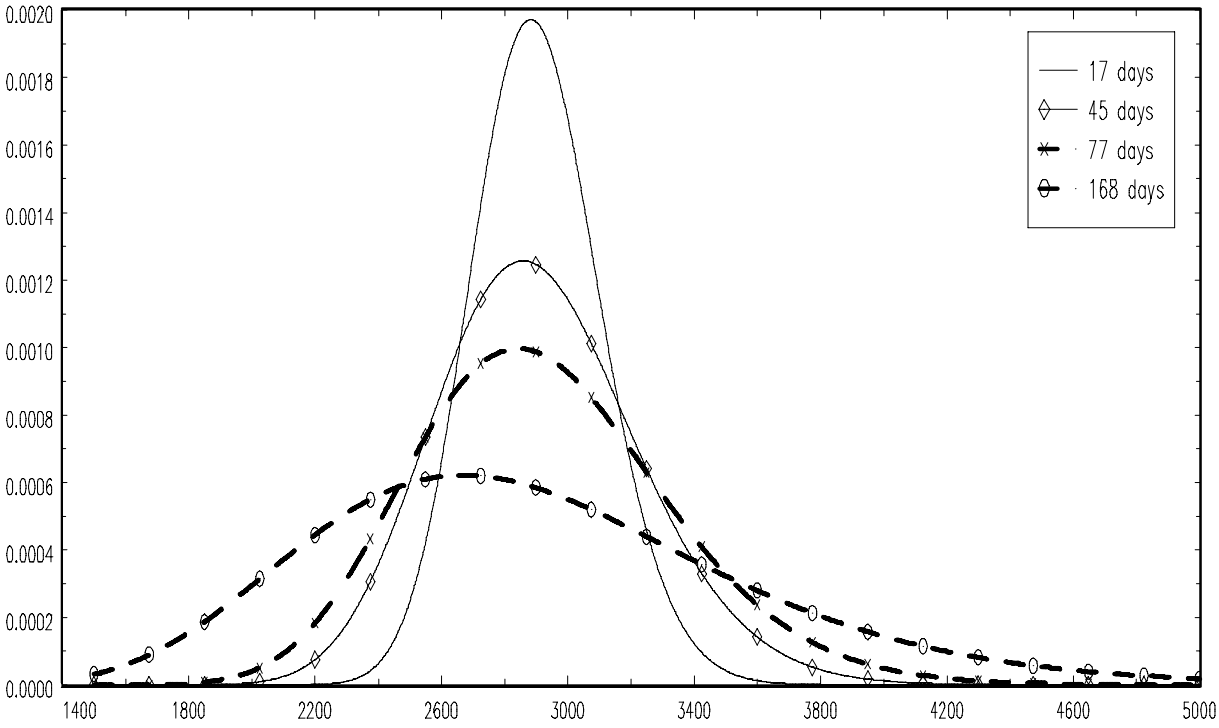


Figure 2.1.d: DNR du CAC 40 avec une lognormale
pour la date du 980113



2.1.2 Le modèle de Black sur les taux

Les options sur contrat futur que nous étudierons sont des options sur contrat à terme de taux d'intérêt PIBOR. Le taux sous-jacent du contrat PIBOR 3 mois est un taux à terme et pour cette raison nous devrions utiliser comme modèle de référence un modèle qui autorise la modélisation directe des taux à terme. Si le but de cette étude était de tester des modèles d'évaluation de produits dérivés de taux, nous appliquerions un modèle du type Heath-Jarrow-Morton (1992) ou Brace-Gatarek-Musiela (1997) qui modélisent les taux forward instantanés. Par souci de cohérence avec la suite où les modèles d'estimation de la densité du prix du contrat sont des modèles de prix, nous choisissons comme benchmark le modèle de Black que nous appliquerons directement au prix du contrat à terme. Ce choix est motivé par les remarques suivantes. En supposant un marché sans friction, Cox, Ingersoll et Ross (1981) établissent qu'un prix de contrat à terme correspond réellement à la valeur d'un actif particulier. Ball et Torous (1986) expliquent que dans cette perspective, le prix à l'équilibre des options sur contrat à terme ne diffère fondamentalement pas du prix à l'équilibre d'une option sur actif commun. Abken (1995) justifie également ce choix en écrivant : "...In practice, many users of Eurodollar futures options employ Black's model and one can argue that it is a not bad approximation for options having less than one year to maturity. (For such options, the option prices is much more sensitive to changes in its expected payoff than to changes in the discount factor)..." L'avantage de cette approche est la possibilité d'appliquer les techniques standard d'évaluation d'option aux options sur contrat à terme, avec les éventuelles modifications requises. En particulier le modèle de Black s'applique aux options sur contrat à terme Pibor avec une légère subtilité que nous décrivons maintenant.

Si l'on note $L(T, T+\delta)$ le taux Pibor 3 mois ($\delta = 0,25$) en T, la diffusion du contrat futur $F_T = 100 - L(T, T+\delta)$ sous $\mathbf{Q}$ est :

$$dF_T = \sigma F_T dW_T^*.$$

Le prix d'un call européen sur contrat à terme Pibor est donné par :

$$C^{\mathrm{BL}}(t, T, F_t, K) = e^{-r_t(T)\tau} \left[(100 - K)N(-d_2) - (100 - F_t)N(-d_1)\right],$$

avec

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln(\frac{100-F_t}{100-K}) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau\right), \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{\tau}. \end{aligned}$$

La densité de $L(T, T+\delta)$ est une densité lognormale, donnée par (2.4) de moyenne m et de variance s^2 :

$$q^{\mathrm{BS}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}sx}\exp\left[-\frac{(\ln(x)-m)^2}{2s^2}\right],$$

où

$$\begin{aligned} m &= \ln(L(T,T+\delta)) - \frac{1}{2}s^2, \\ s &= \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

L'espérance de $L(T, T+\delta)$ vaut :

$$\gamma_1(L(T,T+\delta)) = \exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right) = L(t,t+\delta).$$

Les moments centrés jusqu'à l'ordre 4 valent :

$$\begin{aligned} \mu_2(L(T,T+\delta)) &= \left[\gamma_1(L(T,T+\delta))\right]^2 (F_T)p^2 \\ \mu_3(L(T,T+\delta)) &= \left[\gamma_1(L(T,T+\delta))\right]^3 p^3\left(3p+p^3\right) \\ \mu_4(L(T,T+\delta)) &= \left[\gamma_1(L(T,T+\delta))\right]^4 p^4\left(3+16p^2+15p^4+6p^6+p^8\right) \end{aligned}$$

où $p = \sqrt{\exp(s^2)-1}$.

On montre en figures (2.2.a) à (2.2.d) les graphiques des densités neutres au risque obtenues sur le taux Pibor avec le modèle de Black.

Figure 2.2.a: DNR du PIBOR avec une lognormale
pour la date du 970421

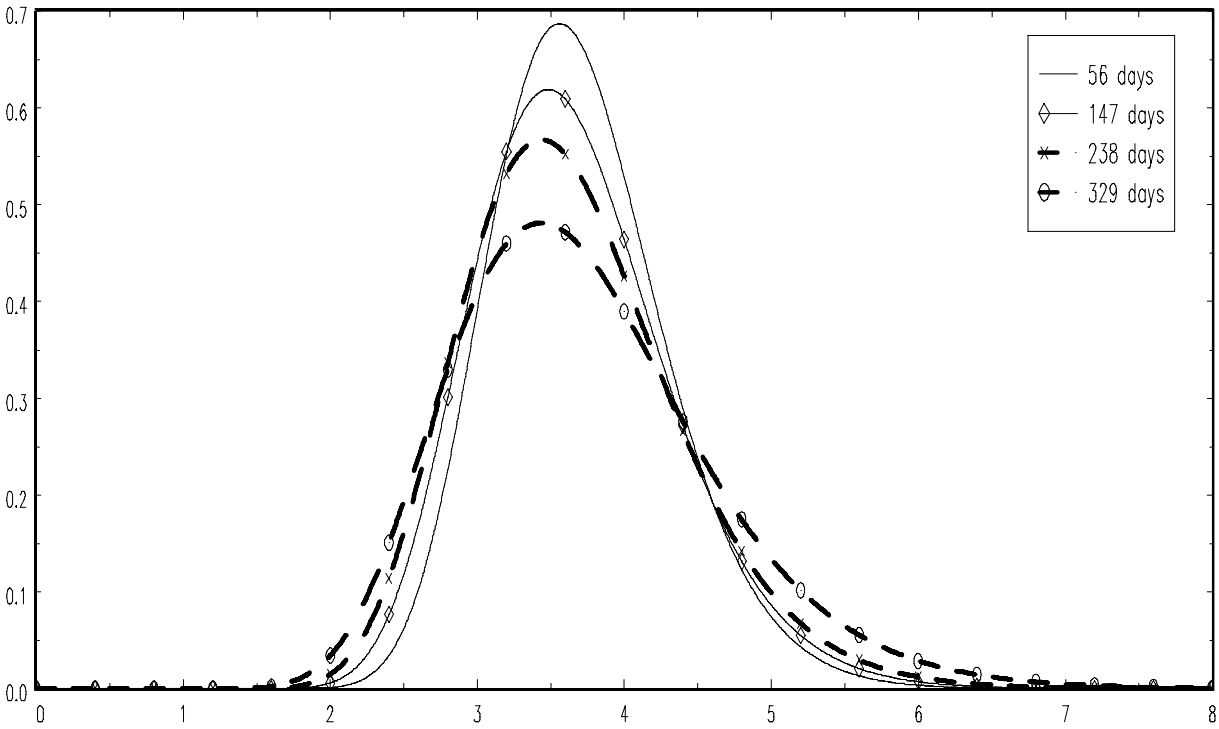


Figure 2.2.b: DNR du taux PIBOR avec une lognormale
pour la date du 970526

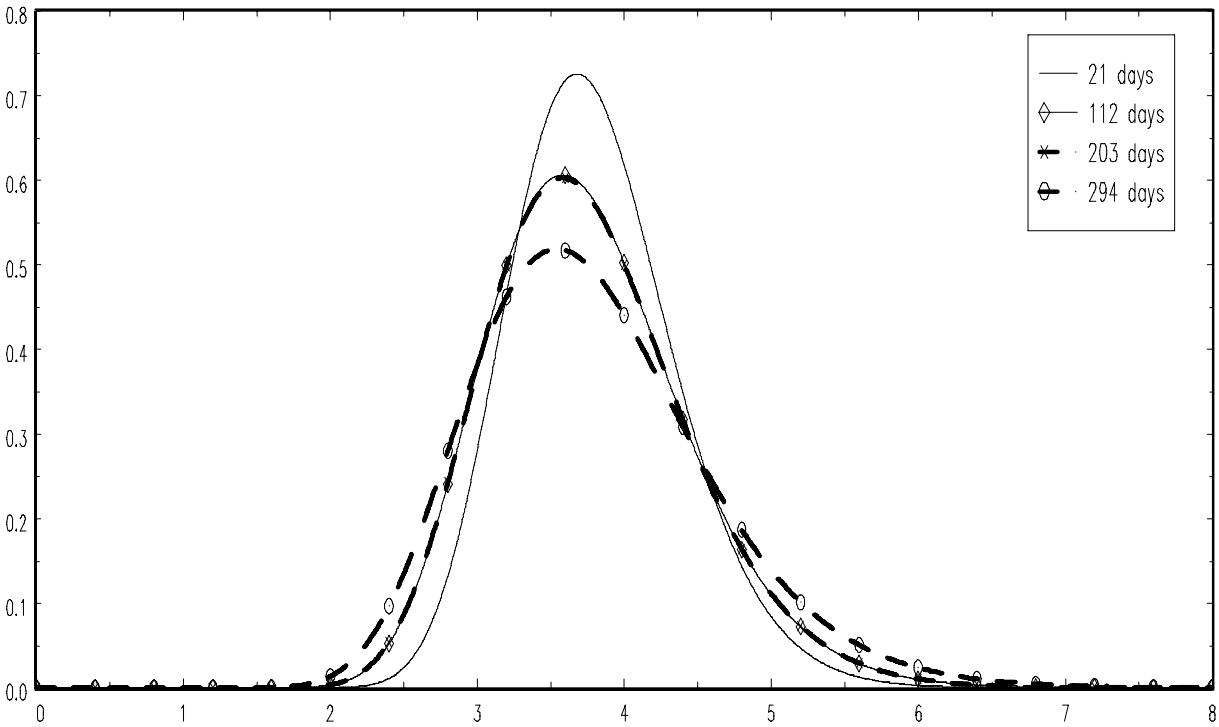


Figure 2.2.c: DNR du taux PIBOR avec une lognormale
pour la date du 970602

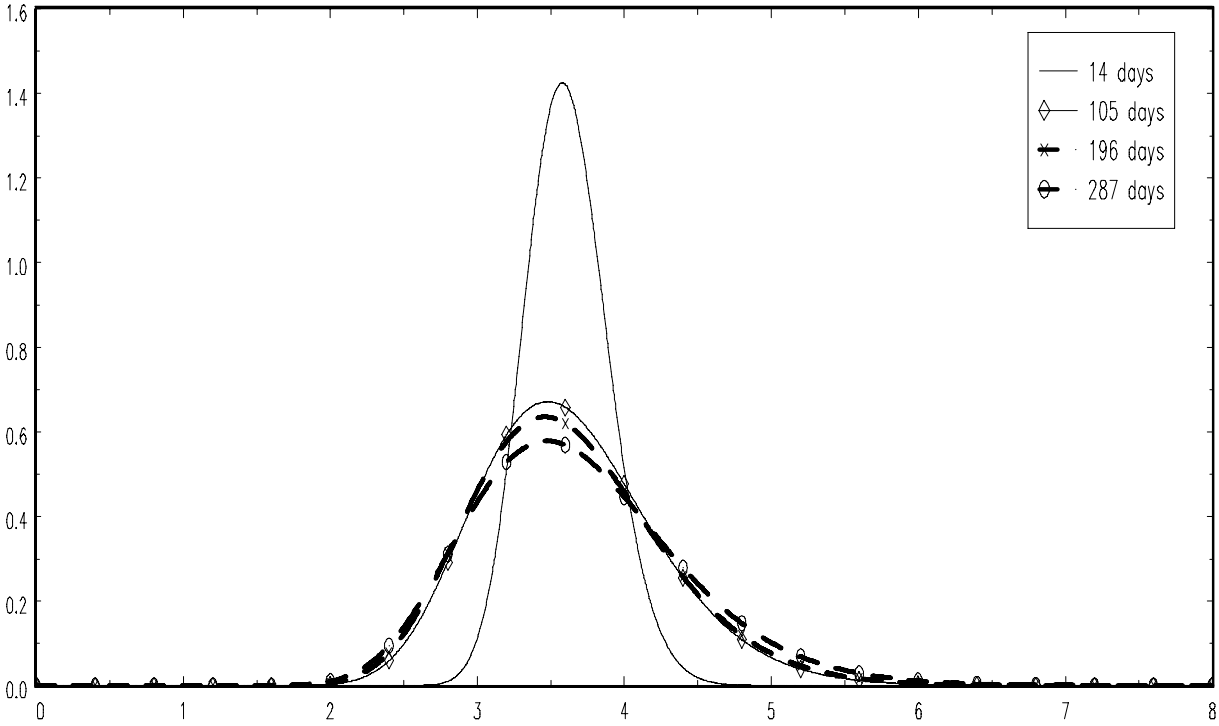
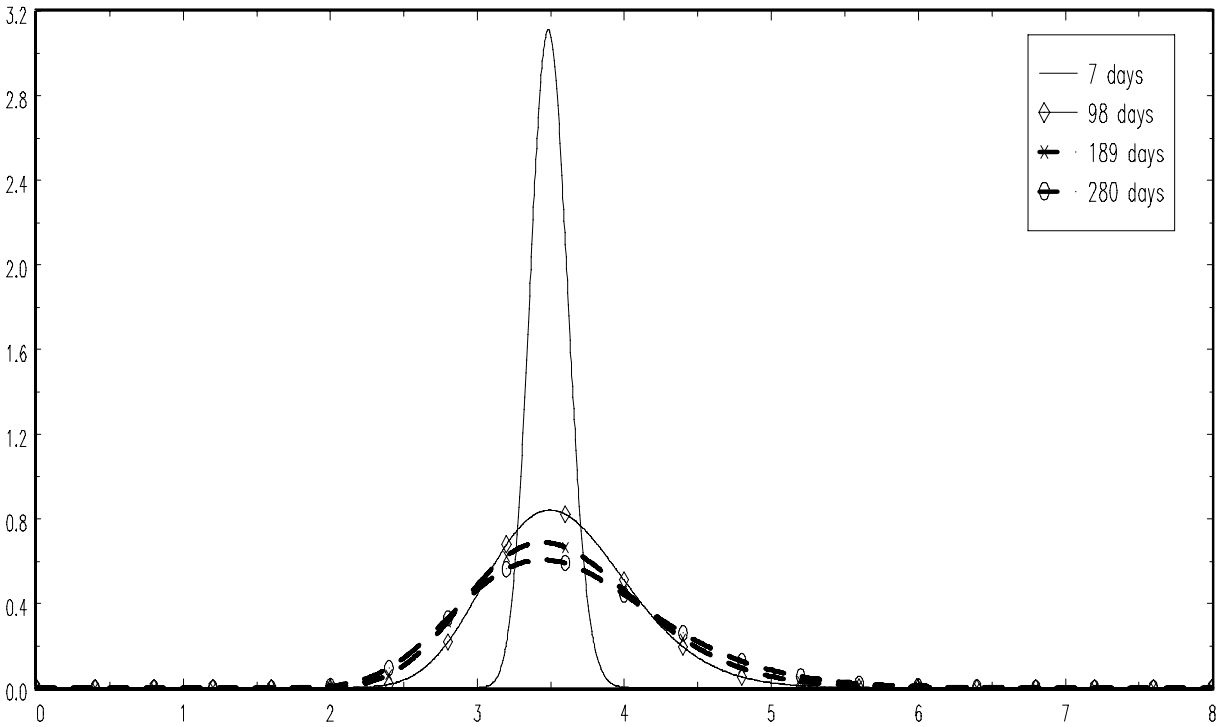


Figure 2.2.d: DNR du CAC 40 avec une lognormale
pour la date du 970609



2.2 Modèle à sauts

Dans le modèle de Black et Scholes (1973), le niveau de l'indice est une fonction continue du temps. Cependant, certains événements rares (modification de la conjoncture internationale) peuvent entraîner des variations brutales des cours. Pour modéliser de tels phénomènes, on est amené à introduire des processus à trajectoires discontinues. Ainsi Ball et Torous (1983, 1985), Jorion (1988), Bates (1991, 1996a, 1996b, 2000), Malz (1996a, 1996b), Scott (1997) modélisent le rendement instantané de l'indice par un processus de diffusion avec sauts, qui permet de prendre en compte les effets de skewness et de kurtosis. Si les sauts dans chaque direction sont de taille égale, seule la kurtosis sera affectée ; si les sauts dans une des directions sont plus larges ou plus fréquents, alors il y aura également un effet d'asymétrie.

2.2.1 Le modèle

Bates (1991) donne l'équation de diffusion du processus de prix futur de l'indice dans un univers risque neutre :

$$\frac{dF_t}{F_t} = -\lambda \overline{k} dt + \sigma dW_t + k dq_{t,T} \tag{2.5}$$

où λ est la fréquence de saut, $\overline{k} = E(k)$ où k est la taille du saut éventuel et $q_{t,T}$ est un compteur de Poisson d'intensité λ, i.e. $P(dq = 1) = \lambda$. De plus, en écrivant $k = e^{\gamma} - 1$, la variable γ représente le saut aléatoire du logarithme du prix, conditionnellement à l'occurrence d'un saut. On suppose qu'elle est distribuée comme une loi normale de moyenne $\ln(1+\overline{k}) - \frac{1}{2}\delta^2$ et de variance δ^2[1].

Le prix d'une option dans le cadre d'un processus en (2.5), est donné par (2.13) :

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{JMP}}(t,F,T,K) &= e^{-r_t(T)\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(n \text{ sauts}) E_t^{\mathbf{Q}}[(F_T - K)^+ / n \text{ sauts}]^2 \\ &= e^{-r_t(T)\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} \right] \left[F e^{b(n)\tau} N(d_{1n}) - K N(d_{2n}) \right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

[1] Ball et Torous (1983) et Malz (1996a, 1996b) proposent un modèle simplifié dans lequel la taille du saut est déterministe et font l'hypothèse d'un saut unique jusqu'à la maturité. Leur modèle conduit à une distribution de type Bernouilli.

où

$$\begin{aligned} b(n) &= -\lambda\overline{k} + \frac{n\ln(1+\overline{k})}{\tau}, \\ d_{1n} &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau + n\delta^2}}\left[\ln(\frac{F}{K}) + b(n)\tau + \frac{1}{2}(\sigma^2\tau + n\delta^2)\right] \\ d_{2n} &= d_{1n} - \sqrt{\sigma^2\tau + n\delta^2}. \end{aligned}$$

En dérivant deux fois (2.6), on déduit la densité du processus à sauts :

$$q^{\mathrm{JMP}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2\tau + n\delta^2}z}\exp\left[-\frac{\left(\ln(z) - m_n(\tau)\right)^2}{2\left(\sigma^2\tau + n\delta^2\right)}\right] \tag{2.7}$$

avec

$$m_n(\tau) = \ln(F) + b(n)\tau.$$

2.2.2 Moments

Les moments jusqu'à l'ordre 4 de $x_t = \ln(F_T/F)$ lorsque F_T suit le processus (2.5), sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathrm{esp}(x_t) &= -\frac{1}{2}\left[\sigma^2 + \lambda\left(\overline{\gamma}^2 + \delta^2\right)\right]\tau \\ \mathrm{var}(x_t) &= \left[\sigma^2 + \lambda\left(\overline{\gamma}^2 + \delta^2\right)\right]\tau, \\ \mathrm{skew}(x_t) &= \frac{\lambda\overline{\gamma}^2\left[\overline{\gamma}^2 + 3\delta^2\right]}{\mathrm{var}(x_t)^{3/2}}, \\ \mathrm{kurt}(x_t) &= \frac{\lambda\left[\overline{\gamma}^4 + 6\overline{\gamma}^2\delta^2 + 3\delta^4\right]}{\mathrm{var}(x_t)^2}, \end{aligned}$$

où

$$\overline{\gamma} = \ln(1+\overline{k}) - \frac{1}{2}\delta^2.$$

Les graphiques (2.3.a) à (2.3.d) montrent les densités neutres au risque obtenues pour le modèle à sauts sur le CAC 40. La présence de sauts dans la distribution peut faire apparaître une bimodalité de la distribution et des queues de distributions particulièrement épaisses.

Figure 2.3.a: DNR du CAC 40 avec un modele a sauts
pour la date du 970314

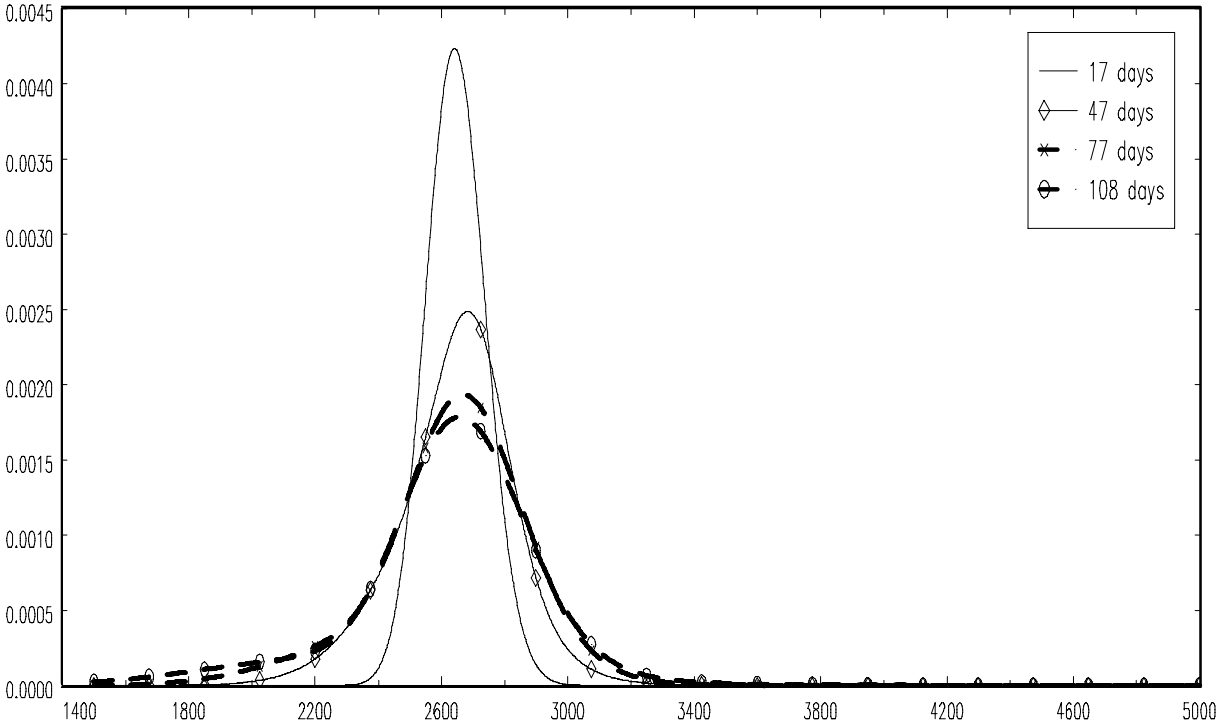


Figure 2.3.b: DNR du CAC 40 avec un modele a sauts
pour la date du 970814

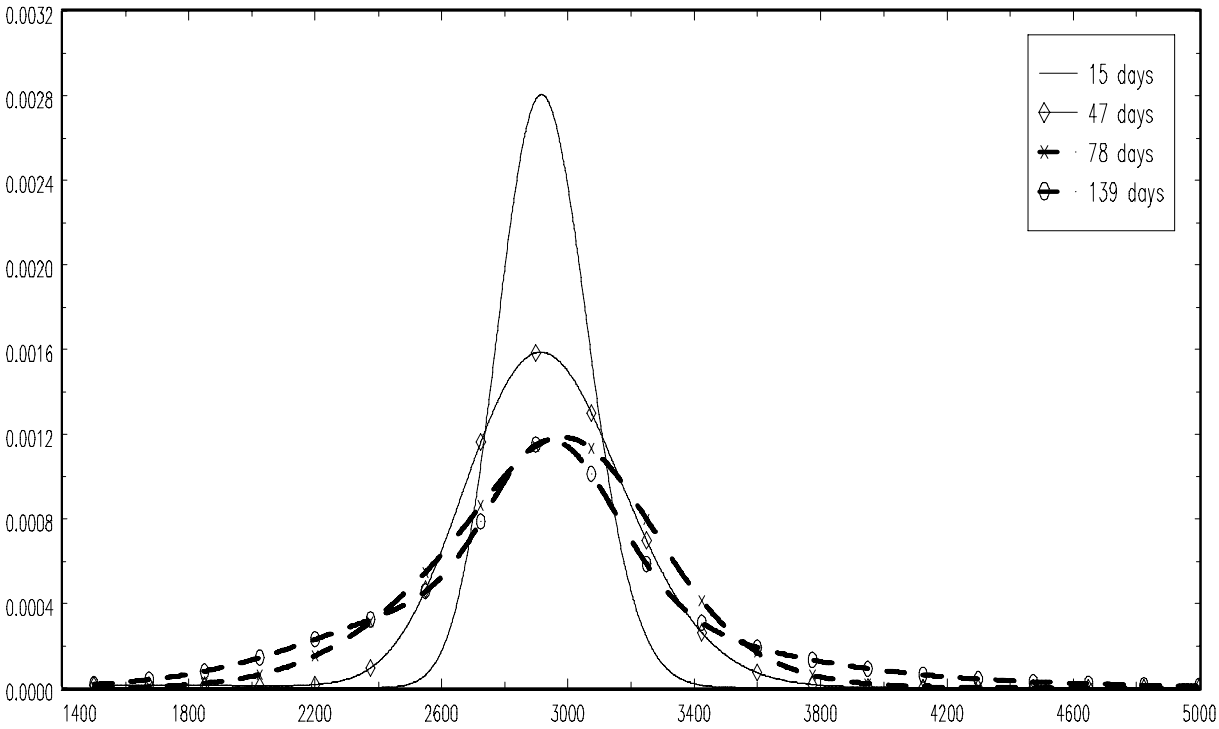


Figure 2.3.c: DNR du CAC 40 avec un modele a sauts
pour la date du 971015

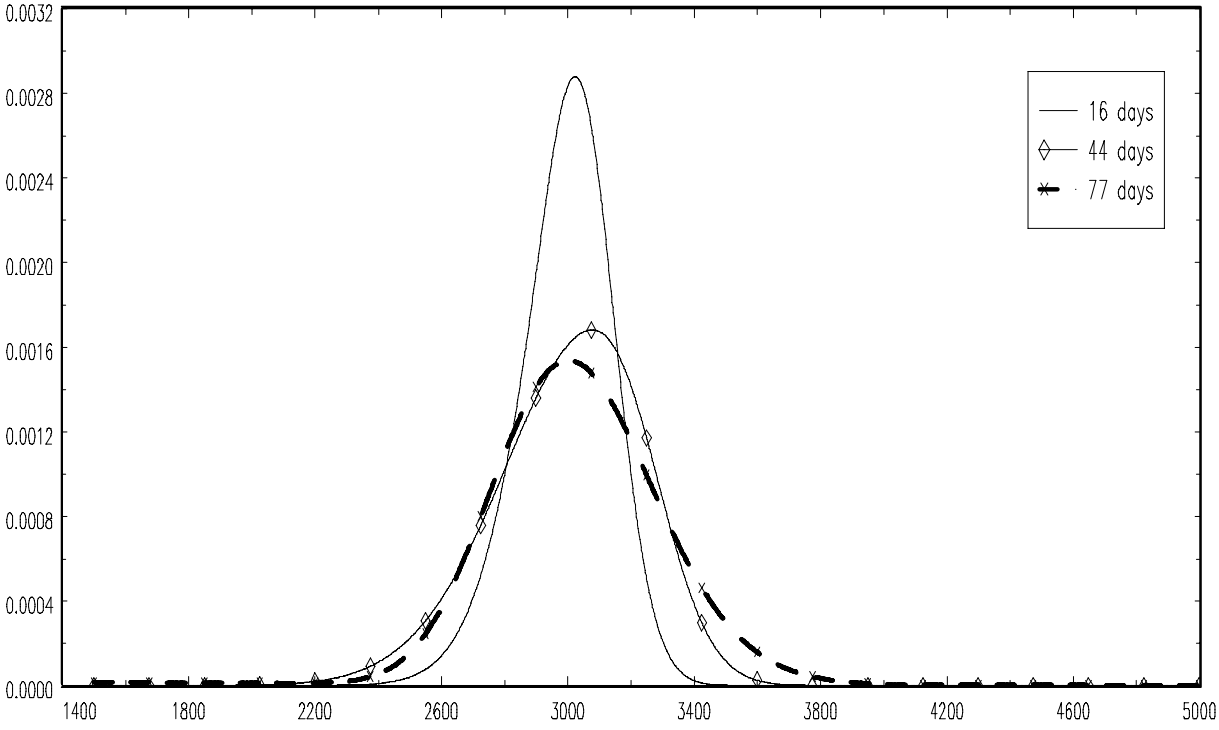
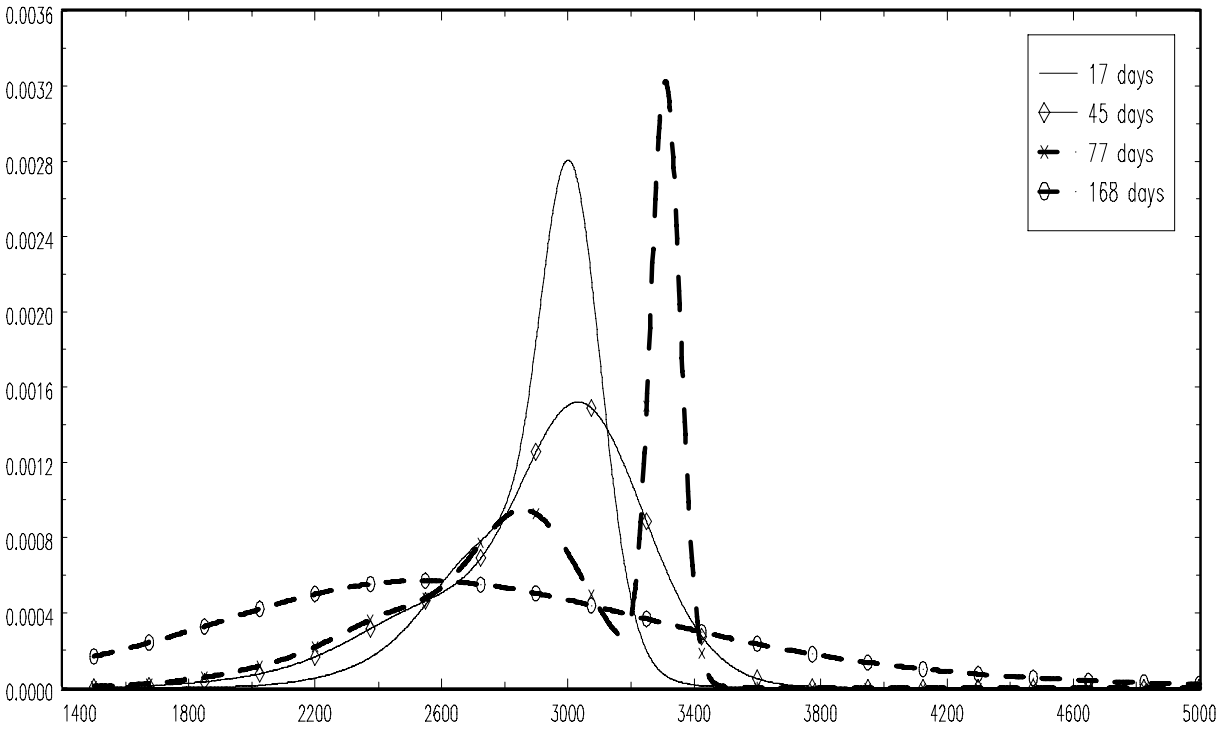


Figure 2.3.d: DNR du CAC 40 avec un modele a sauts
pour la date du 980113



2.3 Modèle à volatilité stochastique

On suppose maintenant que le prix de l'actif sous-jacent de l'option suit un modèle à volatilité stochastique de type Heston (1993). Celui-ci est une extension du modèle de Hull et White (1987) qui permet non seulement à la volatilité d'évoluer de façon stochastique mais permet en plus une corrélation entre le rendement de l'actif et la volatilité du rendement.

2.3.1 Le modèle

Aux hypothèses (2)-(7), on ajoute l'hypothèse suivante :

Hypothèse 8 *Le prix de l'indice S_t est distribué comme une diffusion géométrique de variance conditionnelle instantanée V_t qui suit un processus de retour vers la moyenne en racine carrée :*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_{1,t}, \tag{2.8}$$

$$dV_t = \kappa[\theta - V_t]dt + \gamma\sqrt{V_t} dZ_{2,t}. \tag{2.9}$$

où $Z_{1,t}$ et $Z_{2,t}$ sont deux mouvements browniens sous la probabilité subjective **P** *de corrélation ρ et les paramètres μ, κ, θ, γ et ρ sont des constantes.*

Le paramètre κ est le paramètre de vitesse de retour à la moyenne, $\sqrt{\theta}$ représente la volatilité de long-terme et γ caractérise la variance de la volatilité conditionnelle V_t.

Le prix d'un call européen $C^{\mathrm{STV}}(t, S_t, K, T)$ de prix d'exercice K et de maturité T va dépendre du prix de l'actif S_t, de la volatilité instantanée $\sqrt{V_t}$ et de la date courante t, tel que $C^{\mathrm{STV}}(t, S_t, K, T) = \Gamma(t, S_t, V_t)$. Le théorème suivant, tiré de l'article de Cox, Ingersoll et Ross (1985), permet d'écrire l'équation aux dérivées partielles (EDP) que vérifie Γ.

Théorème 3 *Soit $\Gamma(t, S_t, V_t)$ une fonction $C^{1,2,2}([0,T] \times R^+ \times R^+)$. Sous les hypothèses (2) à (7) et (8), $\Gamma(t, S_t, V_t)$ satisfait l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\operatorname{var}(S)\frac{\partial^2\Gamma}{\partial S^2} + \operatorname{cov}(S,V)\frac{\partial^2\Gamma}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2}\operatorname{var}(V)\frac{\partial^2\Gamma}{\partial V^2} \\ &+ r_t(T)\frac{\partial\Gamma}{\partial S} + \frac{\partial\Gamma}{\partial V}\left[\mu_V - r p_V\right] + \frac{\partial\Gamma}{\partial t} - (r_t(T) - d_t(T))\Gamma = 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

où μ_V représente le drift de la variable V et rp_V représente la prime de risque de volatilité égal au produit de la fonction d'aversion au risque par la covariance entre l'actif et la

volatilité :

$$rp_V = \mathcal{A}_t(S)\,\mathrm{cov}(S,V). \tag{2.11}$$

Dans un tel modèle le nombre de sources d'incertain est supérieur aux nombres d'actifs disponibles sur les marchés. On se retrouve en situation d'incomplétude de marché et il n'est plus possible de répliquer le prix de n'importe quel actif. En effet, les arguments habituels d'arbitrage deviennent insuffisants pour déterminer le prix d'un actif de façon unique et le prix de l'option ne peut plus être déterminé de façon unique comme dans un marché complet. Le problème réside dans le choix d'une prime de risque de volatilité (voir Pham et Touzi (1996)), ou de façon équivalente d'une fonction d'utilité. Une hypothèse supplémentaire sur la forme de la fonction d'utilité est nécessaire pour obtenir un prix unique de l'option. Si l'on suppose que la fonction d'utilité est de type CRRA[3], la prime de risque de volatilité (2.11) associée au modèle d'Heston prend la forme particulière suivante :

$$rp_V^{\mathrm{CRRA}} = a\rho\gamma V. \tag{2.12}$$

L'EDP (2.10) peut se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2\Gamma}{\partial S^2} + \rho\gamma SV\frac{\partial^2\Gamma}{\partial S\partial V} + \frac{1}{2}\gamma^2 V\frac{\partial^2\Gamma}{\partial V^2} \\ &+r_t(T)S\frac{\partial\Gamma}{\partial S} + [\kappa(\theta - V) - a\rho\gamma V]\frac{\partial\Gamma}{\partial V} + \frac{\partial\Gamma}{\partial t} - (r_t(T) - d_t(T))\Gamma = 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

avec la condition terminale :

$$\Gamma(T, S_T, V_t) = C^{\mathrm{STV}}(T, S_T, K, T) = \max(0, S_T - K). \tag{2.14}$$

Sous la probabilité neutre au risque, le lemme d'Itô appliqué à (2.8)-(2.9) permet d'écrire la diffusion du prix comme :

$$dS_t = (r_t(T) - d_t(T))S_t dt + \sqrt{V_t}S_t dZ^*_{1,t}, \tag{2.15}$$

$$dV_t = [\alpha - \kappa^* V_t]dt + \gamma\sqrt{V_t}dZ^*_{2,t}, \tag{2.16}$$

où $\alpha = \kappa^*\theta^*$, $\kappa^* = \kappa + \widetilde{a}$, $\theta^* = \kappa\theta/(\kappa + \widetilde{a})$, $\widetilde{a} = a\rho\gamma$ et Z_1^* et Z_2^* sont deux mouvements browniens standards de corrélation ρ sous $\mathbf{Q}$.

[3] Nous ne développons pas ici les notions de fonction d'aversion au risque et de fonction d'utilité qui font largement l'objet du chapitre 4 de la partie III de cette thèse. Dans ce même chapitre, nous motivons également le choix d'une telle fonction d'utilité pour ce modèle.

L'EDP (2.13) devient alors :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2\Gamma}{\partial S^2}+\rho\gamma SV\frac{\partial^2\Gamma}{\partial S\partial V}+\frac{1}{2}\gamma^2V\frac{\partial^2\Gamma}{\partial V^2}\\&+r_t(T)S\frac{\partial\Gamma}{\partial S}+(\alpha-\kappa^*V)\frac{\partial\Gamma}{\partial V}+\frac{\partial\Gamma}{\partial t}-(r_t(T)-d_t(T))\Gamma=0,\end{aligned}\tag{2.17}$$

Par analogie avec le modèle de Black et Scholes, Heston (1993) postule pour (2.17) une solution du type :

$$C^{\mathrm{STV}}(t,S_t,K,T)=e^{-d_t(T)\tau}S_tP_1(\ln(S_t),V_t,T;\ln(K))-e^{-r_t(T)\tau}KP_2(\ln(S_t),V_t,T;\ln(K)),$$

et P_1 et P_2 doivent vérifier l'EDP (2.17). Il n'existe pas de formules fermées pour les P_j $(j=1,2)$, mais on sait calculer leur fonction caractéristique respective, f_1 et f_2 qui doivent également satisfaire (2.17) et ont pour condition terminale :

$$f_j(x,V,T;\phi)=\exp(i\phi x).\tag{2.18}$$

Une solution pour f_1 et f_2 est donnée par Heston (1993) :

$$f_j(x,V,T,\phi)=\exp\left(C_j(\phi,T)+D_j(\phi,T)V+i\phi x\right)\tag{2.19}$$

où $\sqrt{V}$ représente la volatilité instantanée à l'instant t et

$$\begin{aligned}C_j(\phi,T)&=\frac{\alpha}{\gamma^2}\left\{(b_j^*-\rho\gamma i\phi+d_j)\tau-2\ln\left[\frac{1-g_j\exp(d_j\tau)}{1-g_j}\right]\right\},\\D_j(\phi,T)&=\frac{b_j^*-\rho\gamma i\phi+d_j}{\gamma^2}\left[\frac{1-\exp(d_j\tau)}{1-g_j\exp(d_j\tau)}\right],\\g_j&=\frac{b_j^*-\rho\gamma i\phi+d_j}{b_j^*-\rho\gamma i\phi-d_j},\\d_j&=\sqrt{\left(\rho\gamma i\phi-b_j^*\right)^2-\gamma^2\left(2u_j\phi i-\phi^2\right)},\end{aligned}$$

où $u_1=\frac{1}{2},u_2=-\frac{1}{2},b_1^*=\kappa^*-\rho\gamma,b_2^*=\kappa^*$. Pour éviter d'estimer la volatilité à l'instant t, V_t, on peut imposer à la variance non conditionnelle du rendement x_t d'être égale à la variance obtenue avec Black-Scholes. L'expression de cette variance est donnée en Annexe C page 180.

Une fois les f_j calculées, les P_j peuvent être obtenus en prenant leur fonction de Fourier

inverse[4] :

$$P_j(x,\sqrt{V},T;\ln(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-i\phi\ln(K)} f_j(x,\sqrt{V},T;\phi)}{i\phi}\right] d\phi. \tag{2.20}$$

2.3.2 Les moments d'une densité d'Heston

Si S_t suit une diffusion à volatilité stochastique de type (2.15)-(2.16) et si on note V la valeur initiale de V_t, $\tau = T - t$, les variance, skewness et kurtosis conditionnelles de de $x_T = \ln(S_T)$ sont données par :

$$\mathrm{var}\left[x_T/V\right] = \theta t + \left(1 - e^{-\kappa^*\tau}\right)\left(\frac{V}{\kappa^*} - \frac{\kappa\theta}{\kappa^{*2}} + 2\frac{\gamma\rho\kappa\theta}{\kappa^{*3}} - \frac{\gamma\rho V}{\kappa^{*2}}\right) - \frac{\gamma\rho\theta\tau}{\kappa^*} + \frac{\gamma\rho V}{\kappa^*}\tau e^{-\kappa^*\tau} - \frac{\gamma\rho\theta}{\kappa^*}\tau e^{-\kappa^*\tau} \tag{2.21}$$

$$+\frac{\gamma^2}{4\kappa^{*2}}[\frac{V}{\kappa^*}\left(1 - e^{-2\kappa^*\tau}\right) + \left(-2V\tau + \frac{2\theta}{\kappa^*} + 2\theta\tau\right)e^{-\kappa^*\tau} - \frac{5\theta}{2\kappa^*} + \frac{\theta}{2\kappa^*}e^{-2\kappa^*\tau} + \frac{a\tau}{\kappa^*}], \tag{2.22}$$

$$\mathrm{skew}[x_T/V] = \left(\frac{3\gamma\rho e^{\frac{\kappa^*\tau}{2}}}{\sqrt{\kappa}}\right)\left[\frac{\theta\left(2 - 2e^{\kappa^*\tau} + \kappa\tau + \kappa\tau e^{\kappa^*\tau}\right) - V\left(1 + \kappa\tau - e^{\kappa^*\tau}\right)}{\left(\theta\left[1 - e^{\kappa^*\tau} + \kappa\tau e^{\kappa^*\tau}\right] + V\left[e^{\kappa^*\tau} - 1\right]\right)^{3/2}}\right], \tag{2.23}$$

$$\mathrm{kurt}[x_T/V] = 3\left[1 + \gamma^2\left(\frac{\theta A_1 - V A_2}{B}\right)\right], \tag{2.24}$$

avec

$$A_1 = \left[1 + 4e^{\kappa^*\tau} - 5e^{2\kappa\tau} + 4\kappa\tau e^{\kappa\tau} + 2\kappa\tau e^{2\kappa\tau} + (\kappa\tau)^2 e^{\kappa\tau}\right]$$

$$A_2 = 2\left[1 - e^{2\kappa^*\tau} + 2\kappa V e^{\kappa^*\tau}\right] + 4\rho^2\left[2e^{\kappa^*\tau} - 2e^{2\kappa^*\tau} + 2\kappa\tau e^{\kappa^*\tau} + (\kappa\tau)^2 e^{\kappa^*\tau}\right]$$

$$B = 2\kappa\left[\theta\left(1 - e^{\kappa^*\tau} + \kappa\tau e^{\kappa^*\tau}\right) + V\left(e^{\kappa^*\tau} - 1\right)\right]^2.$$

Les graphiques (2.4) à (2.5) présentent les formes de distributions obtenues avec le CAC 40 et le taux Pibor 3 mois lorsqu'on suppose que ceux-ci suivent un modèle à volatilité stochastique. La présence d'ondelettes dans la densité du Pibor 3 mois est due à la faible précision du calcul de l'intégrale dans (2.20). Ce problème est résolu en partie en réduisant la borne supérieure de l'intégrale. En faisant varier le paramètre de corrélation ρ, il est possible de jouer sur l'asymétrie de la densité. Le paramètre γ qui intervient dans la diffusion de la volatilité permet lui de jouer sur la kurtosis de la densité

[4] On trouvera plusieurs façons de discrétiser une intégrale dans Abramowitz et Stegun (1972).

Figure 2.4.a: DNR du rendement du CAC 40 avec un processus a volatilite stochastique
pour la date du 970314

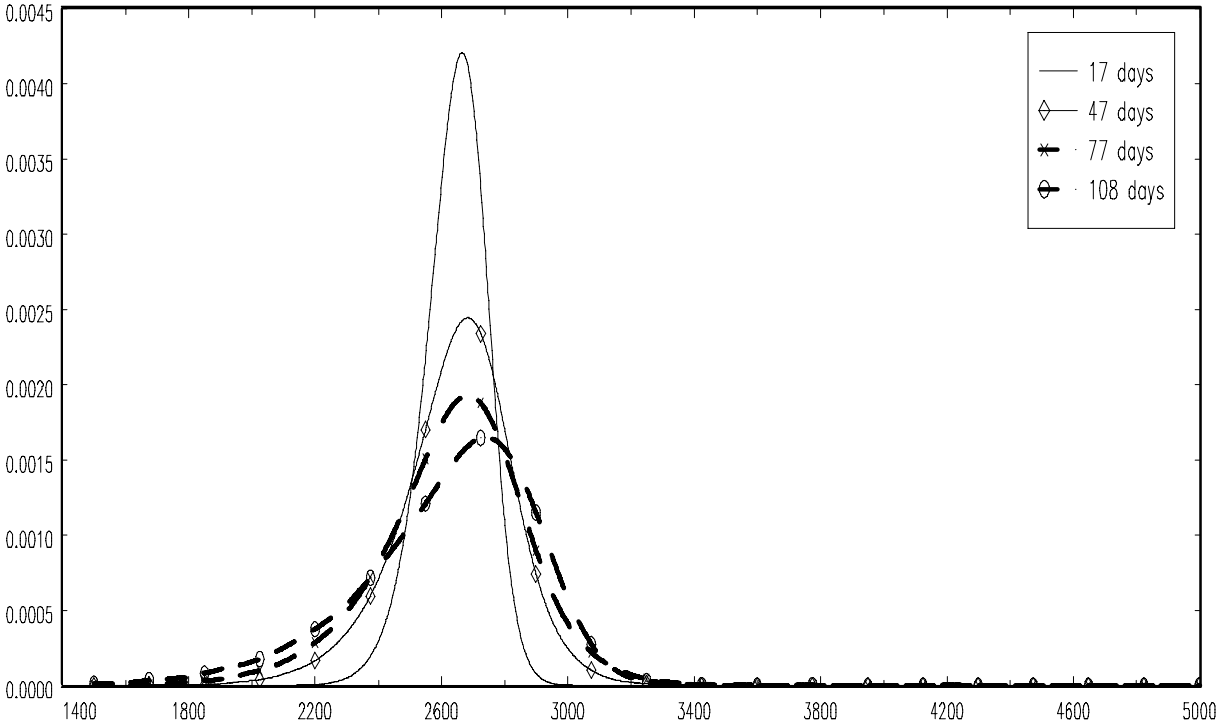


Figure 2.4.b: DNR du rendement du CAC 40 avec un processus a volatilite stochastique
pour la date du 970814

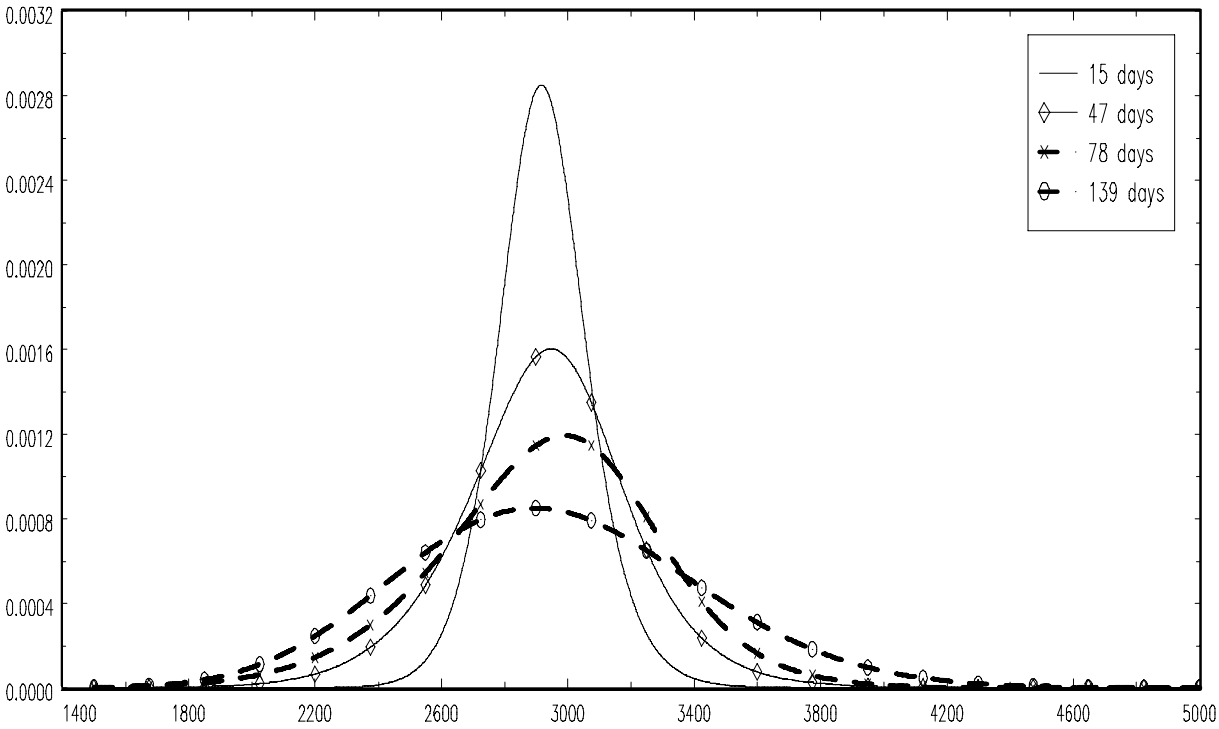


Figure 2.4.c: DNR du rendement du CAC 40 avec un processus a volatilite stochastique
pour la date du 971015

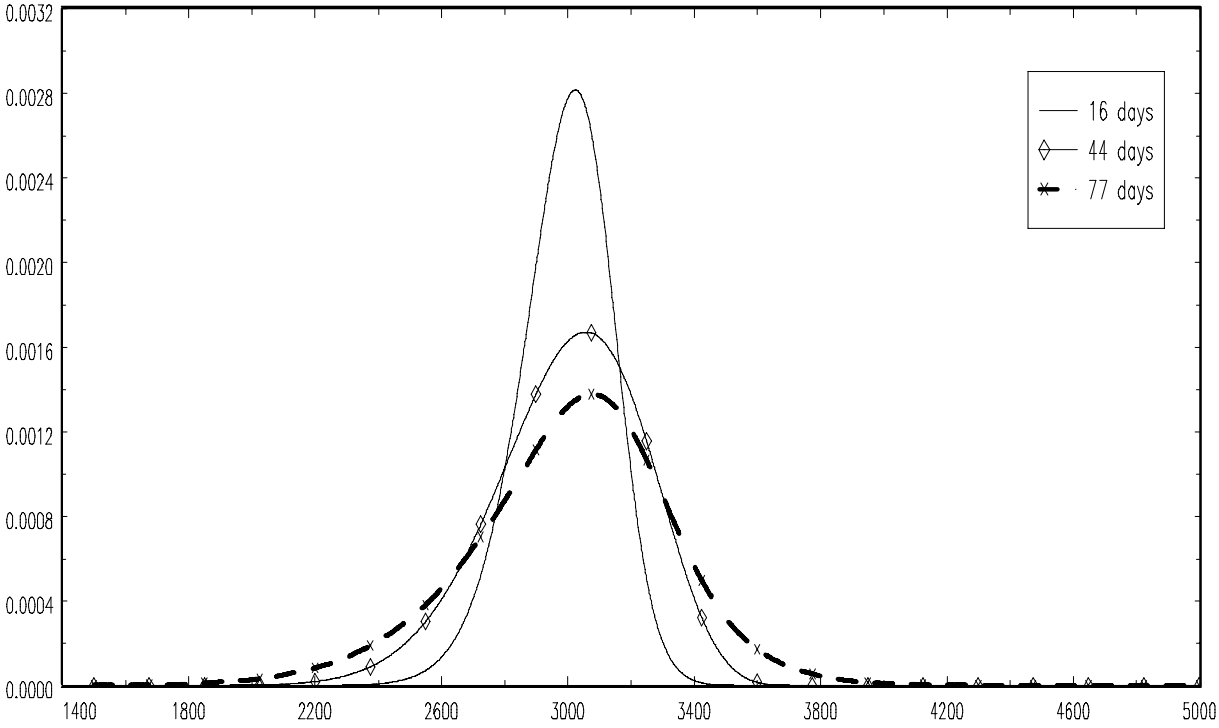


Figure 2.4.d: DNR du rendement du CAC 40 avec un processus a volatilite stochastique
pour la date du 980113

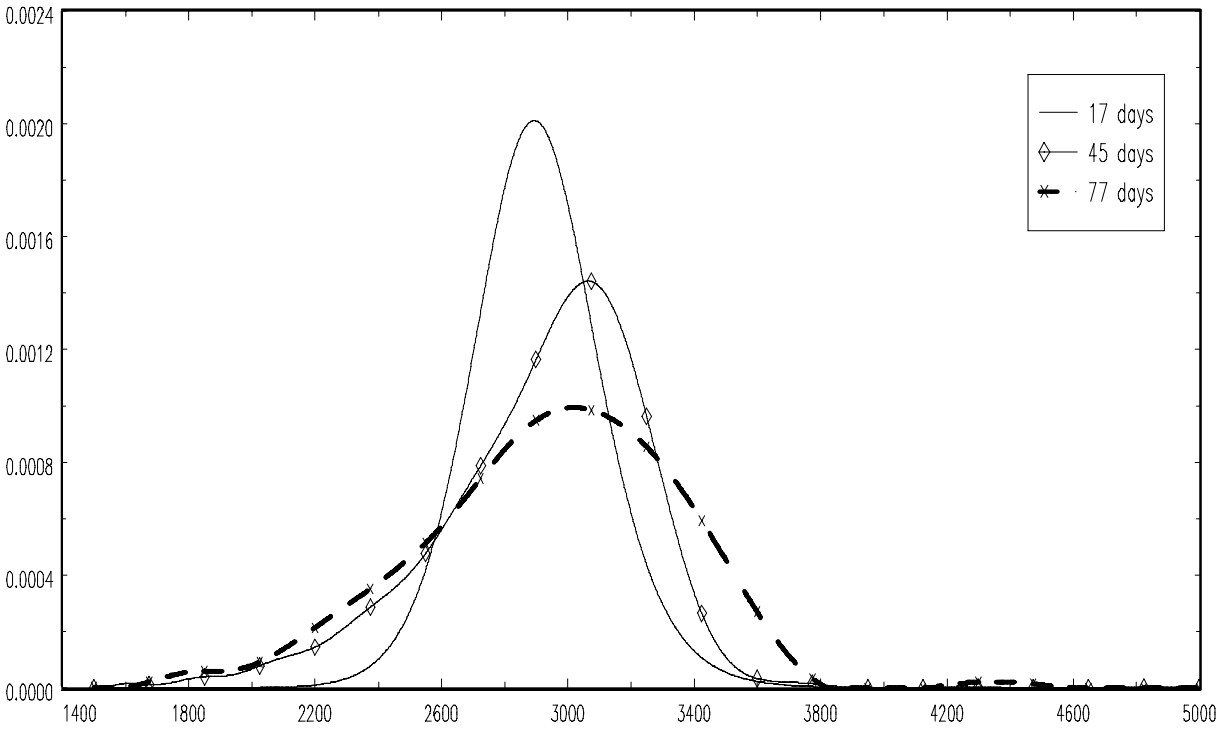


Figure 2.5.a: DNR du taux PIBOR avec un processus a volatilite stochastique
pour la date du 970421

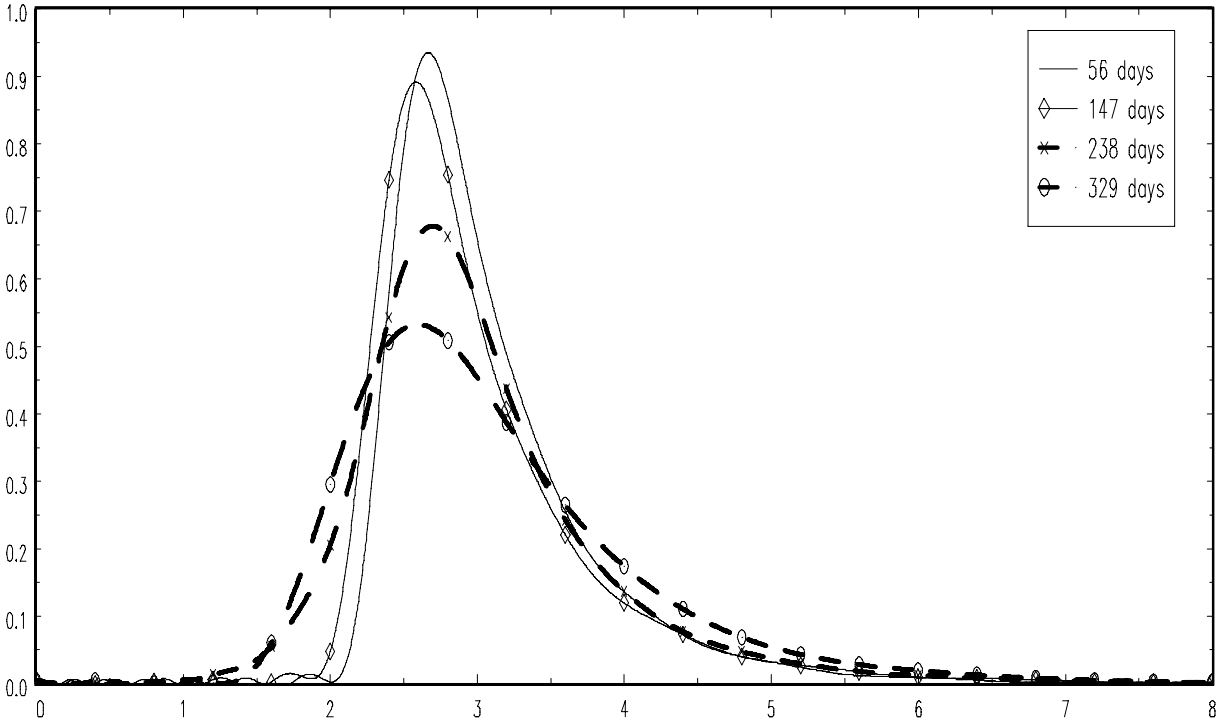


Figure 2.5.b: DNR du taux PIBOR avec un processus a volatilite stochastique
pour la date du 970526

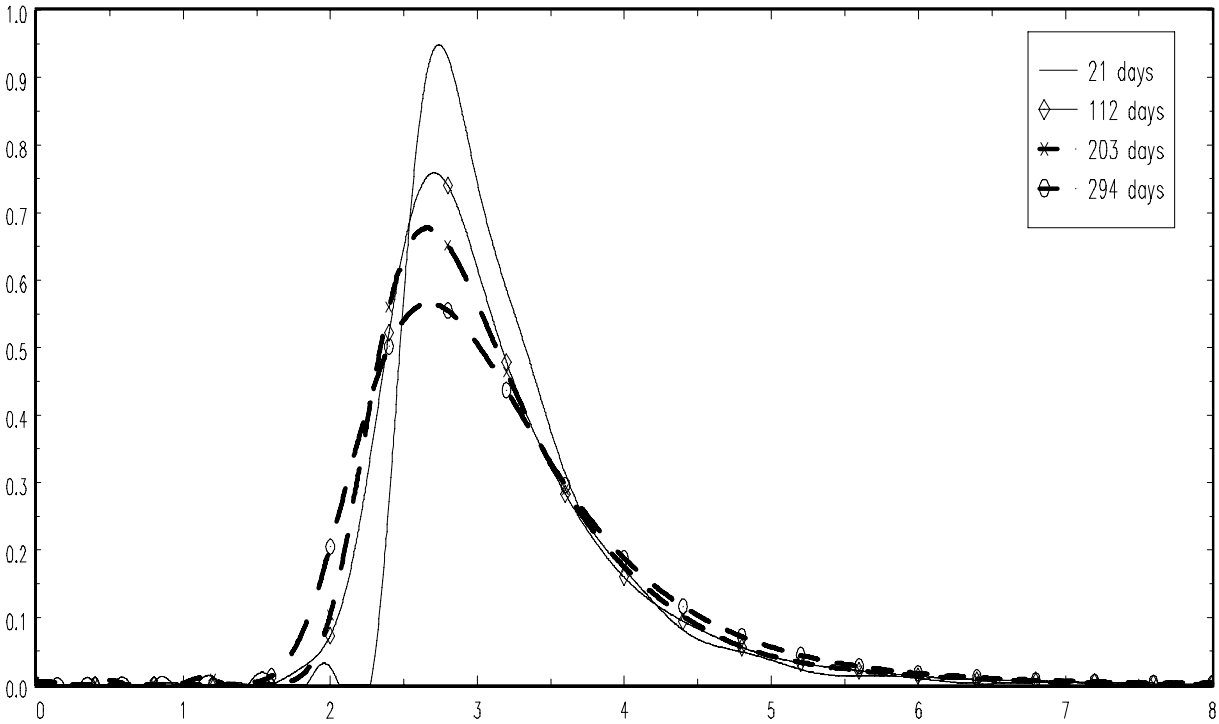


Figure 2.5.c: DNR du taux PIBOR avec un processus a volatilite stochastique
pour la date du 970602

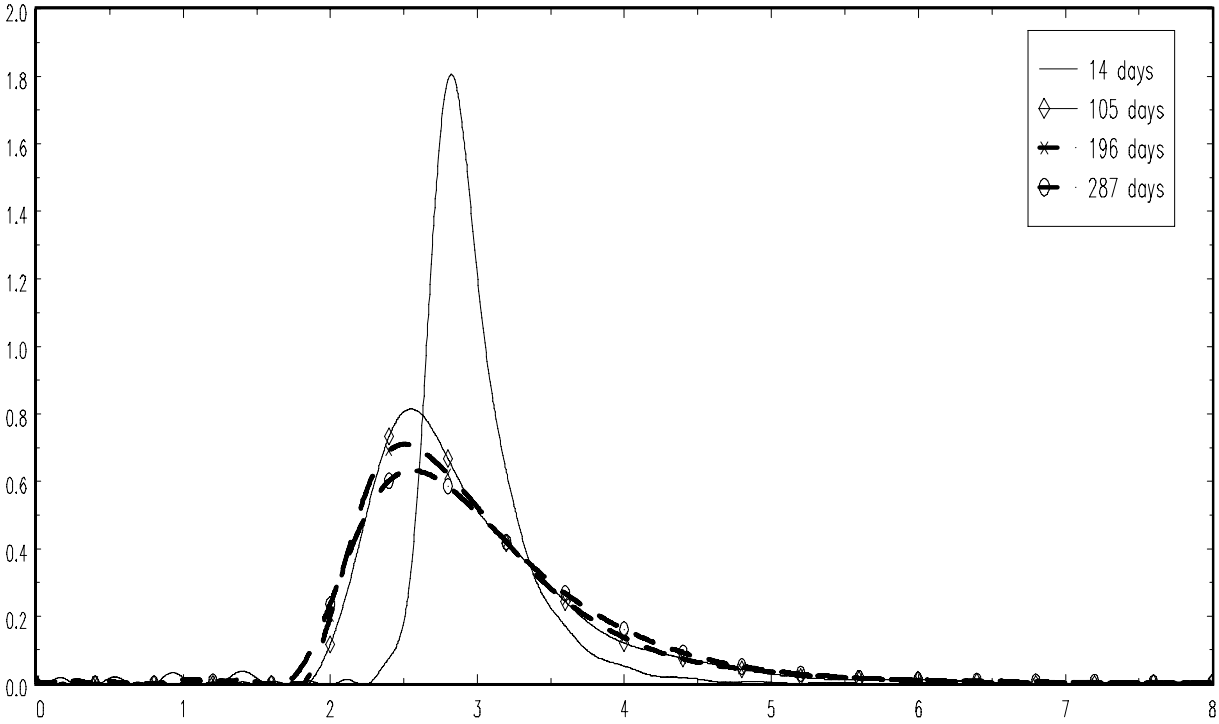
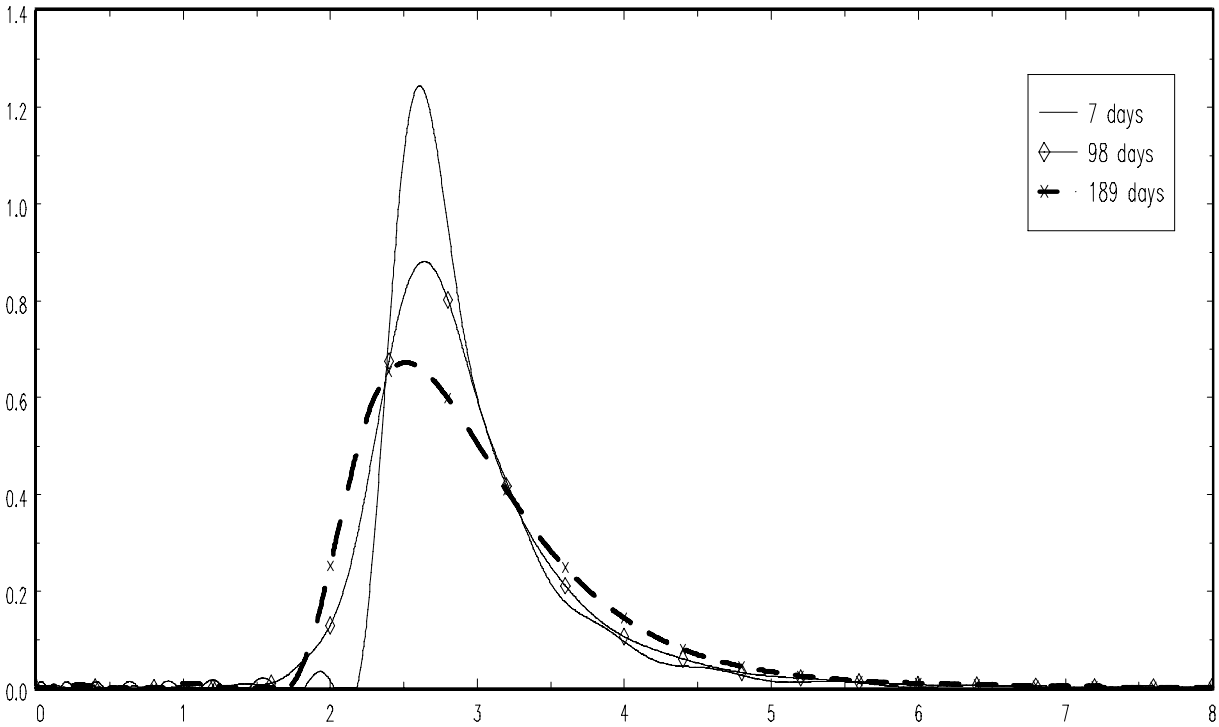


Figure 2.5.d: DNR du taux PIBOR avec un processus a volatilite stochastique
pour la date du 970609



Chapitre 3

Les méthodes non paramétriques

On se propose dans cette section d'étudier les modèles non paramétriques. On entend par modèles non paramétriques les modèles qui ne nécessitent aucune restriction paramétrique ni sur le sous-jacent ni sur la famille de densités auquel il appartient.

3.1 Le smile comme fonction polynômiale du prix d'exercice

Shimko (1993) propose une approche de mise en œuvre du résultat de Breeden et Litzenberger (1978) reposant sur un lissage du smile de volatilité par un polynôme quadratique. Une interpolation sur le smile de volatilité donne une fonction plus lisse des prix d'option qu'une interpolation directe sur les prix de call. Dumas, Fleming et Whaley (1996) testent différents modèles de lissage du smile reposant sur des polynômes quadratiques de la maturité et du prix d'exercice. Campa, Chang et Reider (1998) proposent de lisser le smile par une fonction spline cubique. Bliss (1999) étudie la stabilité d'une telle structure.

3.1.1 Le modèle

L'idée est d'écrire le smile de volatilité comme une fonction quadratique du prix d'exercice $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ pour l'ensemble des prix d'exercice cotés. A l'extérieur de ces strikes, la volatilité est supposée constante. Le calcul des coefficients est le résultat de la régression suivante :

$$\sigma_i = a_0 + a_1 K_i + a_2 K_i^2 + \varepsilon_i, \tag{3.1}$$

où σ_i est la volatilité implicite de l'option de prix d'exercice K_i, $i = 1, ..., m$, où m représente

le nombre de prix observés.

La fonction de volatilité est utilisée pour retrouver les prix de call :

$$C^{\mathrm{SH}}(t,F,K,T) = e^{-r\tau}\left[FN(d_1(x)) - KN(d_2(x))\right], \tag{3.2}$$

et ceux-ci sont différentiés deux fois pour obtenir la fonction de densité dont la forme analytique est donnée par :

$$\begin{aligned} q^{\mathrm{SH}}(x) &= e^{r\tau}\frac{\partial^2 C(t,F,x,T)}{\partial x^2} \\ &= F\left(d_1'' n(d_1(x)) - d_1^{'2} d_1 n(d_1(x))\right) - d_2' n(d_2(x)) - x\left(d_2'' n(d_2(x)) - d_2^{'2} d_2 n(d_2(x))\right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} d_1(x) &= \frac{1}{v(x)\sqrt{\tau}}\ln(\frac{F}{x}) + \frac{1}{2}v(x)\sqrt{\tau}, \\ d_2(x) &= d_1(x) - v(x)\sqrt{\tau}, \\ v(x) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\mathbf{1}_{(x>\min(K) \text{ et } x<\max(K))} + \sigma_1 \mathbf{1}_{(x\leq \min(K))} + \sigma_m \mathbf{1}_{(x\geq \max(K))}, \end{aligned}$$

où m représente ici le nombre de prix de calls observés, $\mathbf{1}_{(A)}$ la fonction indicatrice de l'ensemble A. Les dérivées premières et secondes de d_1 et d_2 sont données par

$$\begin{aligned} d_1'(x) &= -\frac{v'(x)\sqrt{\tau}}{v^2(x)\tau}\ln(\frac{F}{x}) - \frac{1}{xv(x)\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}v'(x)\sqrt{\tau}, \\ d_2'(x) &= d_1'(x) - v'(x)\sqrt{\tau}, \\ d_1''(x) &= -\frac{v''(x)v(x)\tau - 2v'(x)^2\tau}{(v(x)\sqrt{\tau})^3}\ln(\frac{F}{x}) + \frac{1}{x}\frac{v'(x)\sqrt{\tau}}{v^2(x)\tau} + \frac{v(x)\sqrt{\tau} + xv'(x)\sqrt{\tau}}{x^2 v^2(x)\tau} + \frac{1}{2}v''(x)\sqrt{\tau}, \\ d_2''(x) &= d_1''(x) - v''(x)\sqrt{\tau}, \\ v'(x) &= (a_1 + 2a_2 x)\,\mathbf{1}_{(x>\min(K) \text{ et } x<\max(K))}, \\ v''(x) &= 2a_2 \mathbf{1}_{(x>\min(K) \text{ et } x<\max(K))}. \end{aligned}$$

Les figures (2.6.a) à (2.6.d) montrent les densités obtenues avec la méthode de Shimko. On remarque une discontinuité au niveau de certains prix d'exercice. Cette méthode nécessite une convexité parfaite des prix d'options.

Figure 2.6.a: DNR du CAC 40 avec un lissage du smile
pour la date du 970314

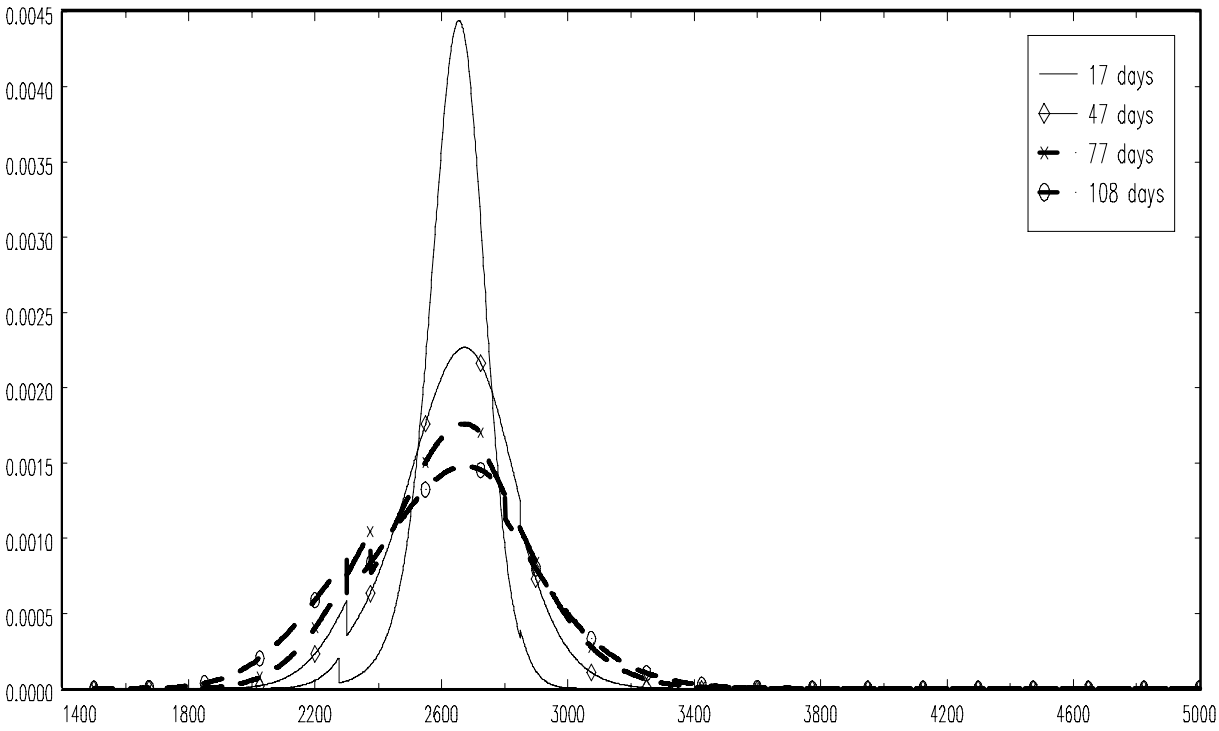


Figure 2.6.b: DNR du CAC 40 avec un lissage du smile
pour la date du 970814

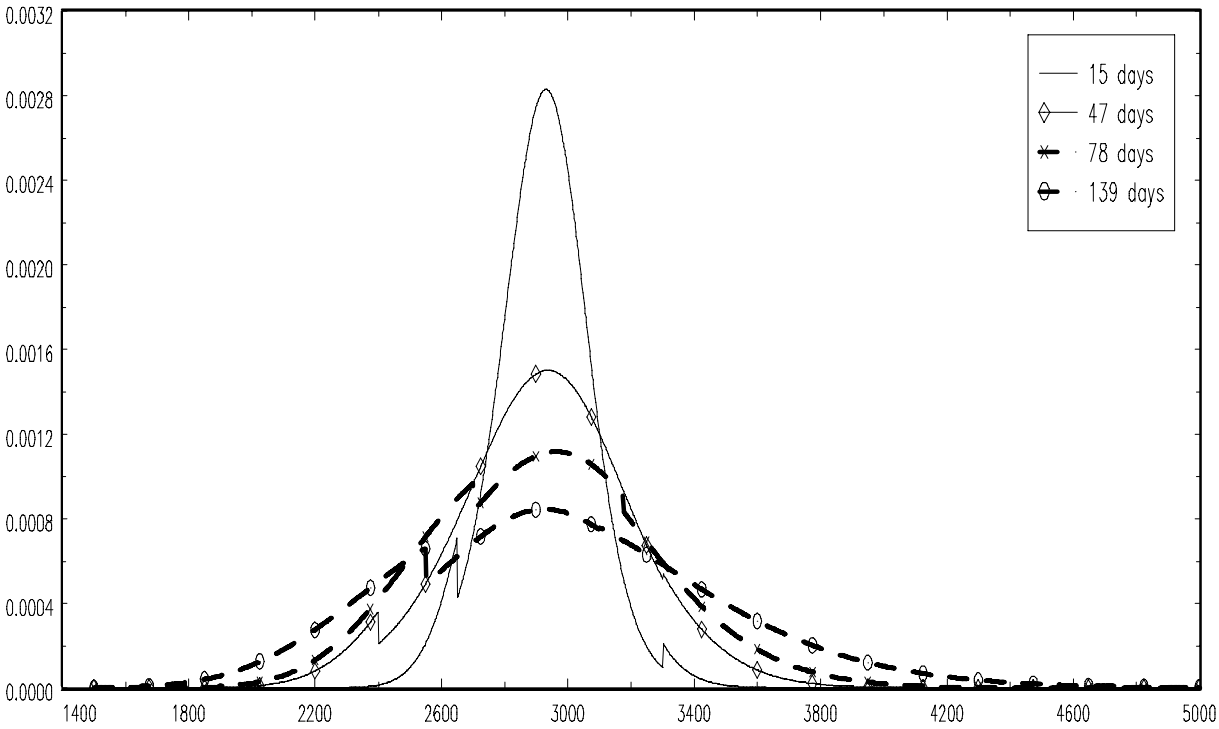


Figure 2.6.c: DNR du CAC 40 avec un lissage du smile
pour la date du 971015

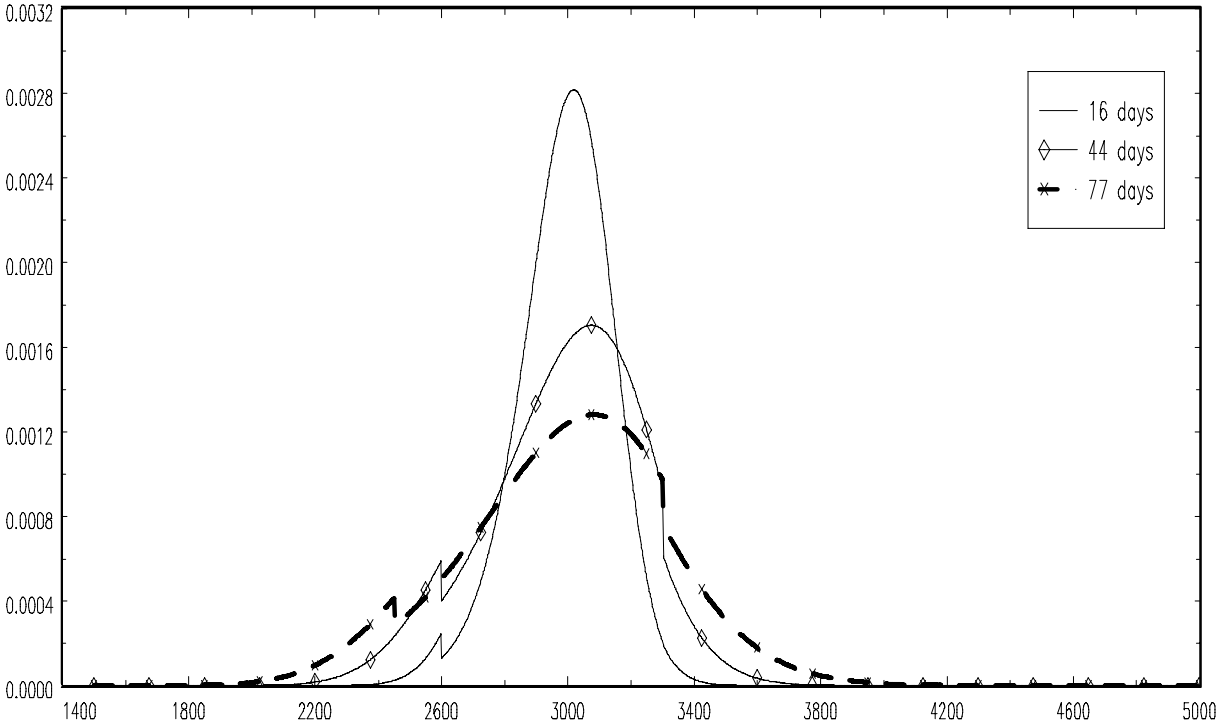
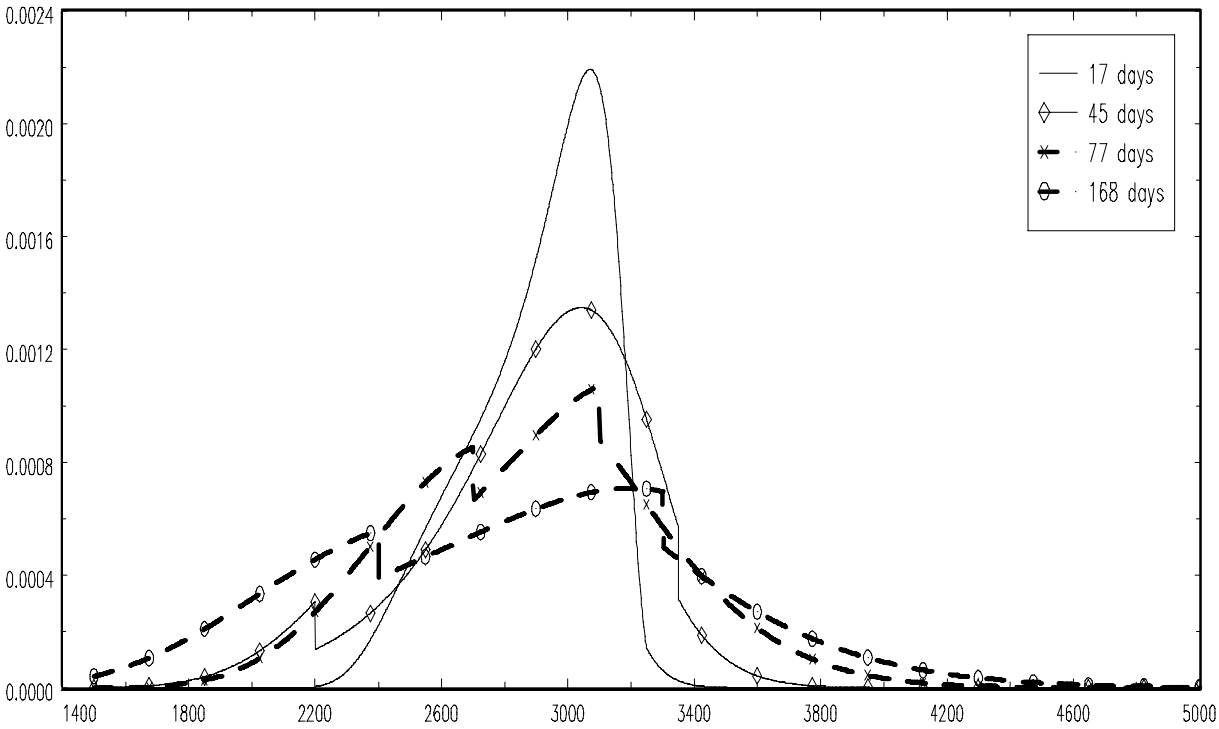


Figure 2.6.d: DNR du CAC 40 avec un lissage du smile
pour la date du 980113



3.2 Modèles d'arbre

3.2.1 L'arbre de Derman et Kani

Derman et Kani (1994) proposent une méthode pour construire un arbre implicite qui se cale sur le smile, donnant une densité neutre au risque extraite directement des données observées.

Le modèle

L'idée de ce modèle est d'étendre l'équation (2.1a) de Black sur le prix forward à l'équation suivante :

$$\frac{dF_t}{F_t} = \sigma(F_t, t)dW_t^*, \tag{3.3}$$

où $\sigma(F_t, t)$ est la fonction de volatilité qui dépend à la fois du niveau du prix forward de l'actif et du temps. L'idée de Derman et Kani est d'utiliser une approche numérique par une interpolation du smile de volatilités. Les prix d'option sont obtenus par interpolation de la surface de volatilité en fonction de la maturité et du prix d'exercice. Les prix d'option observés sur la surface se smile interpolée déterminent la probabilité d'atteindre chaque nœud de l'arbre implicite. Barle et Cakici (1995) proposent une correction de l'arbre de Derman et Kani, prévenant d'éventuelles probabilités négatives. Chriss (1996) propose une version de l'approche de Derman et Kani qui tient compte du caractère américain des options, mais sa méthode nécessite une étape d'optimisation supplémentaire, coûteuse, à chaque pas de l'arbre.

La construction de l'arbre

On suppose que l'on a déjà construit les n premiers niveaux qui donnent les volatilités implicites des options pour tous les prix d'exercice jusqu'à cet instant. On procède de la façon suivante pour obtenir les valeurs aux nœuds à l'instant t_{n+1} depuis l'instant t_n, en utilisant les notations suivantes :

- $S(i, n)$, le prix du sous-jacent au nœud (i, n),
- $F(i, n)$, le prix du future au nœud (i, n), correspondant à $F(i + 1, n + 1) = S(i, n)e^{r\Delta t}$,
- $\lambda(i, n)$, le prix Arrow-Debreu au nœud (i, n), connu en t_0,
- $p(i, n)$, la probabilité de transition risque neutre du nœud (i, n) au nœud $(i, n + 1)$, inconnue en t_n,
- N, le nombre de pas de l'arbre,

– Δt, le pas de temps, $\Delta T = T/N = t_{n+1} - t_n$, où T est la maturité de l'arbre.

Au nœud (i,n), le prix du sous-jacent est donné par $S(i,n)$ et est connu ; il peut soit augmenter et aller en (i,n) avec une probabilité $p(i,n)$, soit diminuer et aller en $(i+1,n)$ avec une probabilité $(i+1,n+1)$. $\lambda(i,n)$ est appelé le prix Arrow-Debreu au nœud (i,n). Il est donné par la somme actualisée sur toutes les trajectoires depuis la racine jusqu'au nœ.ud (i,n), du produit des probabilités de transition à chaque nœud de chaque pas menant au nœud (i,n) :

$$\begin{aligned}
\lambda(i+1,n+1) &= e^{-r\Delta t}\left[p(i+1,n)\lambda(i+1,n) + (1-p(i,n))\lambda(i,n)\right],\ 1 \leq i \leq n-1 \\
\lambda(1,n+1) &= e^{-r\Delta t}p(1,n)\lambda(1,n) \\
\lambda(n+1,n+1) &= e^{-r\Delta t}(1-p(n,n))\lambda(n,n)
\end{aligned}$$

A chaque pas on extrait les n prix d'options de maturités en utilisant une interpolation à partir du smile de volatilité, ainsi que les n prix forward et on en déduit les $n+1$ prix du sous-jacent, ainsi que les n probabilités de transition. On obtient ainsi $2n$ équations pour $2n+1$ paramètres, la dernière équation est donnée par la détermination du prix au nœud central de l'arbre, obtenu en faisant coïncider ce dernier avec le nœud central de l'arbre de Cox-Ross-Rubinstein. Si le nombre de nœuds à un niveau donné est impair, on choisit comme valeur centrale de l'actif sous-jacent, le prix du spot aujourd'hui. Si le nombre de nœuds est pair, on prend la moyenne des logarithmes des deux nœuds centraux.

Sous la probabilité neutre au risque, le prix de l'actif en t_n doit être égal à l'espérance actualisée du prix en t_{n+1} conditionnellement à t_n. On traduit cette égalité par :

$$F(i,n) = p(i,n)S(i,n+1) + (1-p(i,n))S(i+1,n+1),\ 1 \leq i \leq n.$$

Le second ensemble d'équations utilise les valeurs de n options à l'instant t de prix sous-jacent celui de l'étape t_n et de prix d'exercice les $S(i,n)$ aux nœuds d'échéance t_{n+1}. On utilisera les valeurs des calls pour la partie supérieure de l'arbre, et les valeurs des puts pour la partie inférieure (en effet, le prix du call sera nul pour des prix d'exercice inférieurs au prix spot, et celui du put sera nul pour des prix d'exercice supérieurs au prix spot).

La valeur théorique binomiale d'un call sur l'arbre est donnée par l'espérance actualisée du payoff en t_{n+1} conditionnellement à tous les chemins possibles :

$$C^{\mathrm{DK}}(t_n, S, K, t_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda(i, n+1) \max\left[S(i, n+1) - K, 0\right]$$

$$= e^{-r\Delta t} \sum_{i=2}^{n} \left\{p(i,n)\lambda(i,n) + (1 - p(i-1,n))\lambda(i-1,n)\right\} \left[S(i, n+1) - K\right]^+$$

$$+ e^{-r\Delta t} p(1,n)\lambda(1,n) \left[S(1, n+1) - K\right]^+$$

$$+ e^{-r\Delta t}(1 - p(n,n))\lambda(n,n) \left[S(n+1, n+1) - K\right]^+$$

Lorsqu'on pose $K = S(i,n)$, la moitié inférieure des termes de la somme deviennent nuls et il reste :

$$C^{\mathrm{DK}}(t_n, S, S(i,n), t_{n+1}) = \lambda(i,n)p(i,n) \left(S(i, n+1) - S(i,n)\right) + \sum_{j=i+1}^{n} \lambda(j,n) \left(F(j,n) - S(i,n)\right). \quad (3.4)$$

Dans cette équation, les seuls termes inconnus en t_n sont $S(i, n+1)$ et $p(i,n)$. Par ailleurs, on a :

$$F(i,n) = p(i,n)S(i, n+1) + (1 - p(i,n))S(i+1, n+1). \quad (3.5)$$

Les équations (3.4) et (3.5) permettent de déterminer $S(i, n+1)$ et $p(i,n)$. En posant $C = C^{\mathrm{DK}}(t_n, S, S(i,n), t_{n+1})$ et $\sum$ la somme suivante

$$\sum = \sum_{j=i+1}^{n} \lambda(j,n) \left(F(j,n) - S(i,n)\right),$$

on a :

$$S(i, n+1) = \frac{S(i+1, n+1) \left[e^{r\Delta t} C - \sum\right] - \lambda(i,n)S(i,n) \left(F(i,n) - S(i+1, n+1)\right)}{\left[e^{r\Delta t} C - \sum\right] - \lambda(i,n) \left(F(i,n) - S(i+1, n+1)\right)} \quad (3.6)$$

$$p(i,n) = \frac{F(i,n) - S(i+1, n+1)}{S(i, n+1) - S(i+1, n+1)} \quad (3.7)$$

Le nœud central $S(\frac{n+1}{2}, n+1)$ étant connu, on peut trouver les autres nœuds par itérations à l'aide de (3.6). Lorsque le nombre de nœuds au pas $n+1$ est pair, on identifie $S(\frac{n+1}{2}, n+1)$ avec le cours du sous-jacent aujourd'hui ; si le nombre de nœuds est impair, on choisit les deux nœuds centraux de telle sorte que :

$$S(i+1, n+1) = \frac{S(i,n)^2}{S(i, n+1)},\ i = \frac{n+1}{2}. \quad (3.8)$$

En substituant l'égalité (3.8) dans (3.6), on obtient la valeur supérieure des deux nœuds centraux, à savoir :

$$S(i,n+1) = \frac{S(i,n)\left[e^{r\Delta t}C + \lambda S(i,n) - \sum\right]}{\lambda(i,n)F(i,n) - e^{r\Delta t}C + \sum}, \; i = \frac{n+1}{2}. \tag{3.9}$$

De même on peut écrire l'équation qui nous donnera les valeurs des probabilités et du prix du sous-jacent aux nœuds de la partie inférieure de l'arbre en utilisant les prix des puts. On obtient ainsi, en notant $P = P^{\mathrm{DK}}(t_n, S, S(i,n), t_{n+1})$ le prix d'un put au nœ.ud (i,n) et $\sum = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda(i,n)\left(S(i,n) - F(i,n)\right)$:

$$S(i+1,n+1) = \frac{S(i,n+1)\left[e^{r\Delta t}P - \sum\right] + \lambda(i,n)S(i,n)\left(F(i,n) - S(i,n+1)\right)}{\left[e^{r\Delta t}P - \sum\right] + \lambda(i,n)\left(F(i,n) - S(i,n+1)\right)}. \tag{3.10}$$

On doit contraindre la probabilité au nœud (i,n), $p(i,n)$ à rester entre 0 et 1. Cette contrainte se traduit par l'inégalité :

$$F(i,n) < S(i,n+1) < F(i,n+1) \tag{3.11}$$

imposée à chaque nœud. Lorsque cette inégalité est violée, on ramène $S(i,n+1)$ à la valeur :

$$S(i,n+1) = \frac{F(i,n+1) + F(i,n)}{2}.$$

Les moments

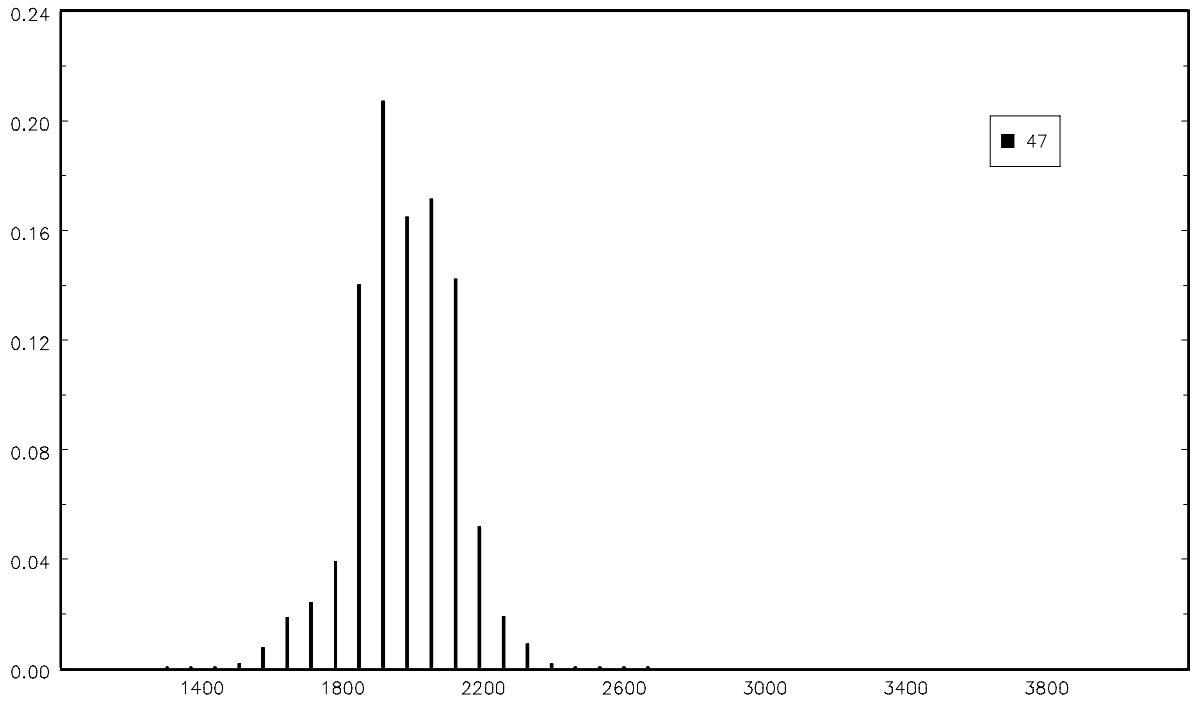
Les moments de F s'écrivent numériquement sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathrm{esp}(F_T) &= \sum_{j=1}^{N} S(j,N)\lambda(j,N), \\
\mathrm{var}(F_T) &= \sum_{j=1}^{N} \left(S(j,N) - \mathrm{esp}(F_t)\right)^2 \lambda(j,N), \\
\mathrm{skew}(F_T) &= \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(S(j,N) - \mathrm{esp}(F_t)\right)^3 \lambda(j,N)}{\mathrm{var}(F_t)^{3/2}}, \\
\mathrm{kurt}(F_T) &= \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(S(j,N) - \mathrm{esp}(F_t)\right)^4 \lambda(j,N)}{\mathrm{var}(F_t)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

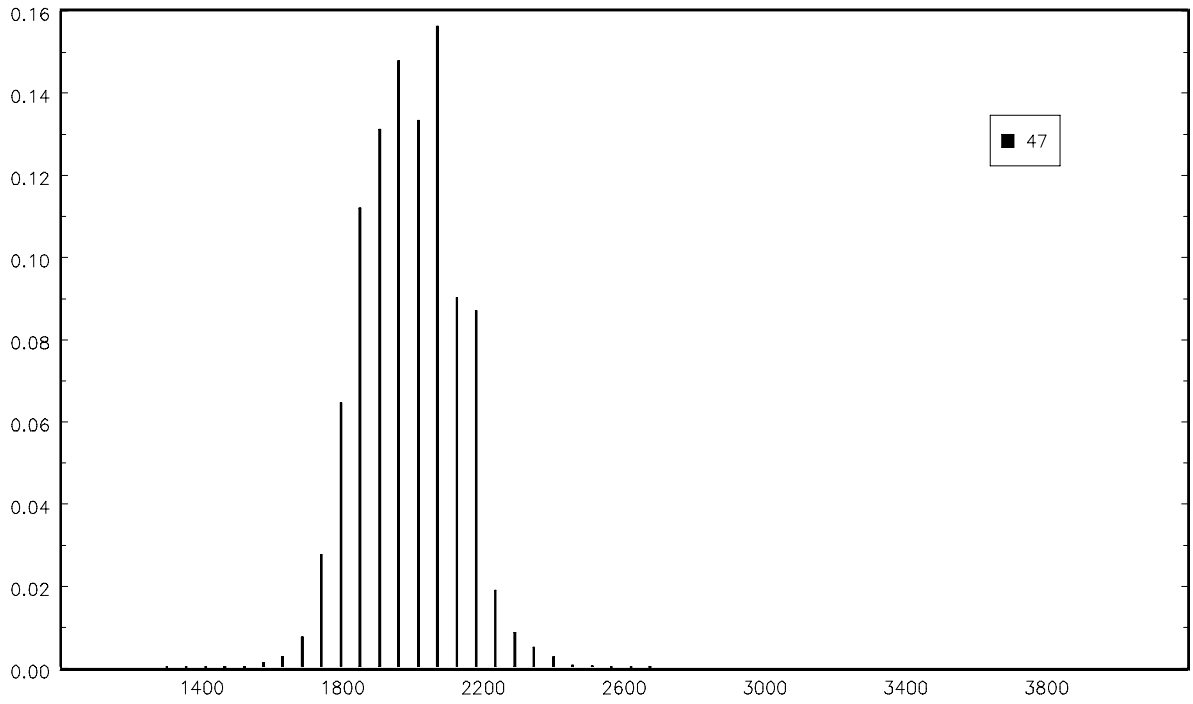
Les figures (2.7.a) à (2.7.c) montrent les graphiques des densités obtenues avec l'arbre de Derman et Kani. Cette méthode présente des difficultés particulières car elle est très coûteuse en temps de calcul d'une part et très sensible au choix de la méthode retenue

pour interpoler la surface du smile. Les résultats obtenus sont très décevants compte-tenu de l'intérêt théorique de cette méthode. L'arbre de Derman et Kani semble n'être utilisable que dans le cas d'un marché particulièrement liquide avec une surface de volatilités très complète.

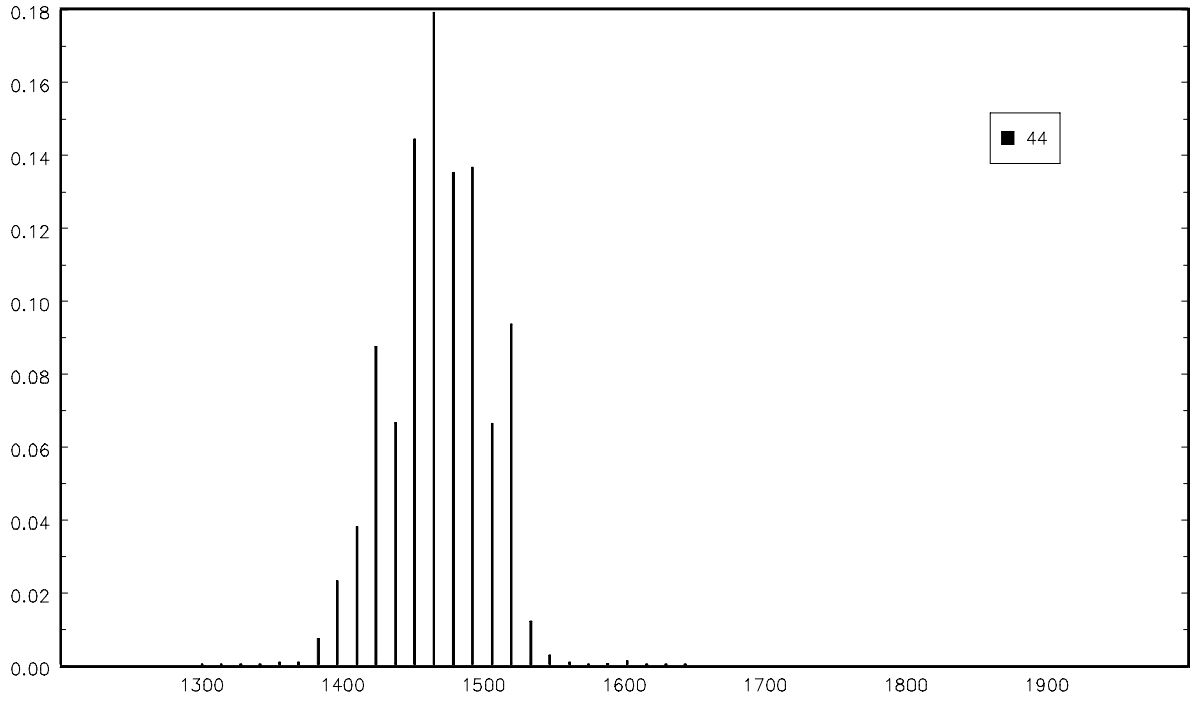
DNR du CAC 40 avec la methode d'arbre implicite de Derman et Kani
pour la date du 970314



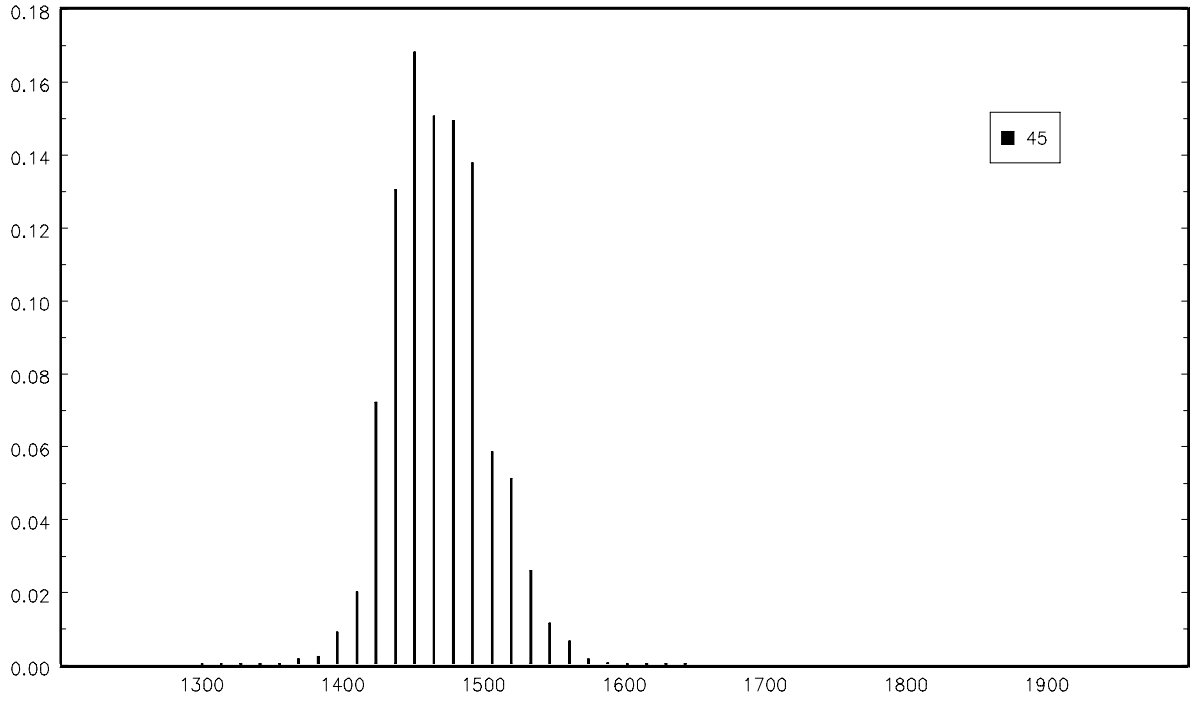
DNR du du CAC 40 avec la methode d'arbre implicite de Derman et Kani
pour la date du 970814



DNR du CAC 40 avec la methode d'arbre implicite de Derman et Kani
pour la date du 971015



DNR du du CAC 40 avec la methode d'arbre implicite de Derman et Kani
pour la date du 980113



3.2.2 L'arbre de Rubinstein

Rubinstein (1994) propose de trouver une densité discrète, proche d'une loi connue, vérifiant des contraintes données.

Le modèle

Pour des raisons pratiques la densité première est choisie comme résultat d'un arbre binomial standard à N pas du type Cox-Ross-Rubinstein (1979) contruit sur la volatilité implicite qui vérifie :

$$\sigma^{\mathrm{BS}} = \min_{\sigma} \sum_{i} \left(\widehat{C}_i - C_i^{\mathrm{BS}}(t, F, T, K; \sigma) \right)^2, i = 1, ..., m,$$

où $\widehat{C}_i$ est le i-ème prix observé et m le nombre de prix observés. On note S_j,$j = 1, .., N$ les valeurs des sous-jacents obtenues à la dernière étape de l'arbre de Cox-Ross-Rubinstein et P_j les probabilités de la fin de l'arbre. Si p est la probabilité risque neutre d'un mouvement à la hausse sur chaque période de l'arbre, alors :

$$P_j = \frac{N!}{j!(N-j)!} p^j \left(1-p\right)^{N-j}. \tag{3.12}$$

Les probabilités neutres au risque implicites de l'arbre de Rubinstein P_j^{RUB} doivent résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{P_j} \sum_{j=1}^{N} \left(P_j^{\mathrm{RUB}} - P_j \right)^2, \tag{3.13}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} P_j^{\mathrm{RUB}} = 1, P_j^{\mathrm{RUB}} \geq 0, j = 0, ..., N, \\ S_t = e^{-r_t(T)\tau} \sum_{j=1}^{N} S_j P_j^{\mathrm{RUB}}, \\ \widehat{C}_i = e^{-r_t(T)\tau} \sum_{j=1}^{N} (S_j - K_i) P_j^{\mathrm{RUB}}, i = 1, ..., m. \end{cases} \tag{3.14}$$

Les P_j sont les probabilités risque-neutre les plus proches au sens des moindres carrés de la loi lognormale. Ces probabilités ont la propriété suivante : plus le nombre de prix observés sera élevé, moins les probabilités P_j seront sensibles au choix de la première probabilité.

La forme (3.13) choisie dans la minimisation est tout à fait arbitraire et représente un candidat parmi d'autres. On pourrait choisir par exemple de minimiser l'une des formes

suivantes :

$$\min_{P_j} \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(P_j^{\mathrm{RUB}} - P_j\right)^2}{P_j'}, \tag{3.15}$$

$$\min_{P_j} \sum_{j=1}^{N} \left|P_j^{\mathrm{RUB}} - P_j\right|. \tag{3.16}$$

sous les contraintes (3.14).

Les moments

Les moments de F s'écrivent numériquement sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathrm{esp}(F_T) &= \sum_{j=1}^{N} S_j P_j^{\mathrm{RUB}}, \\
\mathrm{var}(F_T) &= \sum_{j=1}^{N} \left(S_j - \mathrm{esp}(F_t)\right)^2 P_j^{\mathrm{RUB}}, \\
\mathrm{skew}(F_T) &= \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(S_j - \mathrm{esp}(F_t)\right)^3 P_j^{\mathrm{RUB}}}{\mathrm{var}(F_t)^{3/2}}, \\
\mathrm{kurt}(F_T) &= \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(S_j - \mathrm{esp}(F_t)\right)^4 P_j^{\mathrm{RUB}}}{\mathrm{var}(F_t)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

On montre en figures (2.8.a) à (2.8.d) les densités obtenues avec l'arbre de Rubinstein. Les courbes sont très hachées et par conséquent difficiles à interpréter. On note cependant la possibilité de queues épaisses sur la droite de la distribution.

Figure 2.8.a: DNR du contrat PIBOR avec la methode d'arbre implicite de Rubinstein
pour la date du 970421

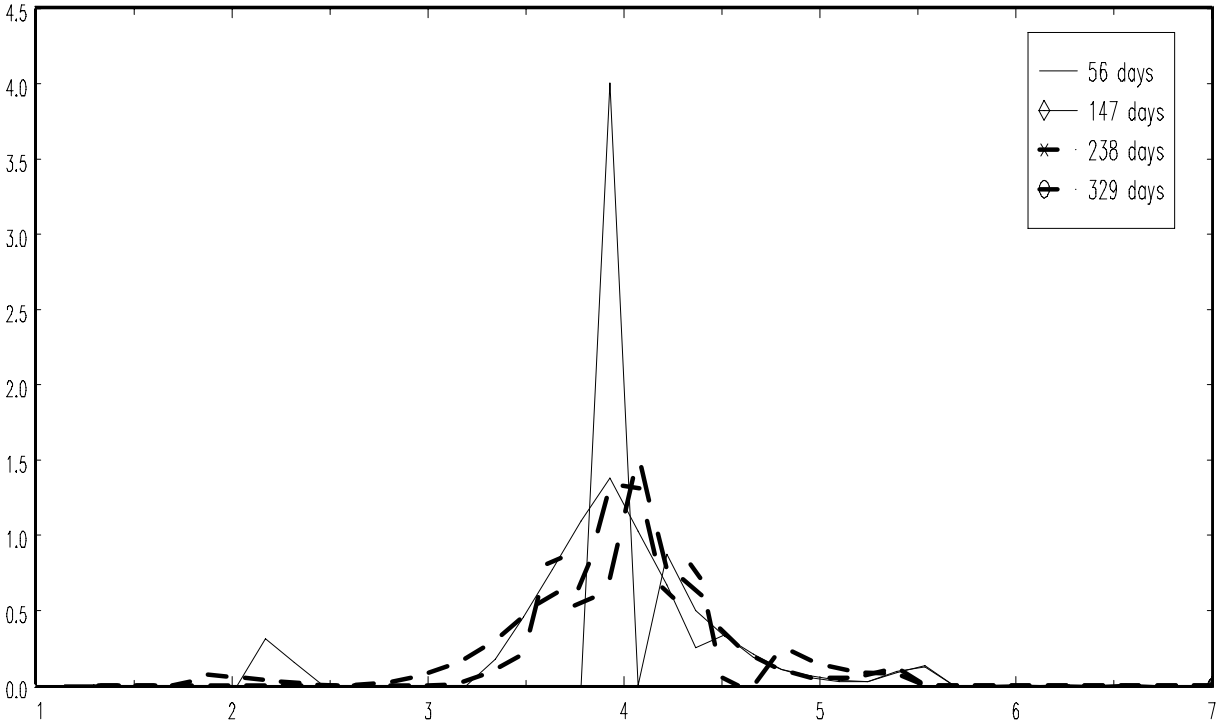


Figure 2.8.b: DNR du contrat PIBOR avec la methode d'arbre implicite de Rubinstein
pour la date du 970526

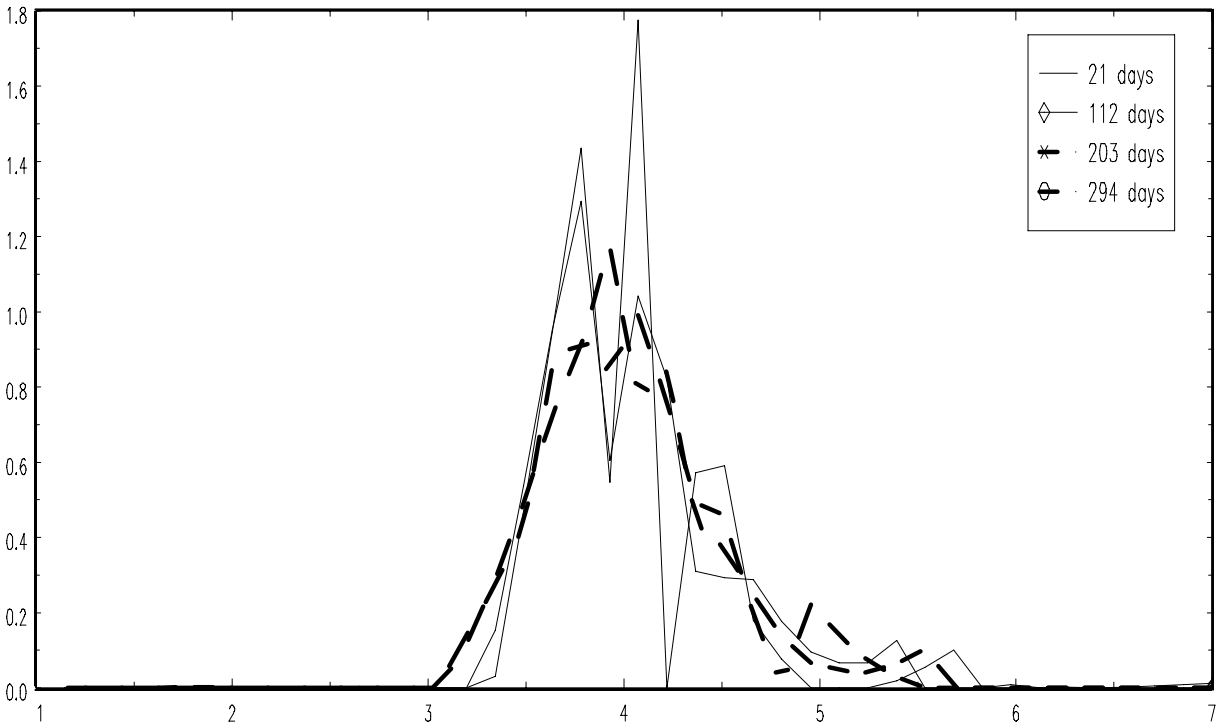


Figure 2.8.c: DNR du contrat PIBOR avec la methode d'arbre implicite de Rubinstein
pour la date du 970602

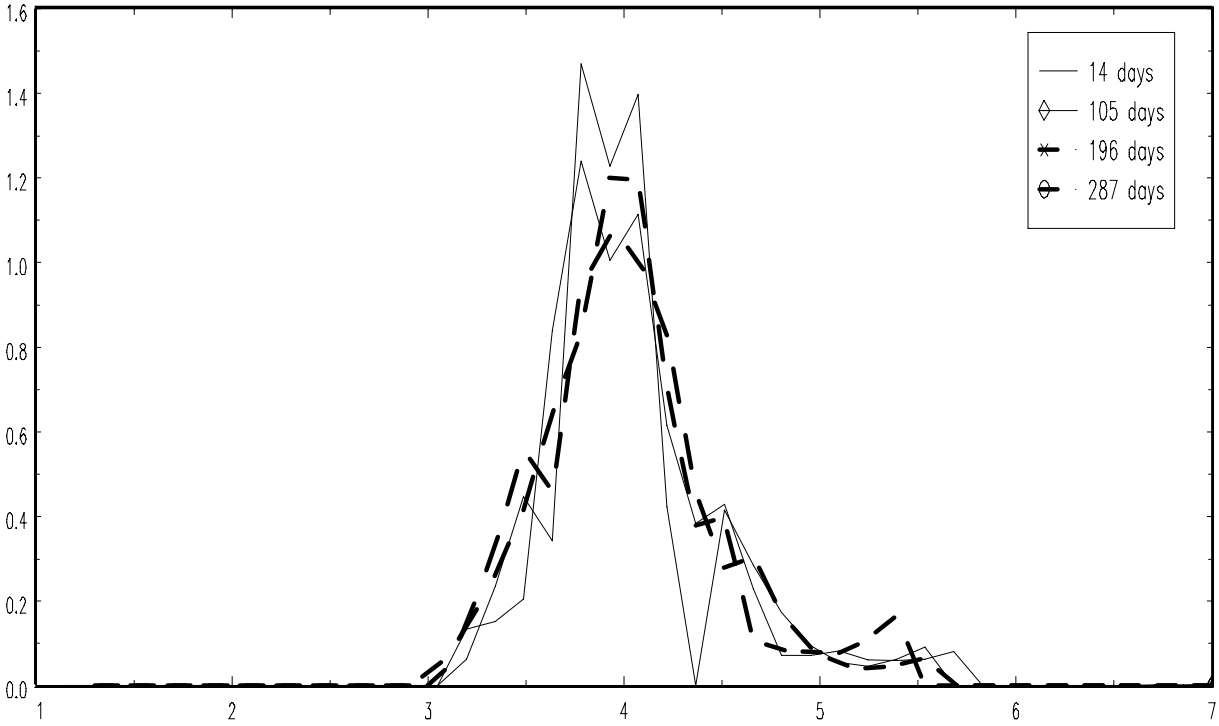
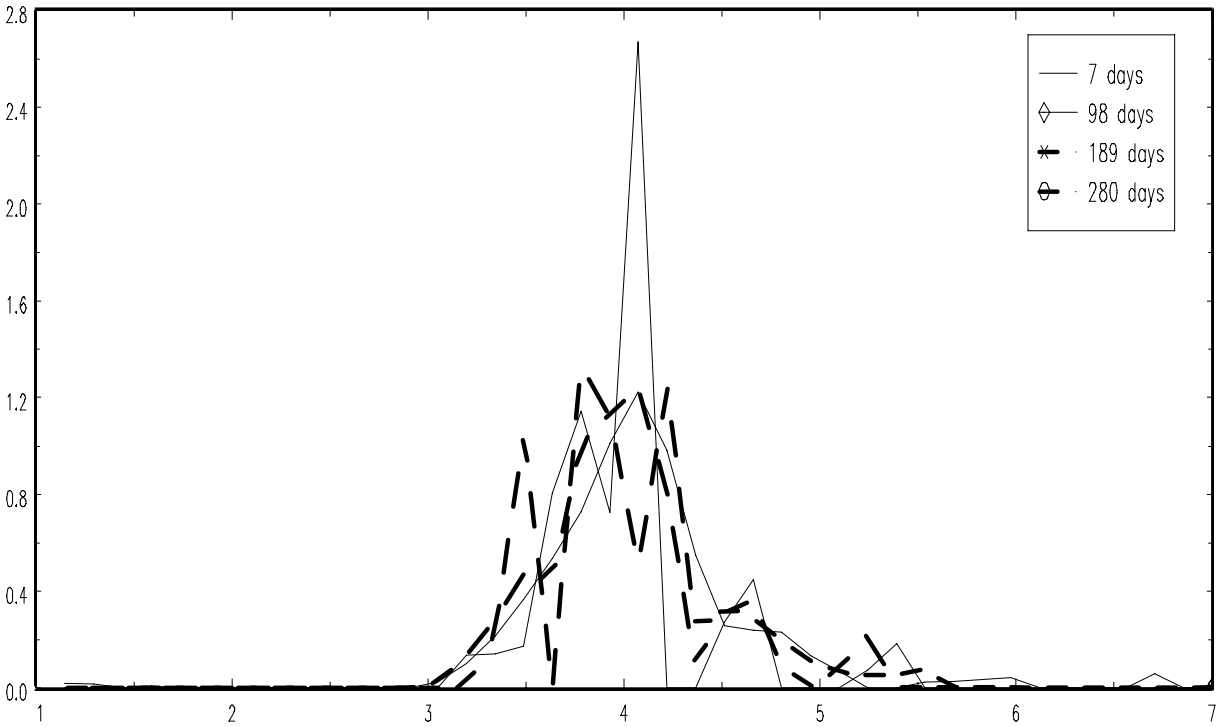


Figure 2.8.d: DNR du contrat PIBOR avec la methode d'arbre implicite de Rubinstein
pour la date du 970609



3.3 Estimateurs de noyaux

Aït-Sahalia et Lo (1996) mettent en œuvre une méthode complètement non paramétrique pour estimer la densité neutre au risque[1]. Le modèle consiste à estimer une fonction entière des prix étant donnés les prix des options et leurs caractéristiques. Les auteurs utilisent ensuite le résultat de Breeden et Litzenberger (1978) pour retrouver la densité neutre au risque.

3.3.1 Le modèle

On note $C(S_i, T_i, K_i, r_i)$, $i = 1, ..., m$, où m représente le nombre d'observations, le prix d'un call de sous-jacent S_i, de prix d'exercice K_i, de maturité T_i, auquel on associe un taux sans risque r_i et l'on note C_i le i-ème prix d'option observé. Le problème à résoudre est peu éloigné d'une minimisation de moindres carrés non linéaires, à la différence près que la minimisation doit se faire sur l'ensemble des fonctions $C(.)$ qui appartiennent à l'espace des fonctions deux fois continûment différentiables :

$$\min_{C(.)} \sum_{i=1}^{m} \left[\widehat{C}_i - C(S_i, T_i, K_i, r_i) \right]^2 . \tag{3.17}$$

On sait que la solution de ce problème de minimisation est donnée par l'espérance conditionnelle de C connaissant les (S_i, T_i, K_i, r_i), $i = 1, ..., n$. Pour estimer cette espérance conditionnelle, on fait appel à une technique statistique appelée régression par les noyaux. Cette régression non paramétrique produit un estimateur $\widehat{C}$ de l'espérance conditionnelle de C sachant les (S_i, T_i, K_i, r_i), sans qu'il soit nécessaire d'estimer un seul paramètre.

L'estimateur de régression par les noyaux ne nécessite aucune autre hypothèse qu'un lissage de la fonction à estimer. Ce lissage se fait par l'intermédiaire d'un noyau qui intervient comme poids dans l'estimation de $C(.)$. Ces fonctions correspondent souvent à des densités de distributions particulières, car elles ont la propriété de s'intégrer à un, mais ne jouent aucun rôle probabiliste dans l'estimation. Pour chaque variable explicative de (S, T, K, r), on retient une fonction de kernel $k^j(Z)$, $j = 1, ..., d$ d'ordre[2] d où d est le

[1] Pritsker (1996) montre la supériorité de cette technique d'estimation par rapport à un modèle de type Vasicek pour estimer la densité du taux court en séries temporelles.

[2] On définit l'ordre s d'une fonction kernel $k(z)$ comme l'entier qui satisfait la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^l k^{(s)}(z) dz = \begin{cases} 1, & \text{si } l = 0, \\ 0, & \text{si } l = 1, ..., s-1, \\ < \infty, & \text{si } l = s. \end{cases}$$

nombre de variables explicatives (ici $d = 4$). La fonction $k^j(Z - Z_i)$, comme fonction de Z, a un certain écart par rapport au point observé Z_i. Pour changer cet écart, on peut utiliser une bande h_j, pour former une nouvelle fonction de densité $(1/h_j)k^j((Z-Z_i)/h_j)$. Un estimateur $C^{\mathrm{KER}}(.)$ est alors donné par l'expression suivante et est appelé estimateur kernel de Nadaraya-Watson, où h devient petit quand la taille m de l'échantillon augmente :

$$C^{\mathrm{KER}}(Z) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{4} \frac{1}{h_j} k^j(\frac{(Z-Z_i)}{h_j}) \widehat{C}_i}{\sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{4} \frac{1}{h_j} k^j(\frac{(Z-Z_i)}{h_j})}. \tag{3.18}$$

Plus le nombre d de régresseurs est élevé, moins l'estimation sera précise. On va donc essayer de réduire le nombre de régresseurs. Aït-Sahalia et Lo (1996) introduisent une approche semiparamétrique (MSP) par opposition au modèle complètement non paramétrique vu précédemment (MNP). On va supposer que le prix du call est donné par la formule fermée de Black et Scholes mais avec une volatilité qui sera une fonction non paramétrique $\sigma^{\mathrm{KER}}(S_t, K, T)$:

$$C^{\mathrm{KER}}(t, S_t, T, K) = C^{\mathrm{BS}}(t, S_t, T, K; \sigma^{\mathrm{KER}}(S_t, K, T)). \tag{3.19}$$

Dans ce modèle semiparamétrique, on a juste besoin d'une régression de kernel à trois dimensions et l'estimateur $\sigma^{\mathrm{KER}} = \widehat{E}[\sigma/S_t, T, K]$ est celui de la volatilité donné par :

$$\sigma^{\mathrm{KER}}(Z) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{4} \frac{1}{h_j} k^j(\frac{(Z-Z_i)}{h_j}) \sigma_i^{\mathrm{BS}}}{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{4} \frac{1}{h_j} k^j(\frac{(Z-Z_i)}{h_j})}, \tag{3.20}$$

où σ_i^{BS} est la volatilité implicite du prix $\widehat{C}_i$. Le nombre d'observations nécessaires pour un même degré de précision est ainsi fortement réduit.

3.3.2 L'estimation de la DNR

On doit maintenant choisir pour chaque régresseur, S_t, T, K et r_t les fonctions de kernel respectives k_S, k_T, k_K et k_r et les bandes h_j, $j = 1, ..., 4$, qui leur sont associées. On

---

Les fonctions kernel suivantes sont les fonctions kernel d'ordre 2 et 4 les plus connues :

$$\begin{aligned} k^{(2)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \\ k^{(4)}(z) &= \frac{3}{\sqrt{8\pi}} (1 - \frac{z^2}{3}) e^{-z^2/2}. \end{aligned}$$

a besoin de dériver deux fois la fonction $C^{\mathrm{KER}}(.)$ pour calculer la densité, donc la fonction kernel k_K correspondant au prix d'exercice doit être deux fois continûment dérivable.

Quatre éléments déterminent le choix de l'ordre de la fonction de kernel et de la bande : la taille de l'échantillon m, le nombre d de régresseurs inclus dans l'estimation non paramétrique, le nombre p_j, $j = 1, ..., d$, de dérivées partielles de $C(.)$ par rapport au j-ième régresseur, qui existent, et le nombre m_j, $j = 1, ..., 4$ de dérivées partielles de $C(.)$ par rapport au j-ième régresseur dont nous avons besoin. Dans notre cas particulier pour le modèle MNP (resp. MSP), nous avons $d = 4$ (resp. $d = 3$), nous supposerons que $p_j = 4$, $j = 1, ..., 4$, $m_j = 0$, $j = 1,\ 2$ et 4, $m_3 = 2$ (resp. $p_j = 4$, $j = 1, ..., 3$, $m_j = 0$, $j = 1,\ 2$, $m_3 = 2$). On choisit l'ordre s de la fonction kernel pour chaque régresseur j tel que :

$$\begin{cases} s_j = p_j - m_j, & \text{si } p_j - m_j \text{ est pair} \\ s_j = p_j - m_j - 1, & \text{si } p_j - m_j \text{ est impair} \end{cases}$$

Une fois l'ordre de la fonction déterminé, le choix de la fonction elle-même a peu d'influence sur l'estimateur $C^{\mathrm{KER}}(.)$. Finalement, dans le modèle MNP (resp. MSP), on a $k_S = k_T = k_r = k^{(4)}$ et $k_K = k^{(2)}$ (resp. $k_S = k_T = k^{(4)}$ et $k_K = k^{(2)}$).

En revanche, le choix de la bande est crucial. La décision de la vitesse avec laquelle la bande décroît vers 0 comme fonction de la taille de l'échantillon est la composante essentielle de la régression kernel. Pour chacun des d régresseurs, Silvermann (1986) propose comme bande correspondante le paramètre h_j égal à :

$$h_j = 1.364 * (\frac{\mu_2(k)}{\nu_2(k)})^{1/5} \frac{\sigma_j}{m^{1/5}}$$

où $\mu_l(k) = \int u^l k(u)du$, $\nu_l(k) = \int k^l(u)du$ et σ_j est l'écart-type non-conditionnel du j-ième régresseur. Cette bande est choisie de telle sorte que notre estimateur $C^{\mathrm{KER}}(.)$ converge avec une vitesse optimale par rapport à tous les autres estimateurs $C^{\mathrm{KER}}(.)$. Cette vitesse de convergence est donnée par :

$$m^{(P-M)/(d+2P)}$$

avec $M = \sum_{j=1}^{d} m_j$ et $P = \sum_{j=1}^{d} p_j$.

L'estimateur (3.18) $C^{\mathrm{KER}}(.)$ du modèle MCP a la forme explicite suivante :

$$C^{\mathrm{KER}}(S_t, T, K, r_t) = \frac{\sum_{i=1}^{m} k_S(\frac{(S-S_i)}{h_1}) k_T(\frac{(T-T_i)}{h_2}) k_K(\frac{(K-K_i)}{h_3}) k_r(\frac{(r-r_i)}{h_4}) \widehat{C}_i}{\sum_{i=1}^{m} k_S(\frac{(S-S_i)}{h_1}) k_T(\frac{(T-T_i)}{h_2}) k_K(\frac{(K-K_i)}{h_3}) k_r(\frac{(r-r_i)}{h_4})}$$

et l'estimateur (3.20) $\sigma^{\mathrm{KER}}(Z)$ est donné par :

$$\sigma^{\mathrm{KER}}(S_t,T,K)=\frac{\sum_{i=1}^{m}k_S(\frac{(S-S_i)}{h_1})k_T(\frac{(T-T_i)}{h_2})k_K(\frac{(K-K_i)}{h_3})\sigma_i^{\mathrm{BS}}}{\sum_{i=1}^{m}k_S(\frac{(S-S_i)}{h_1})k_T(\frac{(T-T_i)}{h_2})k_K(\frac{(K-K_i)}{h_3})}.$$

La densité neutre au risque se calcule à l'aide de la relation (1.1) et l'on obtient :

$$q^{\mathrm{KER}}(S_t,T,x)=e^{r_t(T)\tau}\left[\frac{\partial^2 C^{\mathrm{KER}}(S_t,T,K,r_t)}{\partial K^2}\right]_{K=x}.$$

On voit clairement sur les graphiques (2.9.a) à (2.9.d) les limites de cette méthode. La fonction de lissage donne des densités très imprécises dues au nombre très faible de points observés. Cette méthode serait probablement mieux adaptée à une étude portant sur un large échantillon ou pour estimer les rendements en séries temporelles.

Figure 2.9.a: DNR du CAC 40 avec la methode des noyaux
pour la date du 970314

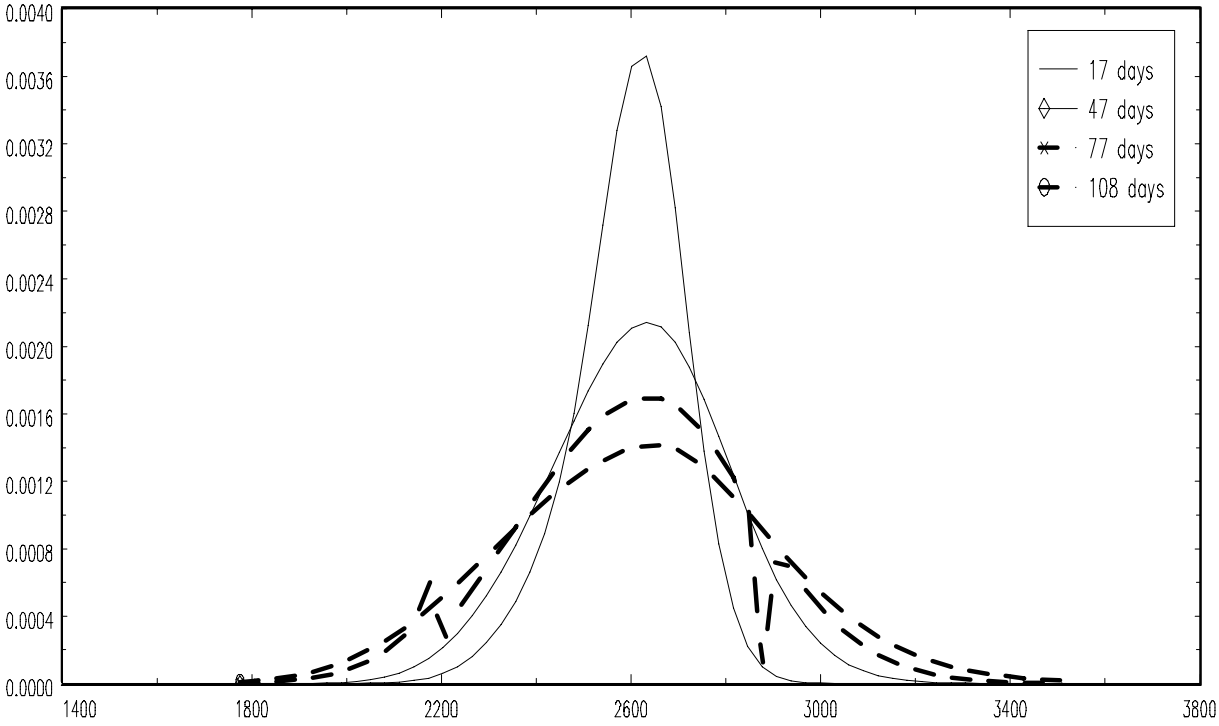


Figure 2.9.b: DNR du rendement du CAC 40 avec la methode des noyaux
pour la date du 970814

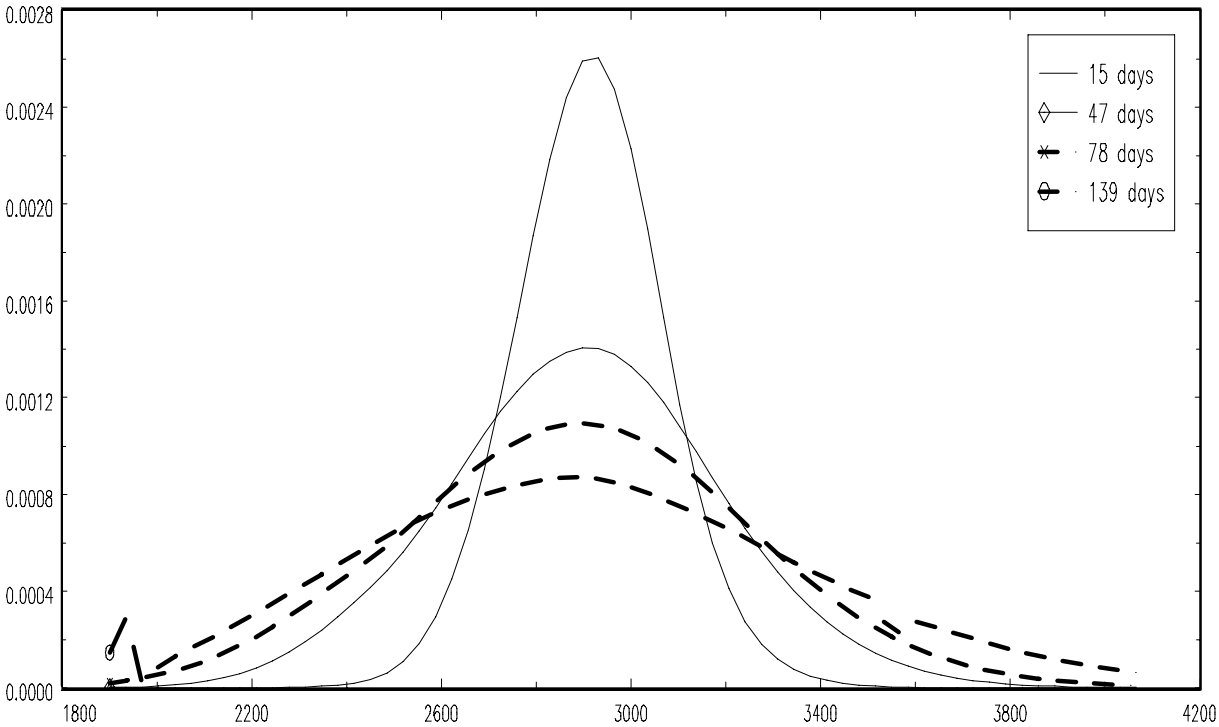


Figure 2.9.c: DNR du rendement du CAC 40 avec la methode des noyaux
pour la date du 971015

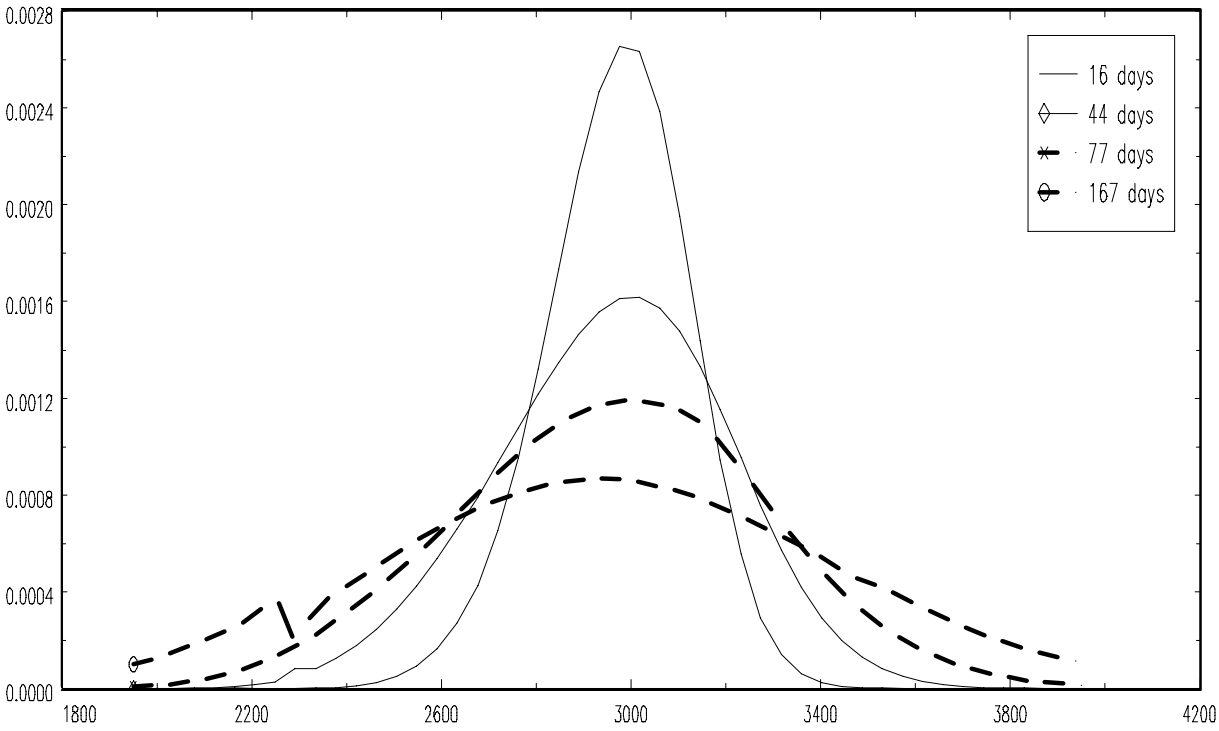
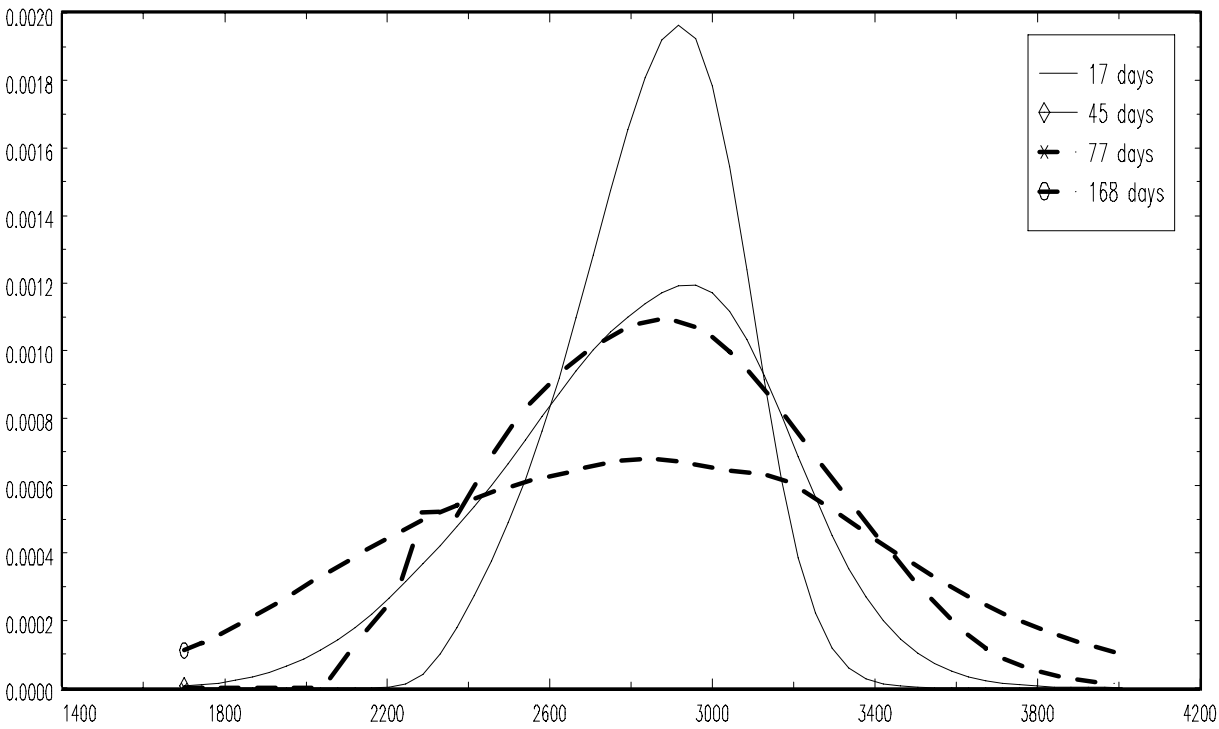


Figure 2.9.d: DNR du rendement du CAC 40 avec la methode des noyaux
pour la date du 980113



3.4 La maximisation de l'entropie

L'estimation de la densité par maximisation de l'entropie permet de reconstruire une fonction de densité à partir de l'information connue en maximisant l'entropie de la fonction à estimer. Cette méthode trouve ses fondements dans Shannon (1948) et est appliquée à la finance par Buchen et Kelly (1996) et Stutzer (1996). Borwein, Lewis et Noll (1996) présentent une variété de mesures de l'entropie pour estimer la densité spectrale. Ryu (1993) utilise cette méthodologie pour déterminer les formes fonctionnelles de la densité et des fonctions de régression. Enfin Fritelli (1995) est le premier à l'appliquer en finance dans un cadre de marchés incomplets.

3.4.1 Le modèle

On considère le problème d'estimation d'une densité $\overline{p}(t) \geq 0$, à partir d'un ensemble d'information

$$\int a_i(t)\overline{p}(t)dt = b_i, i = 0, ..., N \tag{3.21}$$

On va chercher une solution $p(t)$ du problème qui maximise l'entropie $S(p)$, qui s'écrit sous la forme d'une intégrale du type :

$$S_\phi(p) = -\int \phi(p(x))dx \tag{3.22}$$

où $\phi \ : R \to R \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe semi-continue. Les mesures d'entropie rencontrées en pratique le plus fréquemment sont celles de Boltzmann-Shannon et de Nurg, définies respectivement par :

$$\phi^{\mathrm{BS}}(p) = \begin{cases} p\ln(p),\ x \geq 0, \\ +\infty,\ x < 0, \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\phi^{\mathrm{N}}(p) = \begin{cases} -\ln(p),\ x > 0, \\ +\infty,\ x \leq 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

On note qu'avec la première fonction ϕ, $\lim(p\ln p) \to 0$ quand $p \to 0$; donc si $p(x)$ est non nul sur un intervalle fini, l'intégration peut être prise sur cet intervalle seulement.

Pour que $p(x)$ soit une densité, on doit imposer $p(x) \geq 0\ \forall x$, et la contrainte

$$\int_0^\infty p(x)dx = 1. \tag{3.25}$$

Buchen et Kelly (1996) appliquent cette méthode aux options et imposent les contraintes d'arbitrage supplémentaires. D'une part, ils imposent que l'espérance du prix d'option actualisé soit égale au prix observé ; d'autre part, ils imposent que l'espérance du prix du sous-jacent soit égale au prix du forward à l'instant t. Ces contraintes peuvent s'écrire sous la forme commune suivante :

$$E\left[c_i(x)\right] = \int_0^\infty p(x)c_i(x)dx = d_i, \tag{3.26}$$

où $d_0 = F_t$ le prix du contrat forward en t et $d_i, i = 1, ..., m$ représente le prix de l'option au strike K_i. Les fonctions $c_i(x)$ sont données par :

$$\begin{aligned} c_0(x) &= x \\ c_i(x) &= e^{-r_t(T)\tau}(x - K_i)^+, i = 1, ..., m_c, \\ c_i(x) &= e^{-r_t(T)\tau}(K_i - x)^+, i = m_c + 1, ..., m, \end{aligned}$$

où m_c représente le nombre de calls.

Le problème d'optimisation sous contraintes consiste à maximiser le Hamiltonien $H(p)$, en supposant une mesure de l'entropie de type (3.23) :

$$H(p) = -\int_0^\infty p(x)\ln p(x)dx + (1+\lambda)\int_0^\infty p(x)dx + \sum_{i=0}^{N}\lambda_i \int_0^\infty p(x)c_i(x)dx \tag{3.27}$$

où $\lambda, \lambda_0, ..., \lambda_N$ sont des paramètres de Lagrange à déterminer. La fonctionnelle $H(p)$ est maximisée quand sa dérivée par rapport à p s'annule.

$$dH = \int_0^\infty \left[-\ln(p) + \lambda + \sum_{i=0}^{N}\lambda_i c_i(x)\right] dp(x) = 0.$$

$$p_{\max}(x) = \frac{1}{\mu}\exp\left(\sum_{i=0}^{N}\lambda_i c_i(x)\right), \mu = \int_0^\infty \exp\left(\sum_{i=0}^{N}\lambda_i c_i(x)\right) dx \tag{3.28}$$

où $\mu = e^{-\lambda}$ est la constante de normalisation.

En remplaçant la valeur de p par $p_{\max}$ dans la fonction d'entropie (3.22), on obtient

$$S_{\max} = F(\lambda_1, ..., \lambda_N) = \ln\mu - \sum_{i=0}^{N}\lambda_i d_i. \tag{3.29}$$

Le calcul de $f_i = \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}$ donne $f_i(\lambda_0, ..., \lambda_N) = E\left[c_i(x)\right] - d_i$, et $f_i = 0$ dès que toutes les contraintes

sont satisfaites.

Agmon, Alhassid et Levine (1979) proposent un algorithme pour déterminer la distribution du maximum d'entropie sous contraintes.

On donne en annexe D une méthode rapide pour résoudre l'optimisation et déterminer les paramètres de Lagrange $\lambda_i,\ i = 0, ..., N$.

On montre en figures (2.10.a) à (2.10.d) les densités obtenues en maximisant l'entropie de la distribution. Les résultats obtenus ne sont pas étonnants compte-tenu de la méthode de construction de ces densités. On reconnait clairement les parties exponentielles de la densités égales au nombre de prix observés Il semble que cette méthode autorise la présence d'une asymétrie élevée mais d'un faible excès de kurtosis.

Figure 2.10.a: DNR du contrat PIBOR avec la methode du maximum d'entropie
pour la date du 970421

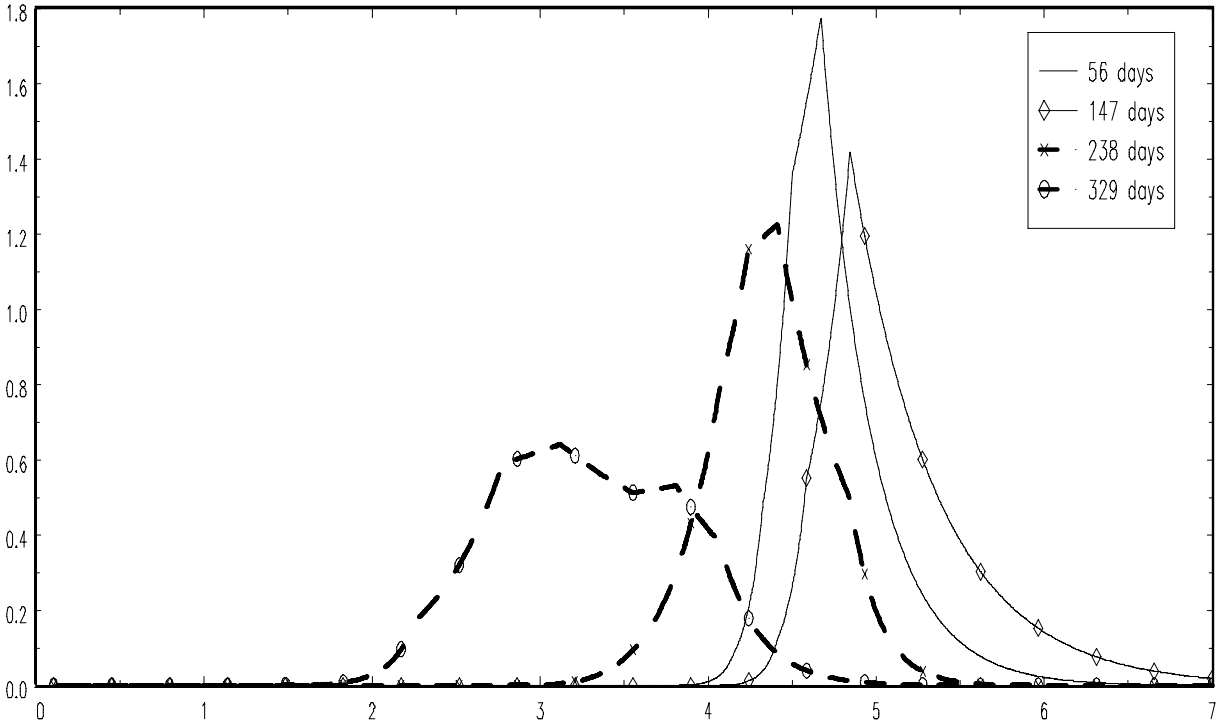


Figure 2.10.b: DNR du contrat PIBOR avec la methode du maximum d'entropie
pour la date du 970526

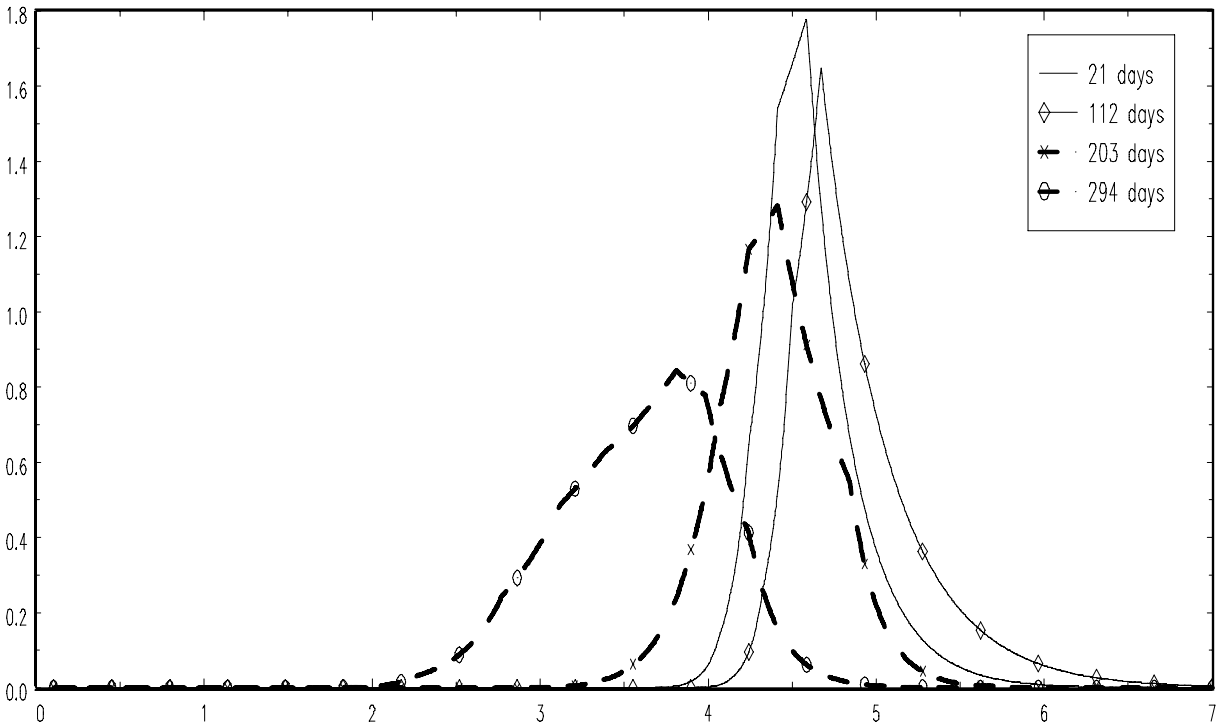


Figure 2.10.c: DNR du contrat PIBOR avec la methode du maximum d'entropie
pour la date du 970602

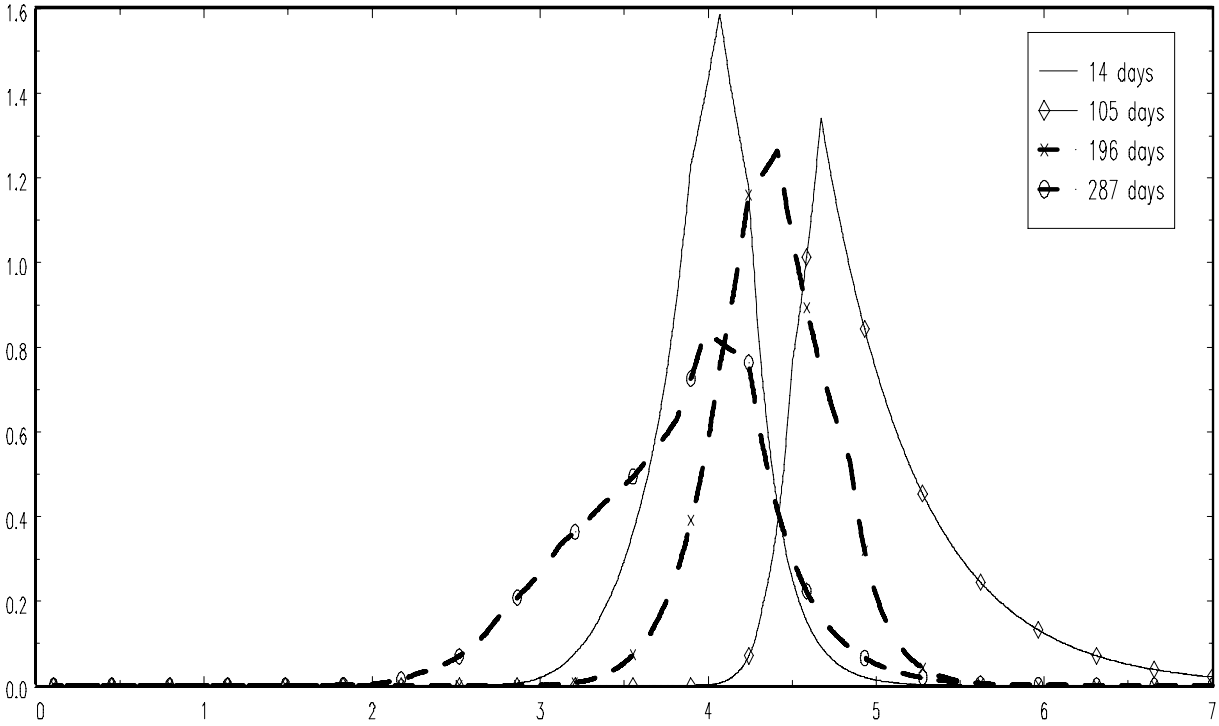
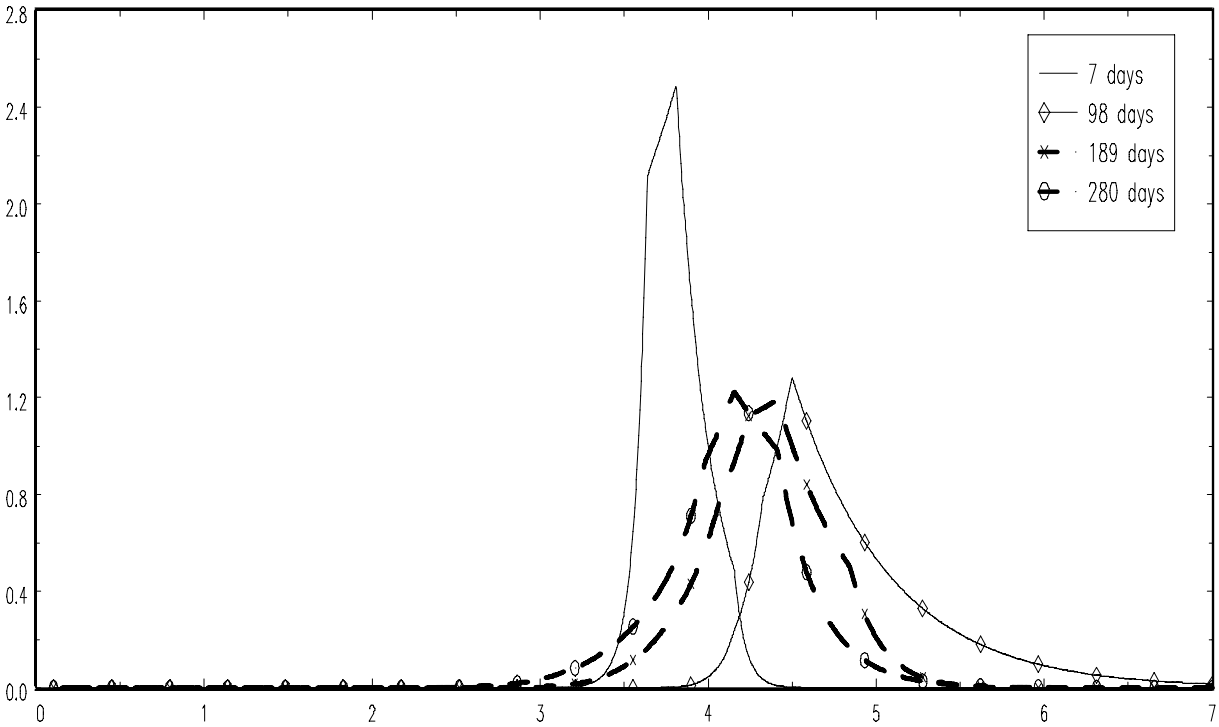


Figure 2.10.d: DNR du contrat PIBOR avec la methode du maximum d'entropie
pour la date du 970609



Chapitre 4

Les méthodes structurelles

On définit par méthodes structurelles l'ensemble des méthodes qui nécessitent une hypothèse directement sur la forme fonctionnelle de la distribution. Historiquement, ces méthodes ont vu le jour avec la modélisation des rendements d'actifs en séries temporelles, puis ont été étendues à l'estimation des densités neutres au risque.

4.1 Mélanges de lois lognormales

4.1.1 Le modèle

La méthode proposée par Bahra (1996) et mise en œuvre par Melik et Thomas (1997) consiste à écrire la densité du sous-jacent sous la forme d'une somme pondérée de n lois lognormales indépendantes de paramètres différents :

$$q^{\mathrm{MLN}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i l_i(x), \tag{4.1}$$

avec

$$l_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma_i x} \exp\left[-\frac{\left(\ln(x) - \mu_i\right)^2}{2\sigma_i^2 T}\right]$$

Chaque densité lognormale est complètement définie par les paramètres de moyenne μ_i et de variance σ_i^2. Le mélange de densités lognormales permet de tenir compte d'une large variété de formes fonctionnelles de la densité qui peuvent impliquer plusieurs scénarii. Par exemple, si les opérateurs du marché pensent que le sous-jacent à l'échéance peut atteindre 2 valeurs distinctes à l'échéance associées chacune à une probabilité, la densité neutre au risque résultante sera nécessairement bimodale.

4.1.2 Prix d'un call

On se place dans le cas où nous avons deux lois lognormales[1]. Le prix d'un call européen s'écrit comme l'espérance actualisée du flux terminal :

$$C^{\mathrm{MLN}}(t,F,K,T) = e^{-r_t(T)\tau}\int_K^{\infty}(x-K)\left[\pi l_1(x)+(1-\pi)l_2(x)\right]dx \tag{4.2}$$

$$= e^{-r_t(T)\tau}\sum_{i=1}^{2}\pi_i\left\{\begin{array}{c}\exp\left(\mu_i+\frac{\sigma_i^2\tau}{2}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{\ln K-\mu_i-\sigma_i^2\tau}{\sigma_i\sqrt{\tau}}\right)\right]\\ -K\left[1-\Phi\left(\frac{\ln K-\mu_i}{\sigma_i\sqrt{\tau}}\right)\right]\end{array}\right\}, \tag{4.3}$$

avec $0<\pi<1$.

En absence d'opportunité d'arbitrage, la moyenne de la densité risque neutre doit être égale au prix du contrat aujourd'hui. Cette contrainte s'écrit pour le mélange de lois lognormales de la façon suivante :

$$F_t = \sum_{i=1}^{2}\pi_i\exp\left(\mu_i+\frac{\sigma_i^2\tau}{2}\right). \tag{4.4}$$

4.1.3 Les moments de la densité de mélanges de lognormales

Les moments jusqu'à l'ordre 4 sont donnés par :

$$\gamma_j(F_T) = \sum_{i=1}^{2}\pi_i\exp\left(jm_i+\frac{(js_i)^2}{2}\right).$$

Les graphiques (2.11.a) à (2.11.d) montrent les densités obtenues avec un mélange de lois lognormales pour le Pibor 3 mois. Cette méthode a l'intérêt de pouvoir coller à de nombreux types de scénarii en exhibant facilement des densités bimodales ou avec des queues fortement épaisses.

[1] Le choix du nombre de lois est fortement contraint par le faible nombre de prix d'exercice. Dans un contexte de séries temporelles nous pourrions très bien estimer le nombre de lois lognormales pertinent.

Figure 2.11.a: DNR du taux PIBOR avec un melange de deux lognormales
pour la date du 970421

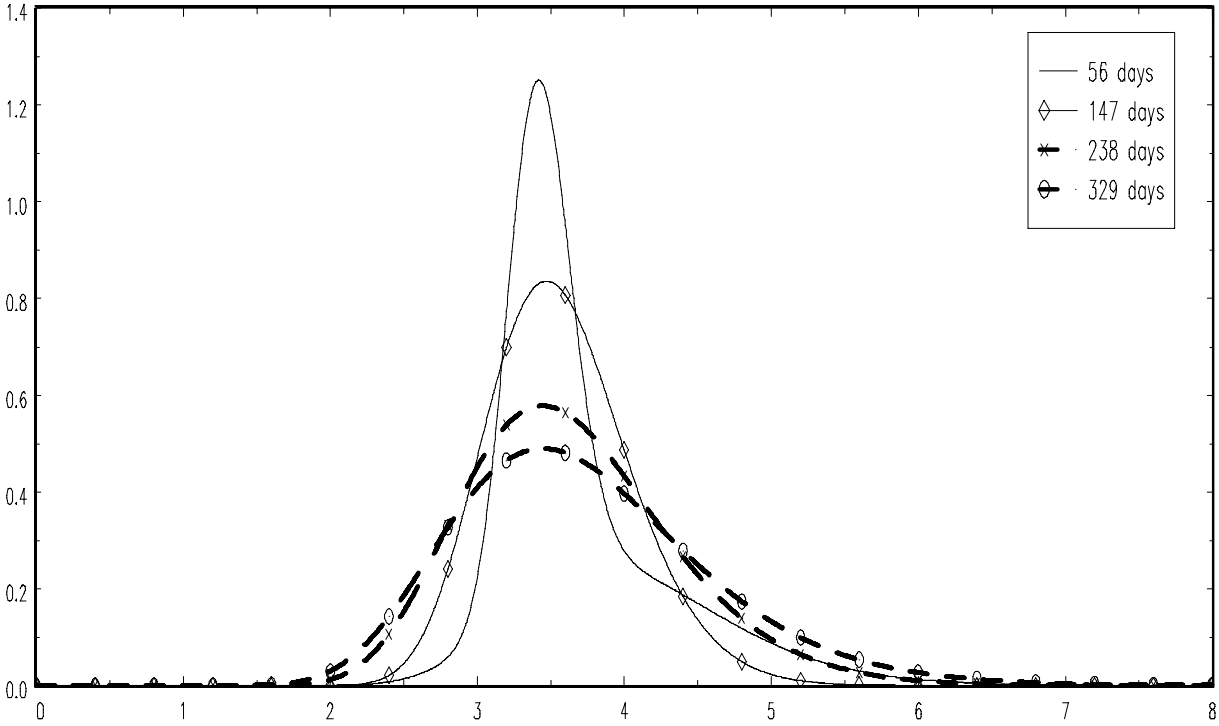


Figure 2.11.b: DNR du taux PIBOR avec un melange de deux lognormales
pour la date du 970526

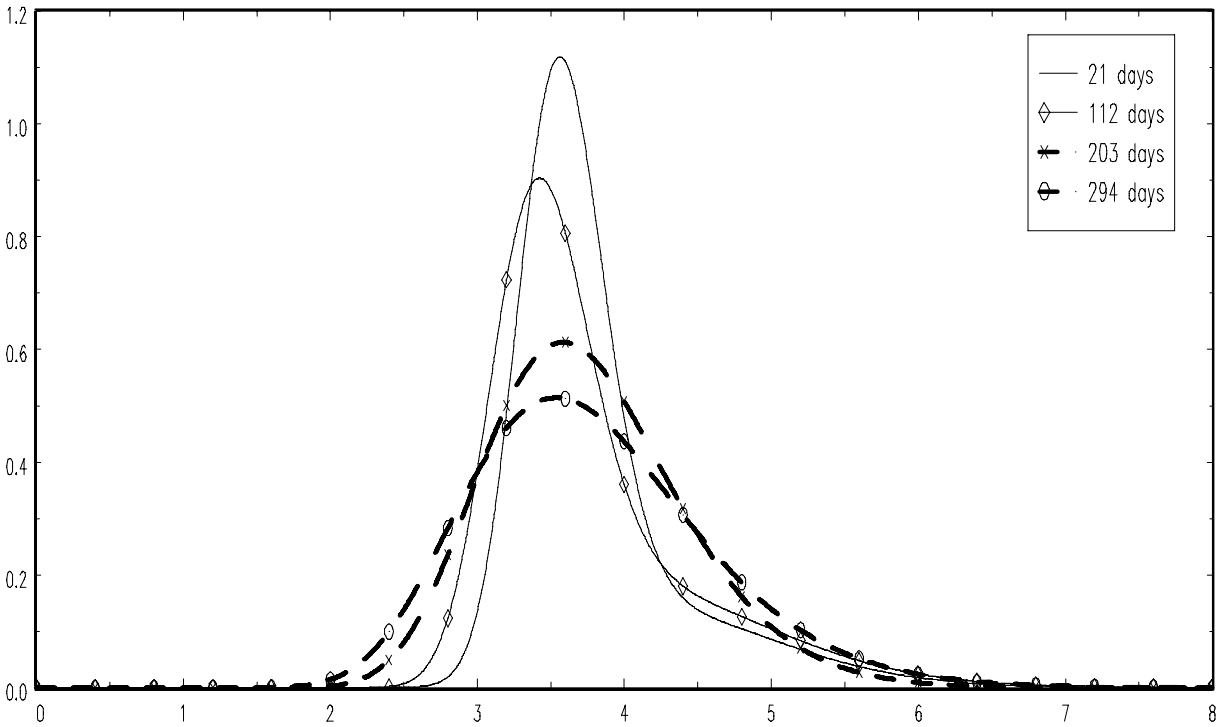


Figure 2.11.c: DNR du taux PIBOR avec un melange de deux lognormales
pour la date du 970602

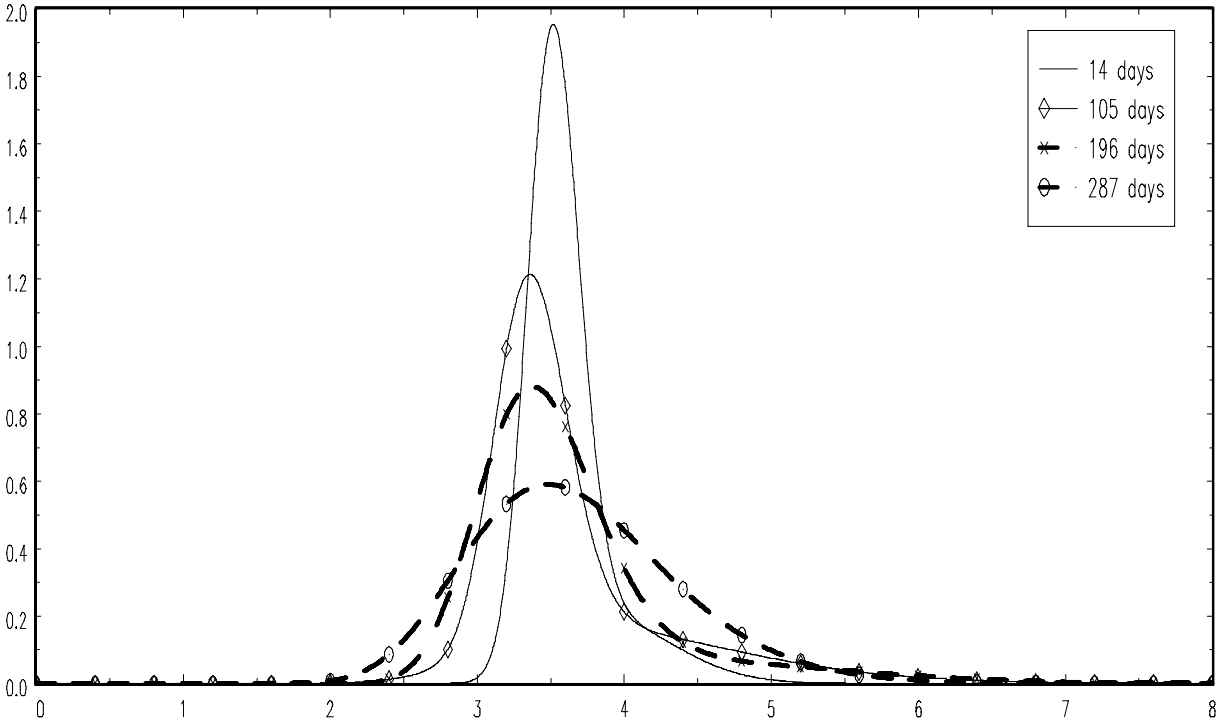
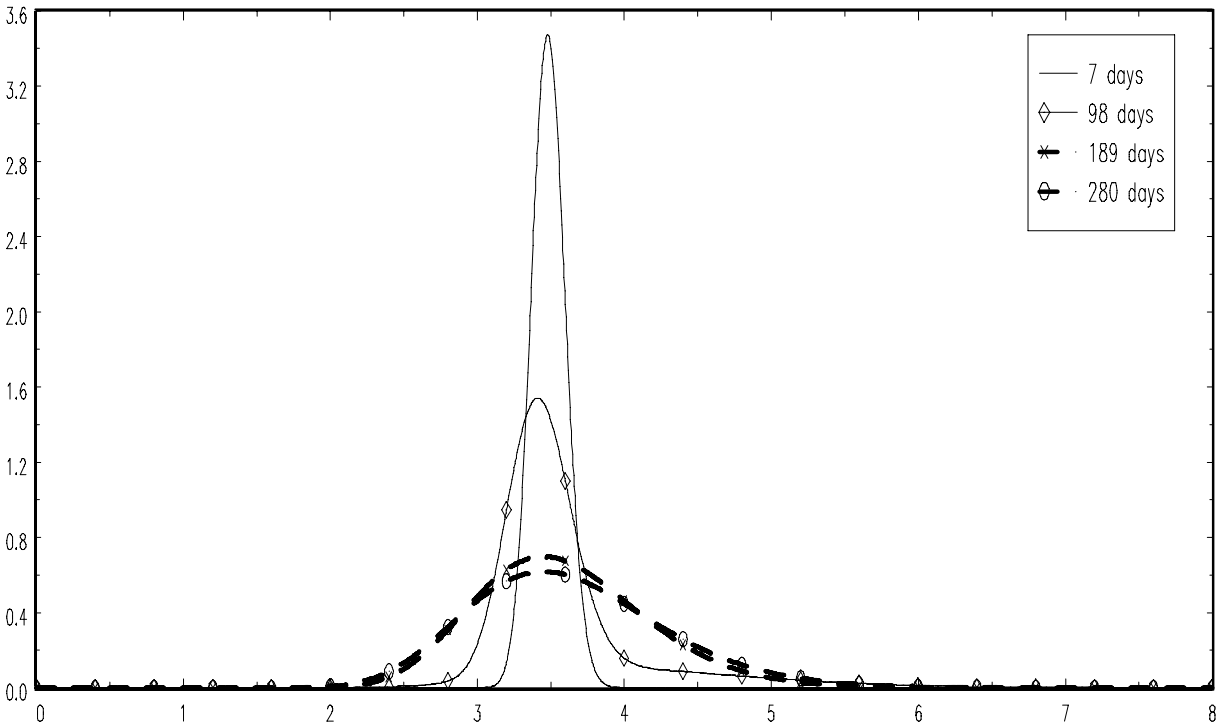


Figure 2.11.d: DNR du taux PIBOR avec un melange de deux lognormales
pour la date du 970609



4.2 Développements en série autour de la densité

4.2.1 Développements en série d'Edgeworth

Le modèle

Jarrow et Rudd (1982) puis Corrado et Su (1996) proposent d'approcher la distribution du prix du sous-jacent à l'aide d'un procédé dérivé des développements en séries de Taylor pour une fonction analytique, appelé développement généralisé d'Edgeworth. Dans cette méthode, on suppose l'existence d'une distribution vraie et d'une distribution approchée. Les coefficients du développement sont de simples fonctions des deux distributions.

On note $G(s)$ la vraie distribution et $A(s)$ la distribution approchée et on suppose que $A'(s) = a(s)$ et $G'(s) = g(s)$ existent. On note alors :

$$\begin{aligned}
\alpha_j(G) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s^j g(s) ds, \\
\mu_j(G) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (s - \alpha_1(G))^j \, g(s) ds, \\
\phi(G,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its} g(s) ds,
\end{aligned}$$

respectivement les moments de G, les moments non centrés de G et la fonction caractéristique de G et $i^2 = -1$.

Etant donnés $\alpha_j(G)$, $j \leq n$, les $n-1$ premiers cumulants $\kappa_j(G)$, $1 \leq j \leq n-1$ existent aussi et sont définis par :

$$\ln\left[\phi(G,t)\right] = \sum_{j=1}^{n-1} \kappa_j(G) \frac{(it)^j}{j!} + o(t^{n-1}) \tag{4.5}$$

où $o(t^{n-1})$ satisfait $\lim_{t \to 0} \frac{o(t^{n-1})}{t^{n-1}} = 0$.

Le lien entre les moments et les cumulants se retrouve facilement en écrivant $\phi(F,t)$ en fonction des moments centrés $\mu_j(G)$, en substituant dans l'équation ci-dessus, et en égalisant les coefficients dans le polynôme obtenu. Les quatre premiers cumulants sont

donnés par :

$$\begin{aligned}
\kappa_1(G) &= \alpha_1(G) \\
\kappa_2(G) &= \mu_2(G) \\
\kappa_3(G) &= \mu_3(G) \\
\kappa_4(G) &= \mu_4(G) - 3\mu_2(G)^2
\end{aligned}$$

et représentent respectivement la moyenne, la variance, la skewness et l'excès de kurtosis.

Le développement en série de $q^{\mathrm{EDG}}(x)$ s'écrit en fonction de $a(s)$, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
q^{\mathrm{EDG}}(x) &= a(x) + \frac{(\kappa_2(G) - \kappa_2(A))}{2!}\frac{d^2a(x)}{dx^2} - \frac{(\kappa_3(G) - \kappa_3(A))}{3!}\frac{d^3a(x)}{dx^3} \\
&\quad + \frac{(\kappa_4(G) - \kappa_4(A)) + 3\left(\kappa_2(G) - \kappa_2(A)\right)^2}{4!}\frac{d^4a(x)}{dx^4} + \varepsilon(x)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

avec $\kappa_1(F) = \kappa_1(A)$ par construction qui explique la disparition du terme en $a'(x)$.

Evaluation d'une option

On considère un call de prix d'exercice K, de maturité T et on note F, la valeur du sous-jacent à l'instant t. Sous la probabilité risque neutre, la valeur du call est donnée par :

$$C^{\mathrm{EDG}}(t, F, K, T) = e^{-r_t(T)\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(x - K, 0)q^{\mathrm{EDG}}(x)dx$$

et q^{EDG} doit vérifier la contrainte d'arbitrage :

$$\alpha_1(Q^{\mathrm{EDG}}) = F.$$

En remplaçant q^{EDG} par son développement (4.6), on peut réécrire la formule d'évaluation comme :

$$\begin{aligned}
C^{\mathrm{EDG}}(t, F, K, T) &= c + e^{-r_t(T)\tau}\frac{(\kappa_2(G) - \kappa_2(A))}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(x - K, 0)\frac{d^2a(x)}{dx^2}dx \\
&\quad + e^{-r_t(T)\tau}\frac{(\kappa_3(G) - \kappa_3(A))}{3!}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(x - K, 0)\frac{d^3a(x)}{dx^3}dx \\
&\quad + e^{-r_t(T)\tau}\frac{(\kappa_4(G) - \kappa_4(A)) + 3\left(\kappa_2(G) - \kappa_2(A)\right)^2}{4!}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(x - K, 0)\frac{d^4a(x)}{dx^4}dx + \varepsilon(K)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

où $C_A(t, F, K, T)$ représente le prix d'un call sous la probabilité de référence.

Un candidat pour la distribution approchée est la distribution lognormale[2]. Dans ce cas $C_A(t,F,K,T) = C^{\mathrm{BS}}(t,F,K,T)$ correspond au prix Black d'une option sur contrat à terme donnée par (2.3). On peut simplifier (4.7) en imposant la restriction d'égalité des moments d'ordre 2 de A et Q^{EDG} en invoquant des arguments de stabilité.

Après simplification de C^{EDG} on obtient :

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{EDG}}(t,F,K,T) &= C^{\mathrm{BS}}(t,F,K,T) - e^{-r_t(T)\tau}\frac{\left(\kappa_3(Q^{\mathrm{EDG}}) - \kappa_3(N)\right)}{6}\frac{d^3n(x)}{dx^3} \\ &\quad + e^{-r_t(T)\tau}\frac{\left(\kappa_4(Q^{\mathrm{EDG}}) - \kappa_4(N)\right)}{24}\frac{d^4n(x)}{dx^4} + \varepsilon(x) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} K_1(N) &= F \\ K_2(N) &= K_1(A)q^2 \\ K_3(N) &= K_1(A)^3q^3\left(3q+q^3\right) \\ K_4(N) &= K_1(A)^4q^4\left(16q^2+15q^4+6q^6+q^8\right) \\ q^2 &= \left(\exp(\sigma^2T)-1\right) \end{aligned}$$

Les moments de la densité d'Edgeworth

Si F_T suit une loi de la forme (4.6), les moments centrés jusqu'à l'ordre 4 sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mu_2(F_T) &= F^2q^2 \\ \mu_3(F_T) &= \kappa_3(A) \\ \mu_4(F_T) &= \kappa_4(A)+3 \end{aligned}$$

Les figures (2.12.a) à (2.12.d) représentent les densités obtenues en supposant un développement d'Edgeworth. Cette forme de densité autorise de fortes asymétries et kurtosis ainsi que la possibilité de lois bimodales.

[2] On donne dans annexe F, les dérivées de la loi lognormale.

Figure 2.13.a: DNR du rendement du CAC 40 avec un developpement d'Edgeworth
pour la date du 970314

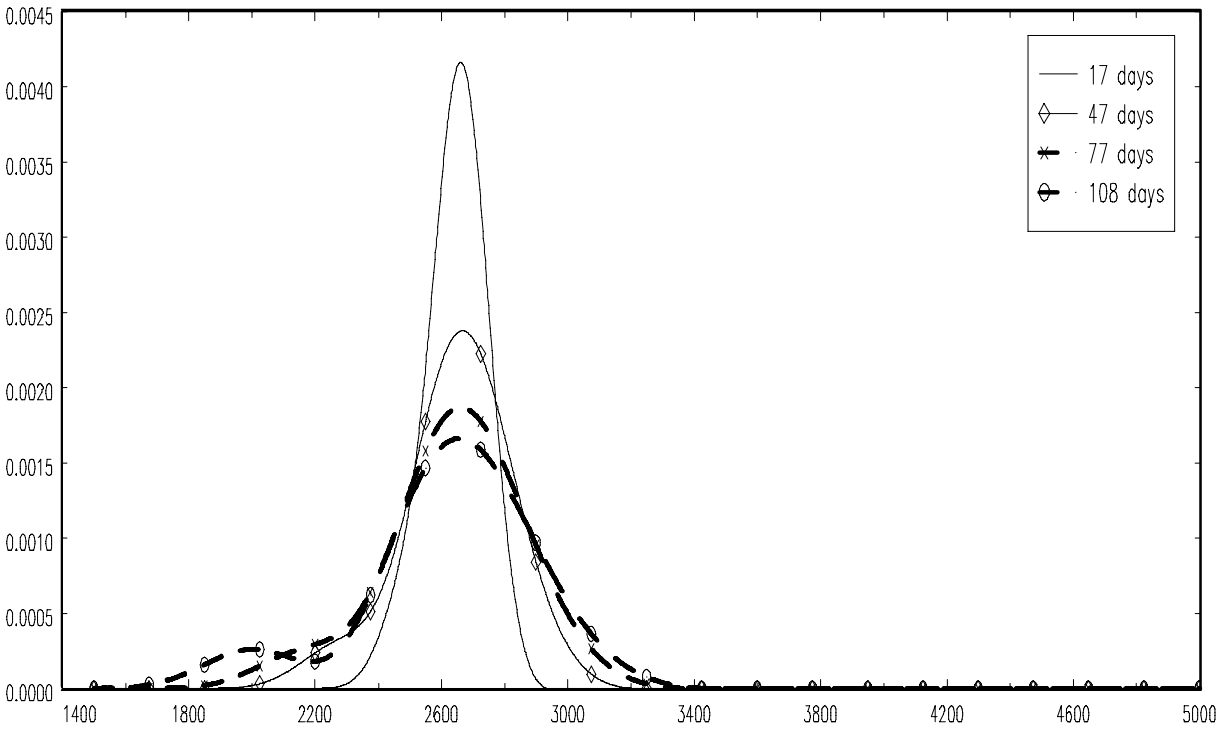


Figure 2.13.b: DNR du rendement du CAC 40 avec un developpement d'Edgeworth
pour la date du 970814

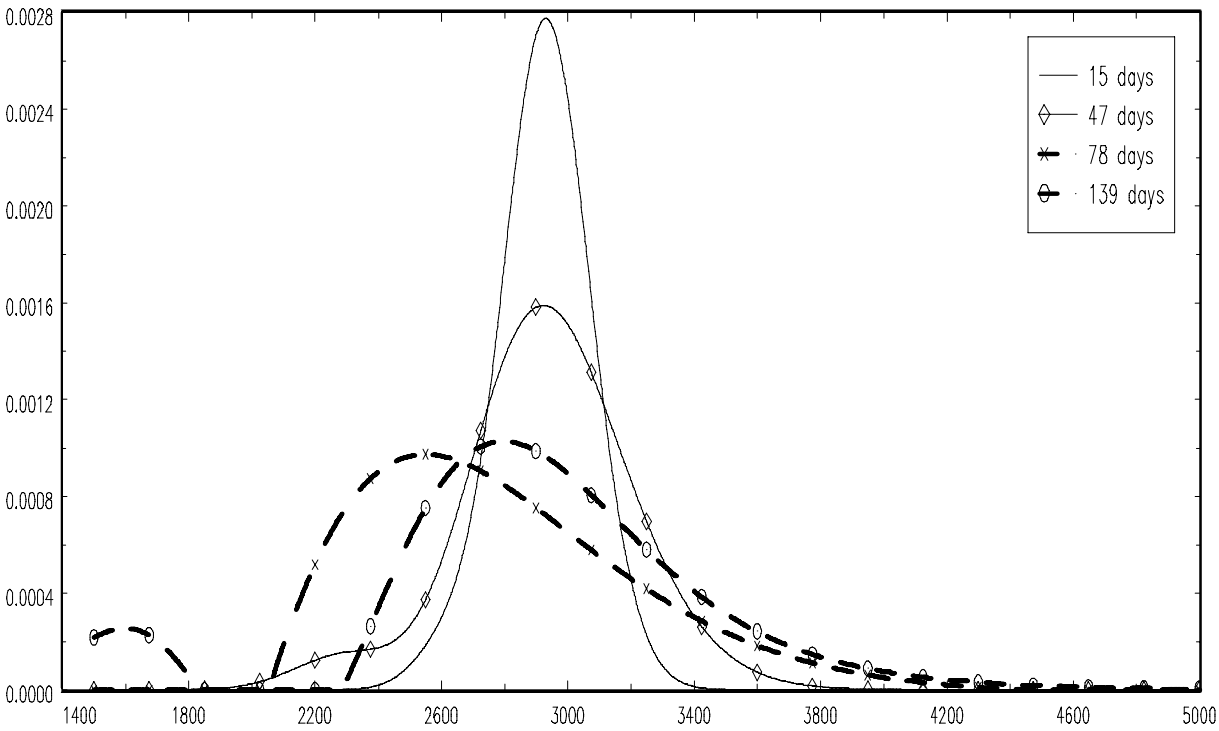


Figure 2.13.c: DNR du rendement du CAC 40 avec un developpement d'Edgeworth
pour la date du 971015

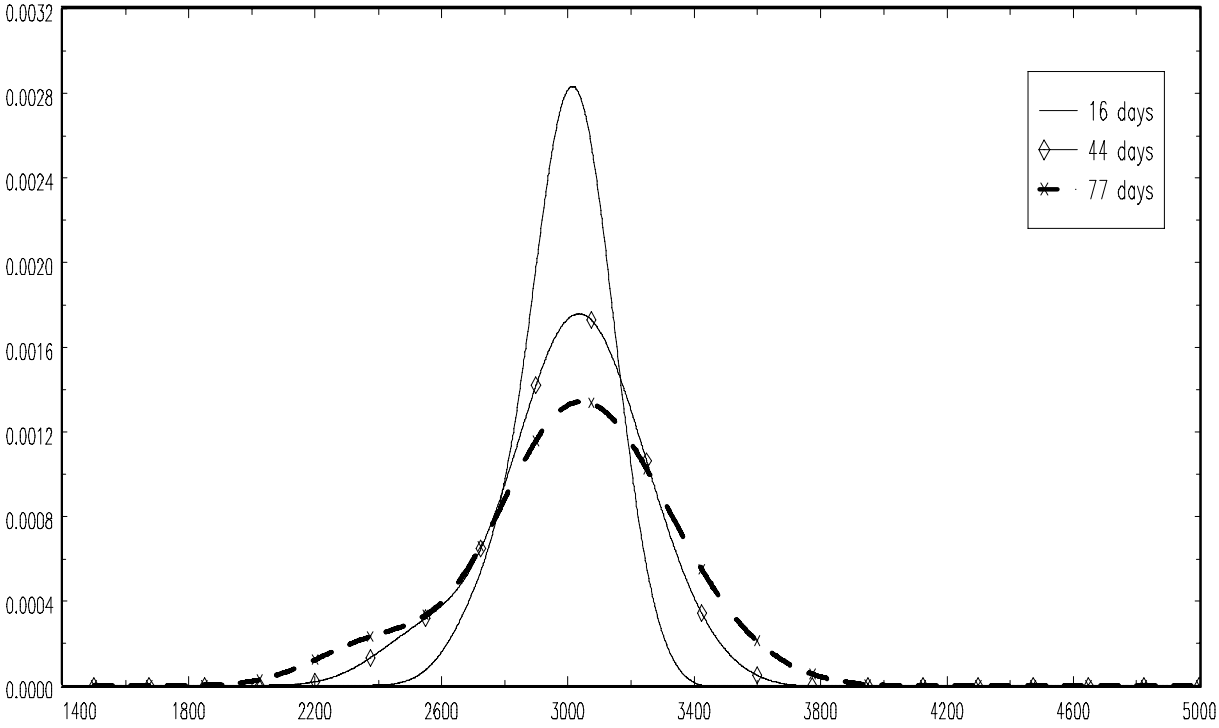
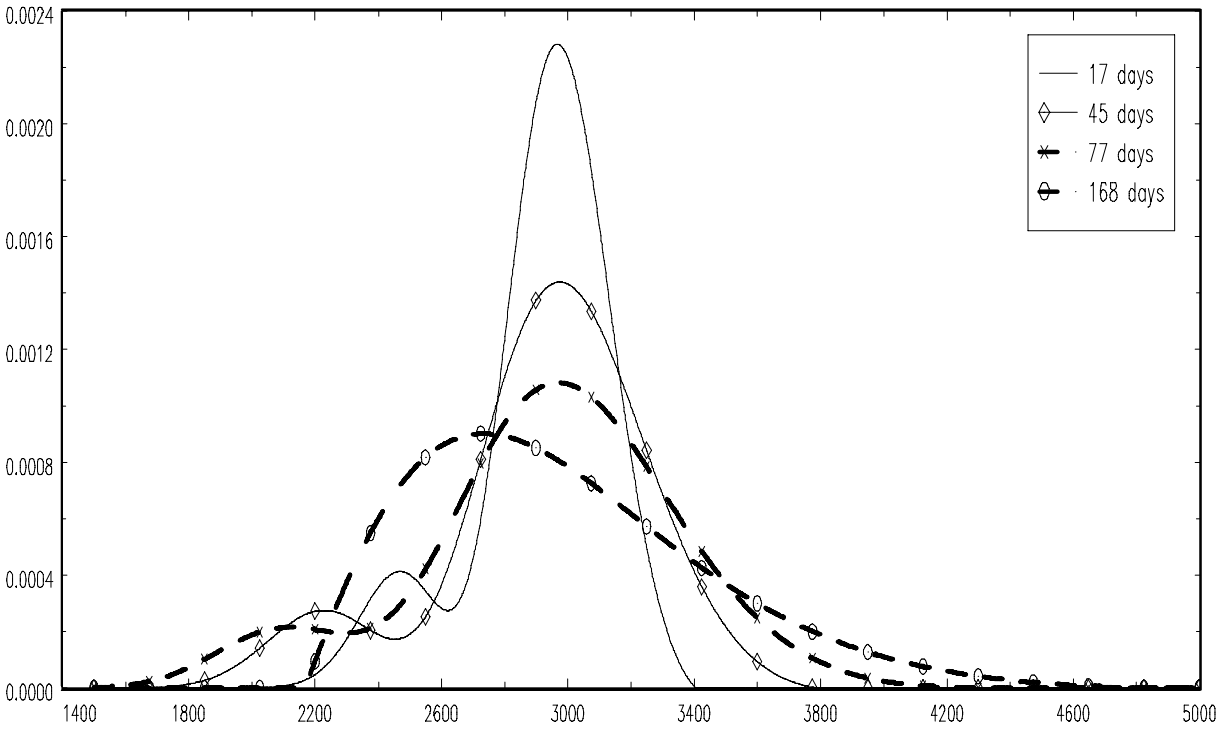


Figure 2.13.d: DNR du rendement du CAC 40 avec un developpement d'Edgeworth
pour la date du 980113



4.2.2 Développement en polynômes d'Hermite

Le modèle

Madan and Milne (1994) puis Abken, Madan and Ramamurtie (1996) proposent un développement en polynômes d'Hermite autour de la densité. Madan and Milne (1994) supposent que la densité neutre au risque de la variable Z, définie par :

$$Z = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ln(\frac{S_T}{S_t}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\right] \tag{4.8}$$

peut s'écrire comme le produit d'une densité de changement de mesure et d'une densité de référence $n(z)$:

$$\widetilde{q}^{\mathrm{HER}}(z) = \upsilon(z)n(z). \tag{4.9}$$

Dans notre cas particulier, on choisira pour $n(z)$ la distribution gaussienne de moyenne nulle et de variance unité. Aux hypothèses (2)-(7), on ajoute :

Hypothèse 9 *L'ensemble de tous les actifs contingents est assez riche pour former un espace de Hilbert séparable et pour lequel il existe une base orthonormale. Les marchés sont supposés complets.*

Hypothèse 10 *Sous la mesure de référence, le prix de l'actif évolue comme un brownien géométrique*

$$S_T = S_t \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma\sqrt{\tau}Z] \tag{4.10}$$

où Z est une variable normale standard de moyenne nulle, de variance unitaire.

Un système orthonormal pour l'espace de Hilbert des fonctions de S de carré intégrable, et donc de z, par rapport à P, est alors donné par les polynômes d'Hermite $\phi_p(z)$ pour $p = 0, ..., \infty$[3].

Le prix d'un call européen est donné par :

[3] Le polynôme d'Hermite d'ordre k est défini comme suit :

$$\phi_k(z) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}}\frac{\partial^k n(z)}{\partial z^k}\frac{1}{n(z)},$$
$$< \phi_k, \phi_j >= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k(z)\phi_j(z)n(z)dz = \begin{cases} = 0 \text{ if } j \neq k \\ = 1 \text{ if } j = k. \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
C_{\mathrm{e}}^{\mathrm{HER}}(t,S_t,K,T) &= e^{-r_t(T)\tau}\int_0^{\infty} c(z,S_t,K,\sigma,T)\widetilde{q}^{\mathrm{HER}}\,(z)\,dz \\
&= e^{-r_t(T)\tau}\int_0^{\infty} c(z,S_t,K,\sigma,T)\widetilde{q}^{\mathrm{HER}}\,(z)\,dz \\
&= e^{-r_t(T)\tau}\int_0^{\infty} c(z,S_t,K,\sigma,T)\upsilon(z)n(z)dz,
\end{aligned}
$$

avec

$$
c(z,S_t,K,\sigma,T) = \left(S_t\exp[(r_t(T)-d_t(T)-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau+\sigma\sqrt{\tau}z]-K\right)^+.
$$

Toutes les fonctions peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire des termes de la base, en particulier le payoff de l'option et $\upsilon(z)$:

$$
\begin{aligned}
c(z,S_t,K,\sigma,T) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\phi_k(z) \\
\upsilon(z) &= \sum_{j=0}^{+\infty} b_j\phi_j(z),
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
C_{\mathrm{e}}^{\mathrm{HER}}(t,S_t,K,T) &= e^{-r_t(T)\tau}\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\phi_k(z)\sum_{j=0}^{+\infty}b_j\phi_j(z)n(z)dz \\
&= e^{-r_t(T)\tau}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}a_kb_j\int_0^{\infty}\phi_k(z)\phi_j(z)n(z)dz \\
&= e^{-r_t(T)\tau}\sum_{k=0}^{+\infty}a_kb_k.
\end{aligned}
$$

où par définition

$$
a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} c(z,S_t,K,\sigma,T)\phi_k(z)n(z)dz. \tag{4.11}
$$

La densité risque neutre des prix est donnée par

$$
\widetilde{q}^{\mathrm{HER}}(z) = \upsilon(z)n(z) = n(z)\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(z)b_k. \tag{4.12}
$$

D'un point de vue pratique, on est amené à tronquer arbitrairement la somme jusqu'à un ordre L_b. La densité (4.12) peut alors prendre des valeurs négatives pour certaines

valeurs de b_k, $k = 0, 1, ...L_b$. Balistkaia and Zolotuhina (1988) donnent les contraintes de positivité quand $L_b = 6$ et Jondeau et Rockinger (2000a) explicitent le domaine de définition de la skewness et de la kurtosis pour assurer la positivité de la densité et donnent une astuce pour mettre en œuvre les contraintes de positivité quand $L_b = 4$.

La densité du sous-jacent, $q^{\mathrm{HER}}(x)$, s'écrit :

$$q^{\mathrm{HER}}(x) = q^{\mathrm{BS}}(x, \sigma) P_{L_b}(\eta) \tag{4.13}$$

$$\eta = \frac{\ln(x) - \left[\ln(S_t) + \left(r_t(T) - d_t(T) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]}{\sigma\sqrt{\tau}}, \tag{4.14}$$

où $q^{\mathrm{BS}}(x)$ est donnée par (4.20).

Dans le cas où $L_b = 4$[4], on a

$$P_4(\eta) = \left[b_0 - \frac{b_2}{\sqrt{2}} + \frac{3b_4}{\sqrt{24}} + (b_1 - \frac{3b_3}{\sqrt{6}})\eta + (\frac{b_2}{\sqrt{2}} - \frac{6b_4}{\sqrt{24}})\eta^2 + \frac{b_3}{\sqrt{6}}\eta^3 + \frac{b_4}{\sqrt{24}}\eta^4\right], \tag{4.15}$$

et dans le cas où $L_b = 6$, on a

$$P_6(\eta) = \left[b_0 - \frac{b_2}{\sqrt{2}} + \frac{3b_4}{\sqrt{24}} + (b_1 - \frac{3b_3}{\sqrt{6}})\eta + (\frac{b_2}{\sqrt{2}} - \frac{6b_4}{\sqrt{24}})\eta^2 + \frac{b_3}{\sqrt{6}}\eta^3 + \frac{b_4}{\sqrt{24}}\eta^4\right]. \tag{4.16}$$

On peut choisir d'estimer b_k, $k = 1, ..., 4$ où l'on peut procéder comme Abken, Madan and Ramamurtie (1996) en imposant $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ et n'estimer que σ, b_k, $k = 3, ..., L_b$ (L'annexe B page 176 donne les restrictions imposées sur b_0, b_1, b_2 et les contraintes de positivité sur les autres paramètres).

Le moments de la densité d'Hermite

Si F_T suit une loi de la forme (4.13), la densité du rendement jusqu'à maturité $x_T = \ln(F_T/F_t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2\tau}\right] \left[\left(1 + \frac{3b_4}{\sqrt{24}}\right) - \frac{3b_3}{\sqrt{6}}y - \frac{6b_4}{\sqrt{24}}y^2 + \frac{b_3}{\sqrt{6}}y^3 + \frac{b_4}{\sqrt{24}}y^4\right], \\ y &= x + \frac{1}{2}\sigma^2\tau \end{aligned}$$

[4] On donne en annexe B les calculs pour dériver les contraintes de positivité lorsque $L_b = 4$, ainsi que les restrictions applicables à b_0, b_1 et b_2.

et les moments de x_T jusqu'à l'ordre 4 sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\text{esp}(x_T) &= -\frac{1}{2}\sigma^2\tau, \\
\text{var}(x_T) &= \sigma^2\tau, \\
\text{skew}(x_T) &= \sqrt{6}b_3, \\
\text{kurt}(x_T) &= 3 + \sqrt{24}b_4.
\end{aligned}$$

Les densités obtenues avec un développement en polynômes d'Hermite sont visibles sur les figures (2.14.a) à (2.14.d). On peut faire les remarques que dans le cas d'un développement d'Edgeworth, à savoir que ce modèle permet à la fois la présence d'asymétrie et de kurtosis marquées.

Figure 2.14.a: DNR du taux PIBOR avec les developements en polynomes d'Hermite
pour la date du 970421

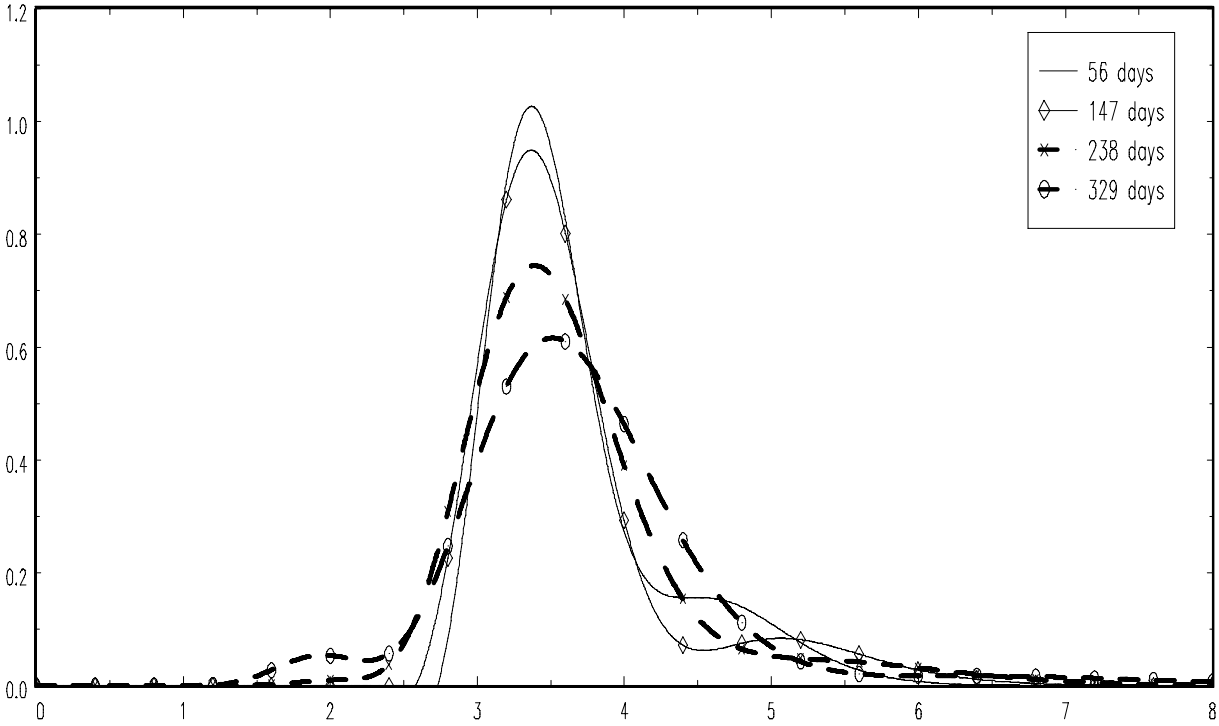


Figure 2.14.b: DNR du taux PIBOR avec les developements en polynomes d'Hermite
pour la date du 970526

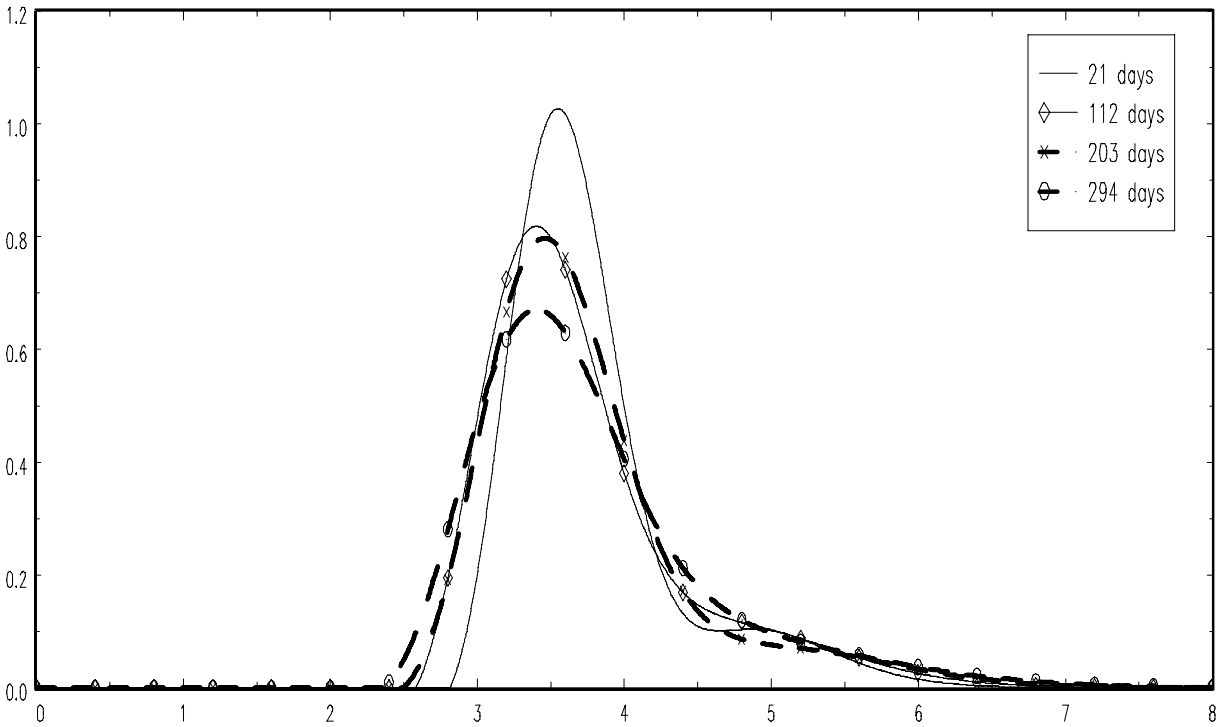


Figure 2.14.c: DNR du taux PIBOR avec les developements en polynomes d'Hermite
pour la date du 970602

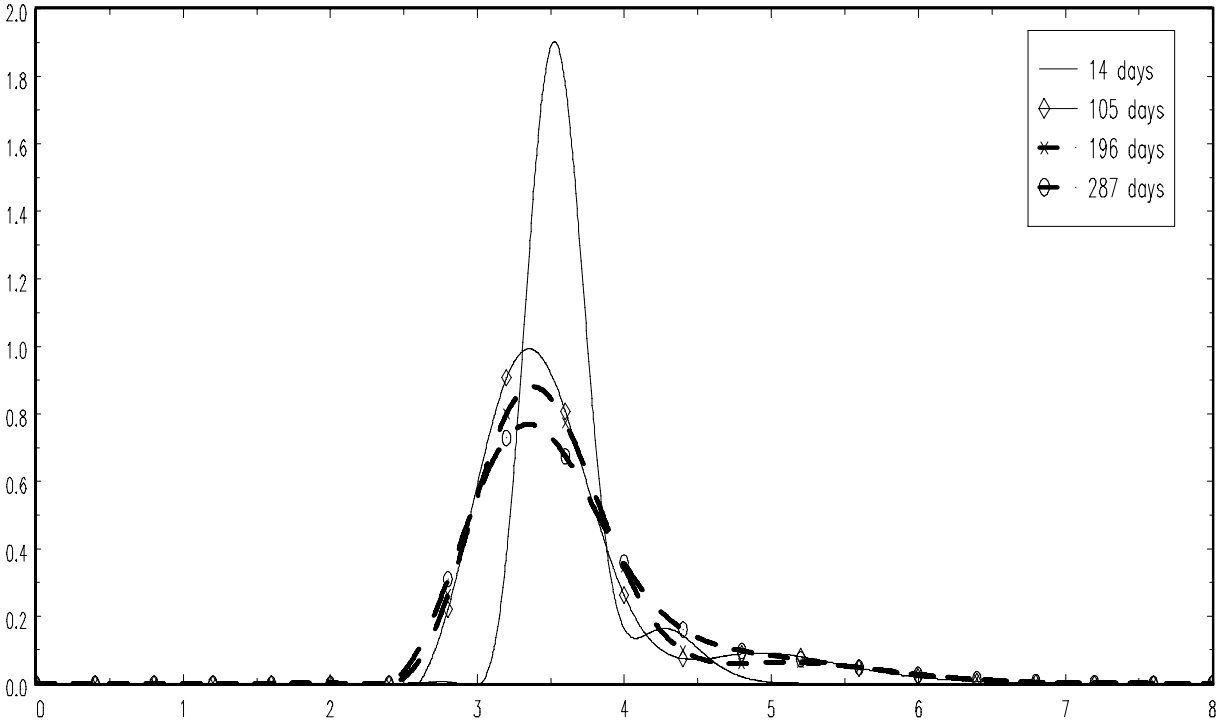
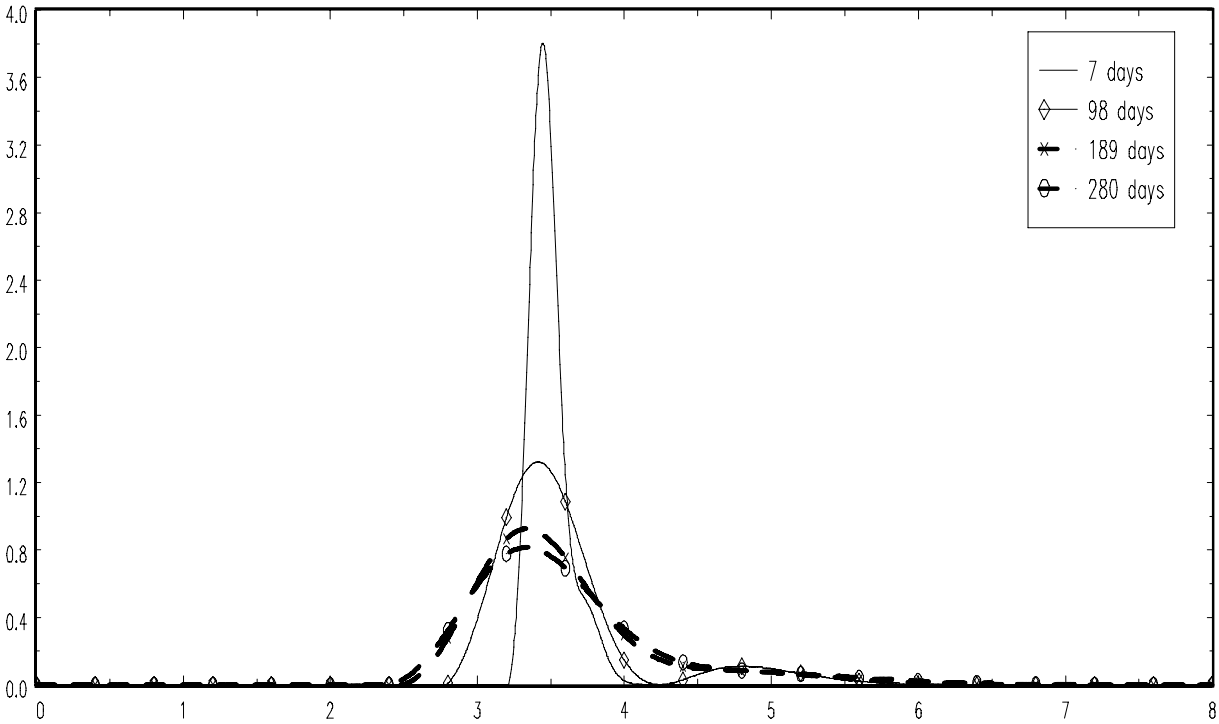


Figure 2.14.d: DNR du taux PIBOR avec les developements en polynomes d'Hermite
pour la date du 970609



Chapitre 5

Comparaison des méthodes

5.1 Méthode d'estimation et critères de qualité

Chaque modèle est estimé de façon différente. Une même procédure d'estimation, l'estimation par minimisation des moindres carrés non linéaires (MCNL), est cependant utilisée pour les modèles paramétriques. Cette méthode rassemble les modèles suivants : le modèle de Black ou Benchmark (BE), le mélange de lois lognormales (MLN), le modèle à sauts de Bates (JMP), les modèles de développements en série d'Hermite (HE) et d'Edgeworth (ED), et pour finir le modèle à volatilité stochastique d'Heston (SV). Si $\widehat{C_i}$ désigne le prix associé au i-ème strike pour une date d'échéance donnée et C_i le i-ème prix théorique calculé avec le modèle que l'on cherche à estimer, on doit résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\widehat{\theta} = \min_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^{m} \left(C_i - \widehat{C_i} \right)^2, \tag{5.1}$$

où m est le nombre de prix d'options observés et Θ le domaine de définition du vecteur θ des paramètres à estimer. La méthode numérique de minimisation utilisée est la méthode de quasi-newton de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno (BFGS). Le développement de cette méthode est donné en Annexe E. On définit par MSE (Mean Squarred Errors) et ARE (Average Relative Errors) les quantités suivantes :

$$MSE = \frac{10^2}{m-n} \sum_{i=1}^{m} \left(C_i - \widehat{C}_i \right)^2 \tag{5.2}$$

$$ARE = \frac{10^4}{m-n} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{C_i - \widehat{C}_i}{C_i} \right)^2 \tag{5.3}$$

où n est le nombre de paramètres de la méthode. Ces mesures permettent de comparer la capacité des modèles paramétriques à se caler aux données de marché.

Les modèles non paramétriques tels que les arbres implicites de Derman et Kani (DK) et Rubinstein (RUB), le principe du maximum d'entropie (PME) et la méthode du noyau (KER) sont des méthodes exactes. Par conséquent on ne peut pas, pour ces méthodes, calculer les erreurs qui n'apparaîtront pas dans les tableaux de résultats. Le modèle de lissage du smile de Shimko (SH) est un cas à part. En effet, les coefficients du polynômes d'ordre 2 sont obtenus par la régression (3.1) à la page 95, ce modèle ne nécessite donc pas d'optimisation.

Pour comparer les différents modèles, nous devons préciser les critères de performance qui sont les plus importants pour l'objectif que nous avons, à savoir utiliser ce modèle sur des données d'options en série historique. Les critères de performance du modèle retenu sont :

- une convergence rapide en termes de temps de calcul,
- la prise en compte d'éventuelles données aberrantes,
- la stabilité, traduite par une convergence sans difficulté vers le même extremum global, quels que soient les paramètres initiaux choisis pour l'optimisation,
- la construction possible d'options standardisées permettant l'estimation facile de la densité pour une maturité fictive,
- le caractère négligeable des erreurs standardisées (MSE et ARE), signifiant un calage satisfaisant du modèle aux données due marché,
- la facilité d'interprétation des éventuels paramètres.

5.2 Comparaison des modèles sur un événement empirique particulier

Dans cette section, une analyse comparative des différents modèles est mise en œuvre. Dans un premier temps, on procède à une étude comparative théorique des modèles selon la classification décrite dans l'introduction de la seconde partie, dans un second temps on donne les conclusions pour les options sur contrat PIBOR puis les options sur indice CAC 40.

Pour chaque type de données, un événement particulier a été retenu. Concernant le PIBOR, il s'agit d'un événement politique, à savoir les élections anticipées françaises d'avril 1997. La comparaison des méthodes est établie sur 5 dates situées autour de ces

élections, le 14 avril, une semaine avant l'annonce officielle de la dissolution de l'assemblée, le 21 avril, lendemain de l'annonce de la dissolution, le 26 mai, jour suivant le premier tour des élections législatives dont les résultats suggéraient une très probable victoire de l'opposition, le 2 juin, lendemain du second tour, jour de la victoire des partis de gauche, et enfin le 9 juin, une semaine après le second tour. Les résultats décrits ici sont issus de l'article de Coutant, Jondeau et Rockinger (2000).

Concernant le CAC 40, on a préféré s'appuyer sur l'analyse d'un événement de marché plutôt que sur celle d'un événement politique, à savoir la crise russe de 1997. On retient 4 dates relativement éloignées qui englobent la crise, le 14 mars 1997, date précédant de quelques mois le début de la crise que l'on situe en août 1997, le 14 août 1997, jour correspondant au début de la crise, le 15 octobre, date se situant en pleine crise, et le 13 janvier 1998 que l'on considérera comme un relatif retour au calme. On remarquera que le choix du jour est toujours le même, permettant ainsi une comparaison des maturités qui seront les mêmes pour les 4 jours.

Nous comparerons les tableaux des erreurs pour déterminer comment chaque modèle se cale aux données de marché, nous étudierons les tableaux des moments implicites pour observer quelles distributions prennent le mieux en compte les effets d'asymétrie ou de kurtosis. Enfin, nous nous pencherons sur la forme de la densité en tant qu'indicateur des anticipations. La Banque d'Angleterre étudie régulièrement la forme de cette densité implicite pour effectuer des opérations sur le marché monétaire et juger de leur impact et de leur efficacité en observant la modification des anticipations que ces opérations ont entraînée (Bahra (1996)). Ainsi, l'information délivrée par la densité de probabilité peut être utilisée pour apprécier le moment propice à une intervention de la Banque Centrale, dès lors que des tensions anticipées apparaissent dans les prix d'options et conduisent à des formes inhabituelles de densités de probabilité. Par exemple, dans l'éventualité de deux scenarii très différents sur le marché, la courbe de densité de probabilité ferait apparaître d'éventuelles bimodalités.

5.2.1 Résultats des estimations des modèles paramétriques

On montre dans les tableaux (2.1.1) à (4.2.1) l'ensemble des estimations des modèles paramétriques. Ces modèles sont estimés soit sur les 4 dates CAC 40 décrites dans la section précédente à partir des options sur CAC 40, soit sur les 5 dates Pibor à partir des options sur contrat à terme Pibor. Les modèles estimés pour le CAC 40 sont le modèle de référence de Black (une seule lognormale), le modèle à sauts de Bates, le modèle

à volatilité stochastique d'Heston, le lissage de smile de Shimko et le développement d'Edgeworth de Jarrow et Rudd. Les modèles estimés sur le Pibor sont le modèle de référence, le modèle à volatilité stochastique, le mélange de lois lognormales de Melik et Thomas, le développement en polynômes d'Hermite.

Les volatilités implicites obtenues dans les tableaux (2.1.1) et (2.1.2) font appraître deux choses. Premièrement les volatilités obtenues avec Black négligeant l'effet américain sont très proches de celles obtenues avec la formule américaine de Whaley. Deuxièmement, pour chaque jour estimé on voit clairement la présence d'une structure par terme de volatilité souvent inversée et plus marquée sur le CAC 40 que sur le Pibor.

Concernant l'estimation du modèle à sauts sur le CAC 40 dans le tableau (2.2), une première remarque est que la probabilité de saut donnée par la quantité λT est souvent égale à 0 ou 1. Une seconde remarque est la taille du saut qui est le plus souvent négative. Si un saut est prévu alors il est plus probable qu'il soit à la baisse qu'à la hausse. Le paramètre w_1 qui caractérise le caractère américain de l'option n'est différent de 0 et 1 qu'à trois reprises.

Dans les tableaux (2.3.1) et (2.3.2), l'effet américain avec un modèle à volatilité stochastique pour le CAC 40 semble avoir plus d'influence que pour le contrat Pibor. Le paramètre de volatilité de long-terme, à l'exception de quelques maturités qui semblent ne pas avoir convergé est très éloigné de la volatilité courante très proche de 0. Cependant le paramètre de vitesse de retour à la moyenne étant élevé tant pour le CAC 40 que pour le Pibor, on peut conclure à l'existence d'une structure par terme de volatilité très étalée dans le temps. Le signe du paramètre de corrélation ρ indique que les variations du CAC 40 évoluent de façon opposée à la volatilité. Le signe positif entre la variation du taux Pibor et la volatilité doit se lire comme une corrélation positive entre les variations du taux Pibor et la volatilité du taux.

Le R^2 dans le tableau (3.1) montre le pourcentage de smile expliqué par le modèle de lissage par un polynôme quadratique des prix d'exercice. Excepté pour deux maturités ce paramètre est supérieur à $96,5\%$.

Les résultats de l'estimation du mélange de lois lognormales sur le Pibor sont montrés en tableau (4.1). La remarque principale est la nullité du paramètre de poids de l'une des deux lognormales ramenant alors le modèle à une seule lognormale. On peut dès maintenant se demander si ce modèle est bien adapté à des données telles que les contrats de taux d'intérêt.

Si l'on regarde les estimations du développement d'Edgeworth sur le CAC 40 en ta-

bleau (4.2.1), on constate que l'effet américain peut être totalement négligé puisque le paramètre w_1 est la plupart du temps égal à 1. La négativité du paramètre de skewness du prix de l'indice indique que les anticipations sont plutôt à la baisse qu'à la hausse du prix du CAC 40 pour un horizon correpondant à la maturité de l'option.

La même remarque s'applique pour la skewness du taux Pibor présentée en tableau (4.2.2). Le signe positif de celle-ci indique des anticipations plus à la hausse des taux qu'à la baisse des taux.

Tableau 2.1.1 : Paramètre de volatilité implicite estimé avec les types européen et américain (Whaley (1987)) sur le CAC

	T	σ^{EUR}	σ^{AME}
970314	17	$0,175$	$0,175$
	47	$0,196$	$0,196$
	77	$0,203$	$0,203$
	108	$0,212$	$0,211$
970814	15	$0,254$	$0,253$
	47	$0,264$	$0,264$
	78	$0,263$	$0,262$
	139	$0,266$	$0,265$
971015	16	$0,235$	$0,235$
	44	$0,231$	$0,231$
	77	$0,240$	$0,239$
980113	17	$0,324$	$0,324$
	45	$0,315$	$0,314$
	77	$0,304$	$0,303$
	168	$0,351$	$0,349$

Tableau 2.1.2 : Paramètre de volatilité implicite estimé avec les types européen et américain (Whaley (1987)) sur le PIBOR

	T	σ^{EUR}	σ^{AME}
970414	63	$0,123$	$0,123$
	154	$0,135$	$0,136$
	245	$0,176$	$0,178$
	336	$0,202$	$0,203$
970421	56	$0,411$	$0,412$
	147	$0,287$	$0,288$
	238	$0,249$	$0,251$
	329	$0,248$	$0,250$
970526	21	$0,617$	$0,617$
	112	$0,327$	$0,327$
	203	$0,244$	$0,246$
	294	$0,237$	$0,239$
970602	14	$0,399$	$0,399$
	105	$0,314$	$0,315$
	196	$0,244$	$0,246$
	287	$0,220$	$0,222$
970609	7	$0,266$	$0,266$
	98	$0,260$	$0,260$
	189	$0,231$	$0,232$
	280	$0,214$	$0,216$

Tableau 2.2 : Paramètres du modèle à sauts estimés sur le CAC

	T	σ	λ	$\ln(1+\overline{k})$	δ	λT	w_1
970314	17	$0,165$	$0,027$	$-4,605$	$0,432$	$0,001$	$1,000$
	47	$0,111$	$7,688$	$-0,025$	$0,055$	$0,990$	$1,000$
	77	$0,143$	$1,349$	$-0,081$	$0,104$	$0,285$	$0,000$
	108	$0,132$	$0,798$	$-0,106$	$0,173$	$0,236$	$1,000$
970814	15	$0,225$	$1,663$	$-0,102$	$0,000$	$0,068$	$0,000$
	47	$0,134$	$7,688$	$-0,023$	$0,084$	$0,990$	$1,000$
	78	$0,172$	$4,633$	$-0,050$	$0,085$	$0,990$	$0,758$
	139	$0,185$	$2,600$	$-0,045$	$0,112$	$0,990$	$0,484$
971015	16	$0,168$	$14,451$	$-0,037$	$0,025$	$0,633$	$1,000$
	44	$0,129$	$8,212$	$-0,065$	$0,024$	$0,990$	$1,000$
	77	$0,171$	$4,693$	$-0,063$	$0,057$	$0,990$	$0,969$
980113	17	$0,147$	$12,194$	$-0,068$	$0,061$	$0,568$	$1,000$
	45	$0,178$	$3,631$	$-0,128$	$0,084$	$0,448$	$1,000$
	77	$0,031$	$4,693$	$-0,133$	$0,058$	$0,990$	$1,000$
	168	$0,000$	$2,151$	$-0,112$	$0,236$	$0,990$	$1,000$

Tableau 2.3.1 : paramètres du modèle d'Heston estimés sur le PIBOR

	T	a	κ^*	θ^*	γ	ρ	V	w_1
970414	63	$0,226$	$4,973$	$0,045$	$0,473$	$0,998$	$0,000$	$0,584$
	154	$0,123$	$2,692$	$0,046$	$0,497$	$0,478$	$0,000$	$0,977$
	245	$0,190$	$4,298$	$0,044$	$0,312$	$0,865$	$0,000$	$0,811$
	336	$0,231$	$5,525$	$0,042$	$0,378$	$0,763$	$0,021$	$0,416$
970421	56	$2,128$	$4,988$	$0,427$	$1,729$	$0,877$	$0,046$	$0,611$
	147	$0,672$	$4,508$	$0,149$	$1,160$	$0,853$	$0,001$	$0,037$
	238	$0,197$	$0,098$	$2,010$	$0,628$	$0,492$	$0,001$	$0,975$
	329	$0,308$	$3,993$	$0,077$	$0,477$	$0,751$	$0,001$	$0,699$
970526	21	$13,747$	$4,996$	$2,752$	$3,595$	$1,000$	$0,008$	$0,531$
	112	$0,259$	$0,552$	$0,469$	$0,720$	$0,757$	$0,076$	$0,034$
	203	$0,418$	$4,233$	$0,098$	$0,534$	$0,946$	$0,000$	$0,216$
	294	$0,333$	$4,758$	$0,070$	$0,471$	$0,845$	$0,005$	$0,500$
970602	14	$7,985$	$5,070$	$1,575$	$3,995$	$0,737$	$0,026$	$0,652$
	105	$1,006$	$4,501$	$0,224$	$0,862$	$1,000$	$0,000$	$0,005$
	196	$4,602$	$4,602$	$1,000$	$0,532$	$0,997$	$0,000$	$0,757$
	287	$4,830$	$4,830$	$1,000$	$0,436$	$0,941$	$0,006$	$0,498$
970609	98	$0,771$	$4,959$	$0,155$	$1,242$	$0,915$	$0,001$	$0,096$
	189	$0,202$	$0,423$	$0,478$	$0,635$	$0,655$	$0,006$	$0,965$
	280	$0,291$	$4,912$	$0,059$	$0,439$	$0,985$	$0,001$	$0,486$

Tableau 2.3.2 : paramètres du modèle d'Heston estimés sur le CAC

	T	a	κ^*	θ^*	γ	ρ	V	w_1
970314	17	$1,553$	$9,176$	$0,169$	$0,925$	$-0,552$	$0,000$	$0,959$
	47	$1,264$	$20,120$	$0,063$	$1,590$	$-0,430$	$0,001$	$0,944$
	77	$0,603$	$8,408$	$0,072$	$1,098$	$-0,435$	$0,007$	$0,951$
	108	$0,339$	$5,504$	$0,062$	$0,784$	$-0,746$	$0,024$	$0,830$
970814	15	$3,730$	$10,071$	$0,370$	$1,738$	$-0,031$	$0,000$	$1,000$
	47	$1,599$	$8,711$	$0,184$	$1,519$	$-0,263$	$0,001$	$0,999$
	78	$0,939$	$5,759$	$0,163$	$1,020$	$-0,464$	$0,009$	$0,816$
	139	$28,337$	$425,377$	$0,067$	$7,524$	$-0,628$	$0,003$	$0,985$
971015	16	$1,372$	$3,665$	$0,374$	$0,881$	$-0,610$	$0,031$	$0,999$
	44	$0,358$	$9,929$	$0,036$	$0,463$	$-0,905$	$0,068$	$0,717$
	77	$0,291$	$3,472$	$0,084$	$0,763$	$-0,478$	$0,049$	$0,936$
980113	17	$13,040$	$97,991$	$0,133$	$4,007$	$-0,066$	$0,051$	$1,000$
	45	$1,196$	$5,803$	$0,206$	$1,547$	$-0,771$	$0,080$	$1,000$
	77	$1,350$	$10,058$	$0,134$	$0,899$	$-0,982$	$0,049$	$0,674$

Tableau 3.1 : Coefficients du polynôme 2 estimés avec le style américain pour Shimko sur le CAC

	T	a_0	$a_1 \times 10^{-4}$	$a_2 \times 10^{-7}$	w_1	R^2
970314	17	$5,046$	$-35,552$	$6,470$	$1,000$	$98,1\%$
	47	$1,148$	$-6,212$	$0,982$	$1,000$	$99,5\%$
	77	$1,007$	$-5,327$	$0,846$	$1,000$	$98,8\%$
	108	$0,629$	$-2,456$	$0,302$	$1,000$	$98,8\%$
970814	15	$2,555$	$-15,108$	$2,469$	$1,000$	$87,7\%$
	47	$1,006$	$-4,493$	$0,665$	$1,000$	$97,5\%$
	78	$0,741$	$-2,620$	$0,337$	$0,726$	$99,9\%$
	139	$0,660$	$-2,315$	$0,328$	$0,5342$	$96,5\%$
971015	16	$1,700$	$-8,288$	$1,131$	$1,000$	$99,1\%$
	44	$0,615$	$-1,187$	$-0,028$	$0,000$	$99,5\%$
	77	$0,547$	$-1,161$	$0,038$	$0,596$	$99,9\%$
980113	17	$1,347$	$-3,769$	$0,082$	$1,000$	$72,4\%$
	45	$1,122$	$-3,555$	$0,269$	$1,000$	$99,9\%$
	77	$0,519$	$0,250$	$-0,329$	$0,000$	$99,9\%$
	168	$0,576$	$-0,706$	$-0,077$	$1,000$	$100,0\%$

Tableau 4.1 : Paramètre du modèle de mélange de lois lognormales sur le PIBOR

	T	π	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	w_1
970414	63	$0,923$	$1,190$	$1,336$	$0,083$	$0,025$	$1,000$
	154	0.963	$1,216$	$1,491$	$0,109$	$0,114$	$1,000$
	245	$0,824$	$1,212$	$1,435$	$0,124$	$0,174$	$1,000$
	336	$1,000$	$1,274$	$1,607$	$0,182$	$4,757$	$1,000$
970421	56	$0,435$	$1,383$	$1,230$	$0,465$	$0,159$	$1,000$
	147	$0,000$	$1,728$	$1,263$	$6,598$	$0,215$	$0,000$
	238	$0,000$	$1,489$	$1,275$	$0,100$	$0.,243$	$1,000$
	329	$0,000$	$1,481$	$1,290$	$0,016$	$0,243$	$1,000$
970526	21	$0,236$	$1,488$	$1,274$	$0,705$	$0,339$	$1,000$
	112	$0,695$	$1,234$	$1,480$	$0,177$	$0,324$	0.991
	203	$0,000$	$1,531$	$1,308$	$0,267$	$0,240$	$0,999$
	294	$0,000$	$1,579$	$1,309$	$0,258$	$0,239$	$0,000$
970602	14	$0,823$	$1,259$	$1,383$	$0,256$	$0,518$	$1,000$
	105	$0,669$	$1,215$	$1,397$	$0,136$	$0,399$	$0,996$
	196	$0,869$	$1,228$	$1,572$	$0,161$	$0,258$	$0,983$
	287	$0,000$	$1,516$	$1,285$	$0,128$	$0,215$	$1,000$
970609	98	$0,792$	$1,230$	$1,415$	$0,122$	$0,399$	$0,996$
	189	$0,000$	$1,480$	$1,265$	$0,197$	$0,227$	$1,000$
	280	$0,000$	$1,480$	$1,272$	$0,060$	$0,210$	$1,000$

Tableau 4.2.1 : Paramètres du modèle d'Edgeworth estimés sur le CAC

	T	σ	ISK	IKT	w_1
970314	17	$0,179$	$-0,374$	$0,782$	$1,000$
	47	$0,198$	$-0,458$	$0,721$	$1,000$
	77	$0,198$	$-0,586$	$0,432$	$0,000$
	108	$0,209$	$-0,951$	$1,073$	$0,000$
970814	15	$0,257$	$-0,247$	$0,480$	$0,000$
	47	$0,274$	$-0,336$	$1,275$	$0,000$
	78	$0,263$	$-0,181$	$-0,152$	$0,000$
	139	$0,274$	$-0,084$	$0,958$	$0,000$
971015	16	$0,237$	$-0,470$	$0,244$	$0,000$
	44	$0,229$	$-0,443$	$-0,383$	$1,000$
	77	$0,228$	$-0,360$	$-0,346$	$1,000$
980113	17	$0,330$	$-1,286$	$0,101$	$1,000$
	45	$0,322$	$-0,982$	$0,000$	$0,000$
	77	$0,313$	$-0,615$	$0,000$	$0,000$
	168	$0,449$	$-2,781$	$2,024$	$0,000$

Tableau 4.2.2 : Paramètres du modèle des polynômes d'Hermite estimés sur le PIBOR

	T	σ	b_3	b_4	w_1
970414	63	$0,125$	$0,483$	$0,517$	$0,813$
	154	$0,136$	$0,268$	$0,446$	$1,000$
	245	$0,165$	$0,376$	$0,074$	$1,000$
	336	$0,173$	$0,508$	-0.200	$1,000$
970421	56	$0,350$	$0,758$	-0.104	$1,000$
	147	$0,255$	$0,684$	$0,281$	$0,813$
	238	$0,242$	$0,309$	$0,352$	$0,011$
	329	$0,255$	$0,011$	$0,534$	$0,813$
970526	21	$0,567$	$0,618$	$0,197$	$1,000$
	112	$0,295$	$0,569$	$0,006$	$0,001$
	203	$0,232$	$0,465$	$0,207$	0.000
	294	$0,215$	$0,408$	$0,057$	$0,000$
970602	14	$0,399$	$0,461$	$0,406$	$1,000$
	105	$0,288$	$0,676$	$0,263$	$0,998$
	196	$0,234$	$0,460$	$0,362$	$0,999$
	287	$0,199$	$0,454$	$0,103$	$0,000$
970609	7	$0,260$	$0,469$	$0,154$	$0,813$
	98	$0,247$	$0,699$	$0,575$	$0,013$
	189	$0,216$	$0,481$	$0,208$	$0,814$
	280	$0,197$	$0,452$	$0,171$	$0,000$

5.2.2 Taux

Dans les tableaux (5.2.1) et (5.2.2), on compare les MSE et les ARE pour les options sur contrat PIBOR pour les cinq dates précisées ci-dessus. Les MSE doivent être plus grandes si les prix sont plus grands et permettent la comparaison des diverses méthodes pour un type d'option donné. Les ARE permettent la comparaison pour plusieurs ensembles de données en reliant l'erreur au niveau des prix d'options. Le tableau (5.2.1) ne montre pas les erreurs pour la méthode du maximum d'entropie et celle de Rubinstein, puisque ces méthodes sont des méthodes *exactes* par construction et les erreurs associées sont donc nulles. On remarque que les erreurs pour le modèle de référence (BE) sont supérieures à celles des autres modèles et l'on peut en conclure que ce modèle donne un assez mauvais calage pour les options de taux d'intérêt. Le calage apparaît meilleur pour le mélange de lois lognormales tout en restant plutôt non sastifaisant. Enfin, le calage devient réellement satisfaisant pour le modèle de développement en polynômes d'Hermite.

Tournons-nous maintenant vers les tableaux (5.2.3) à (5.2.5) qui montrent les variances, skewness et excès de kurtosis du taux à terme PIBOR. Si les valeurs des moments d'ordre 3 et 4 varient d'une méthode à l'autre, la façon dont ils évoluent à travers les maturités est la même pour les méthodes d'Hermite et d'Heston, mais différente pour la méthode du maximum d'entropie. Par exemple, il semble y avoir une baisse systématique de la kurtosis pour les options de maturité assez éloignée. Si, comme on l'a défini dans la première partie, on peut associer à la volatilité un incertain économique général et à la kurtosis l'occurrence d'un événement extrême quant à une variation extrême du sous-jacent, le maximum d'entropie suggère une telle variation dans le court terme alors que Hermite conduit plutôt à une forte variation à la suite des élections dans un plus long terme.

Une étude plus poussée montre que, pour le jour calme du 14 avril 1997, la volatilité implicite augmente avec la maturité, alors que la skewness et la kurtosis diminuent. Cela implique qu'une variation du taux d'intérêt, qui pourrait être considérée comme extrême sur un horizon de temps court, deviendrait en fait normale sur un horizon plus long.

Enfin on note, pour l'ensemble des jours et des maturités, que l'asymétrie est toujours positive et surtout nettement supérieure à celle de la lognormale, impliquant que les opérationnels du marché anticipent plutôt une hausse du taux d'intérêt qu'une baisse à n'importe quel horizon donné.

On compare ensuite les différentes méthodes en traçant sur les figures (2.15.a) à

(2.15.d) les densités neutres au risque pour les dates du 14 avril au 26 mai 1997. Le résultat essentiel qui ressort de ces graphiques est le décalage entre la densité lognormale et les autres densités. Il apparaît également que les distributions issues des modèles (autres que le modèle lognormal) ont des formes plus similaires sur des maturités courtes que longues, éventuellement pour des raisons de liquidité.

Concernant le maximum d'entropie, on note que cette méthode présente des pics, conséquence directe de sa façon d'être construite.

Pour conclure avec la comparaison empirique des modèles pour le taux PIBOR, on sera surpris de la préférence de nombreuses institutions pour le mélange de lois lognormales malgré les nombreuses difficultés que présente cette méthode dans la détermination d'un optimum global, méthode dans laquelle en effet les résidus sont plus élevés que pour les méthodes d'Hermite et d'Heston. En réponse aux requêtes faites en section (5.1), concernant les qualités que doit présenter un bon modèle, il apparaît que le modèle de développement en polynômes d'Hermite répond à la plupart des points. En effet, il converge rapidement et correctement vers un minimum global de façon stable, la présence de points aberrants ne perturbe pas le modèle et les densités pour une maturité inconnue sont faciles à construire par interpolation des paramètres du modèle qui ont une signification et une structure par termes.

5.2.3 Indices

On s'intéresse maintenant aux résultats obtenus sur le CAC 40. De même que pour le PIBOR, les MSE dans le tableau (5.2.6) sont nettement plus élevées pour la lognormale (BE). Lorsque la MSE n'apparaît pas, c'est que le nombre de prix à disposition est inférieur au nombre de paramètres du modèle à estimer. La méthode qui présente les plus petites erreurs de façon générale est le modèle à sauts de Bates. Si l'on regarde plus en détails, ce modèle est plus performant pour les dates du 14 août 1997 et du 13 janvier 1998. La première peut s'expliquer par le début de la crise russe. La seconde, que l'on avait sélectionnée comme un exemple de date exempte de toute agitation et de retour au calme, laisse penser que les marchés pourraient s'agiter dans les mois qui suivent, peut-être avec le début de la crise asiatique. En ce qui concerne la performance des modèles utilisés, pour la date du 14 mars 1997, on reste partagé entre le processus à sauts et Edgeworth et pour la date du 5 octobre, entre le processus à sauts et Shimko. On note sur cette dernière des MSE relativement élevées de façon générale, indiquant qu'un polynôme du second degré est insuffisant pour expliquer le comportement du smile

de volatilité. Bliss (2000) propose un polynôme du troisième degré avec une contrainte sur la courbure.

Le tableau (5.2.8) montre les écart-types du prix. On observe la présence d'une structure par terme des écart-types qui augmentent avec la maturité. Le tableau (5.2.9) des skewness les montre toutes négatives, exceptées celles du benchmark. Ceci indique que les investisseurs anticipent, dans un contexte neutre au risque une baisse, quel que soit le marché, que celui-ci se trouve dans une période calme ou dans une période agitée. Les investisseurs sont perpétuellement pessimistes sur les variations futures des cours. On n'observe pas de nette structure par terme du moment d'ordre 3, ce qui devrait rendre plus difficile l'interpolation de ce moment pour une maturité quelconque. L'observation du tableau (5.2.10) des kurtosis montre que le modèle à sauts et le modèle à volatilité stochastique sont tous les deux de nature à permettre une bonne anticipation de fortes variations des cours futurs grâce à des kurtosis élevées pour les dates des 14 mars et 14 août. On constate que les coefficients d'aplatissement les moins élevés se situent à la date du 15 octobre 1997 en pleine crise, indicateur que les acteurs du marché croient à un retour au calme au moment où la crise se fait le plus sentir.

On compare maintenant la capacité des différentes méthodes à décrire le sous-jacent de l'option en analysant les graphiques des densités neutres au risque des figures (2.16.a) à (2.16.d). Le biais entre la loi lognormale et les autres densités augmente progressivement entre le 14 mars 1997 et le 13 janvier 1998. On note une discontinuité de la distribution avec la méthode de Shimko, probablement due à une discontinuité du smile. On peut en conclure que cette méthode n'autorise pas les éventuels prix "mal cotés". Les 14 août 1997 et 13 janvier 1998 mettent en évidence une densité légèrement bimodale. Sans aucun calcul de skewness ou kurtosis, on voit clairement ici que les investisseurs mettent plus de poids sur des cours plus bas et donc anticipent une baisse des cours à un horizon de 45 jours qui représente la maturité de l'option. Encore une fois, grâce à la différence marquée entre la distribution lognormale et les autres densités à la date supposée calme du 13 janvier 1998, on constate que le marché est pessimiste sur un horizon de 45 jours, probablement en raison de l'extension de la crise asiatique.

Tableaux de résultats pour le PIBOR. Les modèles représentés sont les suivants[1] :

- BE pour une diffusion lognormale
- MLN pour le mélange de lognormales
- HE pour le développement en polynômes d'Hermite
- PME pour le principe du maximum d'entropie
- RUB pour l'arbre implicite de Rubinstein
- SV pour le modèle à volatilité stochastique d'Heston

[1] La présence de trous dans les tableaux s'explique par l'impossibilité d'estimer les paramètres du modèle lorsque le nombre de paramètres à estimer est supérieur au nombre de prix observés disponibles.

Tableau 5.2.1 : MSE$\times 10^2$ pour le PIBOR

Date	**T**	**nbK**	**BE**	**MLN**	**HE**	**SV**
970414	63	3	0,85			
	154	7	18,58	0,00	0,00	
	245	8	61,61	0,01	0,00	
	336	6	1,86		0,00	
970421	56	4	0,54			
	147	6	12,07		0,00	
	238	8	57,95	0,17	0,00	0,03
	329	6	3,02		0,00	
970526	21	6	1,27		0,00	
	112	8	0,58	0,01	0,00	0,00
	203	7	77,88	0,36	0,00	0,00
	294	8	7,98	0,12	0,00	0,00
970602	14	6	1,63		0,00	
	105	8	10,77	0,00	0,00	0,01
	196	8	104,55	0,00	0,00	0,02
	287	8	22,56	0,2	0,00	0,00
970609	7	2				
	98	7	7,59	0,00	0,00	0,06
	189	7	95,34	0,34	0,00	0,00
	280	8	8,60	0,22	0,00	0,00

Tableau 5.2.2 : ARE$\times 10^4$ pour le PIBOR

Date	T	nbK	BE	MLN	HE	SV
970414	63	3	211,52			
	154	7	250,70	0,41	3,86	783,60
	245	8	274,330	0,02	0,20	69,03
	336	6	60,56		0,04	3,76
970421	56	4	13,29			
	147	6	83,79		0,01	
	238	8	151,27	23,54	0,04	4,01
	329	6	44,85		0,04	
970526	21	6	65,94		0,15	
	112	8	79,33	0,56	0,02	0,03
	203	7	387,94	47,65	0,06	1,00
	294	8	64,53	21,37	0,19	0,07
970602	14	6	113,00		1,21	
	105	8	58,92	0,12	0,15	0,04
	196	8	727,26	0,01	0,05	3,58
	287	8	60,62	31,69	0,10	0,31
970609	7	2				
	98	7	65,53	0,18	0,11	4,79
	189	7	1076,78	39,32	0,08	0,18
	280	8	60,90	43,91	0,28	0,73

Tableau 5.2.3 : Ecart-types implicites pour le PIBOR

Date	**T**	**BE**	**MLN**	**HE**	**PME**	**RUB**	**SV**
970414	63	0,17	0,18	0,18	0,24	0,18	0,30
	154	0,30	0,32	0,31	0,42	0,33	0,32
	245	0,52	0,52	0,52	0,43	0,55	0,53
	336	0,72	0,64	0,71	1,02	0,72	0,72
970421	56	0,60	0,60	0,62	0,39	0,74	0,62
	147	0,67	0,49	0,70	0,54	0,73	0,69
	238	0,75	0,72	0,78	0,41	0,83	0,75
	329	0,90	0,87	0,88	0,66	0,95	0,85
970526	21	0,57	0,59	0,59	0,35	0,67	0,61
	112	0,69	0,70	0,72	0,47	0,71	0,71
	203	0,69	0,68	0,73	0,40	0,75	0,72
	294	0,82	0,82	0,82	0,57	0,84	0,80
970602	14	0,28	0,30	0,30	0,36	0,30	0,33
	105	0,62	0,65	0,66	0,58	0,68	0,70
	196	0,66	0,70	0,70	0,41	0,71	0,69
	287	0,73	0,71	0,73	0,66	0,76	0,76
970609	7	0,13	0,14	0,13	0,20	0,14	
	98	0,49	0,54	0,53	0,61	0,59	0,56
	189	0,60	0,59	0,63	0,43	0,64	0,63
	280	0,69	0,67	0,70	0,47	0,72	0,72

Tableau 5.2.4 : Skewness implicites du PIBOR

Date	**T**	**BE**	**MLN**	**HE**	**PME**	**RUB**	**SV**
970414	63	0,15	1,31	1,36	−0,17	1,75	2,29
	154	0,27	1,57	1,14	0,35	1,53	1,44
	245	0,44	1,30	1,07	0,07	1,27	1,27
	336	0,60	0,53	0,77	−0,45	1,18	0,96
970421	56	0,49	1,56	0,72	−1,35	0,74	1,68
	147	0,56	0,41	1,49	−1,20	2,23	1,83
	238	0,62	0,60	1,63	0,04	1,00	1,50
	329	0,73	0,68	1,28	−0,13	1,38	1,27
970526	21	0,45	1,78	1,24	−1,20	3,66	1,05
	112	0,55	1,49	1,09	−1,43	1,56	1,61
	203	0,56	0,54	1,48	−0,04	1,68	1,29
	294	0,66	0,64	1,26	0,28	1,23	1,37
970602	14	0,23	1,63	1,39	0,20	1,53	1,63
	105	0,52	1,93	1,42	−1,23	2,61	1,09
	196	0,55	1,89	1,74	−0,01	1,54	1,28
	287	0,60	0,58	1,31	0,22	1,48	1,30
970609	7	0,11	4,09	0,38	−0,36	0,23	
	98	0,41	2,51	1,68	−1,27	3,61	1,55
	189	0,51	0,50	1,42	0,09	1,47	1,80
	280	0,58	0,56	1,42	0,15	1,89	1,38

Tableau 5.2.5 : Kurtosis implicites du PIBOR

Date	T	BE	MLN	HE	PME	RUB	SV
970414	63	3,04	4,88	5,90	2,83	8,02	51,26
	154	3,13	8,06	6,00	3,34	8,70	10,93
	245	3,35	5,69	4,68	3,48	7,00	6,57
	336	3,64	3,50	3,56	2,76	6,41	5,57
970421	56	3,43	6,14	3,48	6,30	8,77	8,48
	147	3,56	3,31	5,73	4,48	9,51	8,57
	238	3,70	3,62	7,00	3,46	6,75	7,04
	329	3,98	3,70	7,04	2,58	6,39	5,35
970526	21	3,36	7,27	5,05	6,15	24,44	7,06
	112	3,55	5,71	4,55	5,80	6,11	7,11
	203	3,56	3,52	5,92	3,50	7,22	6,05
	294	3,78	3,65	5,10	2,85	4,84	5,67
970602	14	3,10	7,17	5,77	3,94	6,13	19,35
	105	3,48	7,87	5,55	4,45	16,64	7,34
	196	3,54	8,11	6,96	3,47	6,02	6,35
	287	3,66	3,59	5,35	3,17	6,31	6,47
970609	7	3,02		3,35	3,16	8,48	
	98	3,30	11,65	6,48	4,65	22,57	10,82
	189	3,46	3,44	5,73	3,53	5,97	8,89
	280	3,60	3,56	5,75	4,33	11,77	6,67

Tableaux de résultats pour le CAC. Les modèles représentés sont les suivants :

- BE pour une diffusion lognormale
- SH pour le lissage de smile
- JMP pour un processus à sauts
- ED pour le développement d'Edgeworth
- KER pour la l'estimation par les noyaux
- DK pour l'arbre Derman et Kani
- SV pour le modèle à volatilité stochastique d'Heston

Tableau 5.2.6 : MSE$\times 10^2$ pour le CAC

Date	**T**	**NbK**	**BE**	**SH**	**JMP**	**ED**	**SV**
970314	17	23	457,36	163,25	**63,07**	272,77	291,08
	47	20	2307,15	273,04	296,86	**240,48**	279,08
	77	6	3708,05	193,33	21,64	**10,48**	
	108	9	15237,38	3927,67	**59,93**	72,49	2662,34
970814	15	25	366,00	64,97	68,37	**19,11**	342,06
	47	22	2669,85	429,80	**75,86**	166,41	428,56
	78	7	2993,75	**29,34**	31,92	47,52	417,45
	139	10	4445,12	402,98	**365,57**	664,35	9352,82
971015	16	23	810,21	**17,92**	27,11	43,20	32,16
	44	14	3573,88	97,03	**34,67**	64,86	64,92
	77	9	7918,00	**31,46**	608,56	84,05	580,28
	167	2	3993,22				
980113	17	28	8841,77	1525,05	**97,60**	299,62	9818,80
	45	18	20361,60	178,98	**66,05**	233,93	162,77
	77	6	9749,56	447,46	**347,99**	789,22	

Tableau 5.2.7 : ARE$\times 10^4$ pour le CAC

Date	**T**	**NbK**	**BE**	**SH**	**JMP**	**ED**	**SV**
970314	17	23	441, 19	70, 35	100, 85	**58, 62**	100, 80
	47	20	195, 81	**1, 33**	8, 74	5, 68	5, 08
	77	6	60, 32	0, 64	0, 08	**0, 04**	
	108	9	257, 87	6, 24	**0, 82**	1, 90	47, 65
970814	15	25	436, 56	**178, 50**	352, 71	344, 76	1533, 52
	47	22	69, 143	**5, 33**	8, 89	5, 44	8, 79
	78	7	37, 28	0, 23	**0, 16**	14, 68	6, 25
	139	10	6, 71	0, 95	**0, 73**	2, 19	10, 73
971015	16	23	3487, 22	**60, 30**	73, 66	240, 16	78, 59
	44	14	1199, 20	**4, 03**	19, 21	54, 02	18, 43
	77	9	459, 37	**0, 58**	5708, 85	1, 00	18, 18
980113	17	28	40253, 51	745, 84	**111, 97**	13472, 67	82492, 67
	45	18	6800, 88	3, 15	**0, 01**	5, 82	38, 94
	77	6	56, 68	0, 87	**0, 00**	5, 07	

Tableau 5.2.8 : écart-types implicites pour le CAC

Date	**T**	**BE**	**SH**	**JMP**	**ED**	**SV**	**KER**
970314	17	99, 93	109, 19	94, 36	101, 98	105, 10	232, 87
	47	185, 95	190, 87	188, 54	188, 21	196, 01	192, 72
	77	245, 84	258, 41	244, 39	240, 64	248, 76	242, 89
	108	301, 89	288, 11	293, 06	299, 26	302, 81	291, 15
970814	15	150, 23	179, 56	142, 64	152, 29	152, 48	178, 80
	47	277, 69	300, 99	271, 98	284, 93	284, 25	313, 74
	78	357, 09	373, 97	362, 75		363, 56	378, 26
	139	484, 95	869, 87	495, 79	489, 50	480, 20	444, 56
971015	16	147, 13	153, 41	148, 49	148, 56	148, 88	160, 98
	44	240, 54	245, 84	240, 55	242, 47	243, 91	251, 55
	77	331, 17	329, 88	375, 54	322, 63	323, 30	336, 07
980113	17	203, 48	212, 88	211, 70	207, 03	236, 00	204, 96
	45	322, 35	341, 91	329, 28	330, 06	335, 02	352, 15
	77	409, 81	427, 20	391, 95	1326, 21	414, 11	368, 93

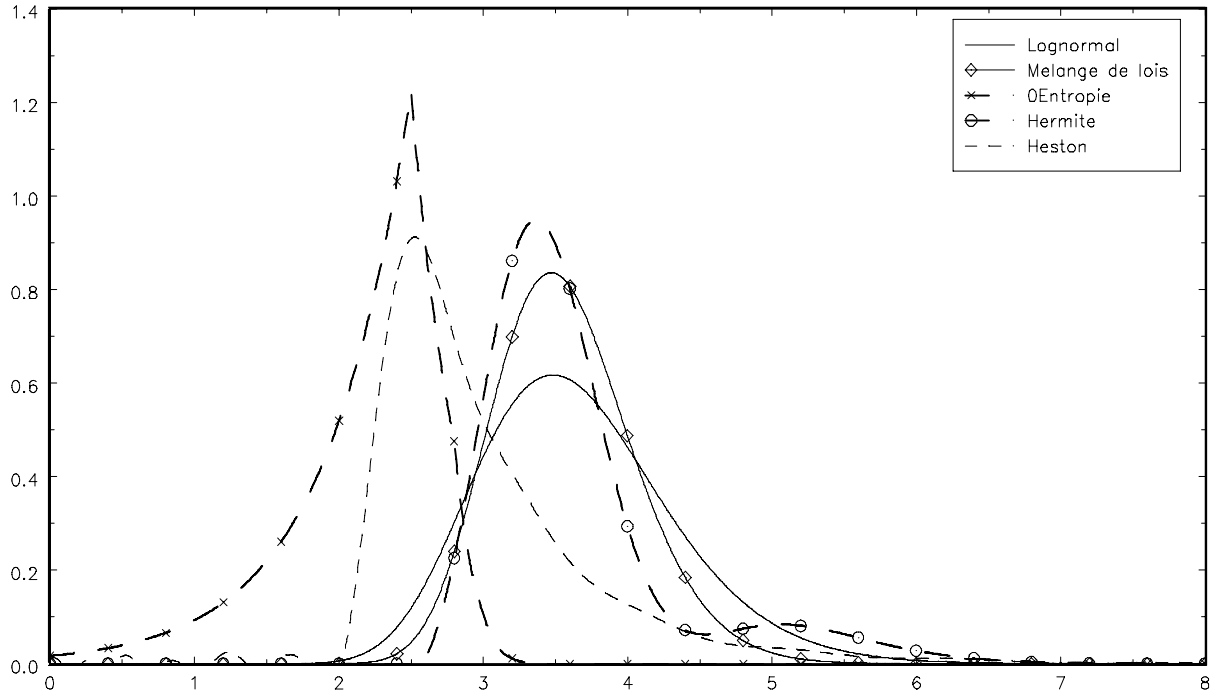
Tableau 5.2.9 : skewness implicites pour le CAC

Date	**T**	**BE**	**SH**	**JMP**	**ED**	**SV**	**KER**
970314	17	$0,11$	$-1,38$	$0,21$	$-0,37$	$-0,01$	$-1,35$
	47	$0,21$	$-0,61$	$-0,35$	$-0,46$	$-0,10$	$-0,65$
	77	$0,28$	$-0,82$	$-0,52$	$-0,59$	$-0,22$	$0,22$
	108	$0,35$	$-0,25$	$-0,37$	$-0,95$	$0,10$	$-0,51$
970814	15	$0,15$	$-1,15$	$0,25$	$-0,25$	$-0,19$	$-1,10$
	47	$0,29$	$-0,78$	$-0,12$	$-0,27$	$-0,10$	$-0,89$
	78	$0,37$	$-0,50$	$-0,13$	$-1,20$	$-0,13$	$-0,58$
	139	$0,50$	$-1,19$	$0,58$	$0,07$	$0,44$	$0,47$
971015	16	$0,15$	$-0,86$	$-0,44$	$-0,47$	$-0,43$	$-1,06$
	44	$0,24$	$-0,22$	$-0,43$	$-0,50$	$-0,48$	$-0,64$
	77	$0,33$	$-0,24$	$0,84$	$-0,46$	$-0,39$	$-0,56$
980113	17	$0,21$	$-0,89$	$-1,10$	$-1,29$	$-0,59$	$-0,66$
	45	$0,33$	$-0,88$	$-0,76$	$-0,98$	$-0,69$	$-0,96$
	77	$0,42$	$0,96$	$-0,75$	$-0,51$	$-0,45$	$3,00$

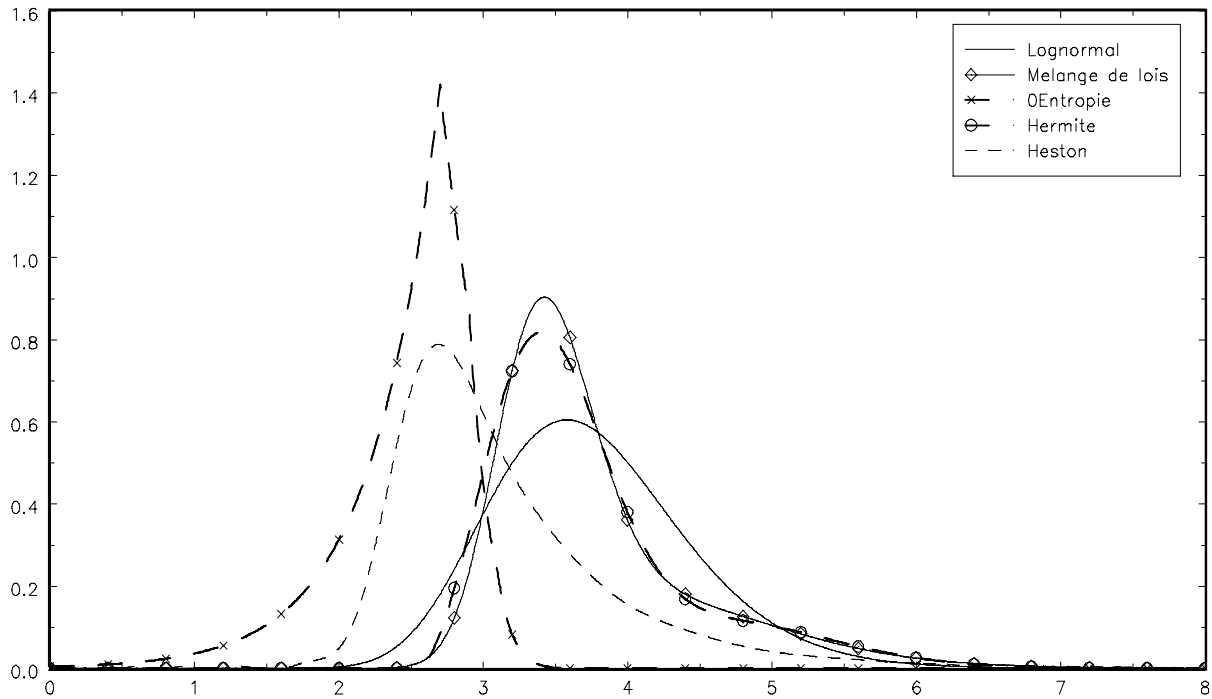
Tableau 5.2.10 : kurtosis implicites pour le CAC

Date	**T**	**BE**	**SH**	**JMP**	**ED**	**SV**	**KER**
970314	17	3,02	5,60	3,04	3,78	13,64	2,10
	47	3,08	3,32	3,96	3,72	7,90	2,96
	77	3,14	2,91	4,28	3,43	5,60	3,05
	108	3,21	2,98	5,27	4,07	6,78	2,78
970814	15	3,04	3,19	3,06	3,48	4,05	2,96
	47	3,15	3,19	5,15	4,07	4,42	2,85
	78	3,24	2,79	3,41	6,58	3,50	2,69
	139	3,44	1,68	4,51	3,78	4,05	2,70
971015	16	3,04	3,73	3,49	3,24	3,96	3,42
	44	3,10	2,95	3,17	3,00	3,55	3,00
	77	3,20	3,03	4,18	3,00	3,52	2,79
980113	17	3,08	2,93	4,60	3,10	9,22	2,85
	45	3,20	3,58	3,69	3,00	4,49	3,00
	77	3,32	3,25	2,88	15,98	3,29	3,43

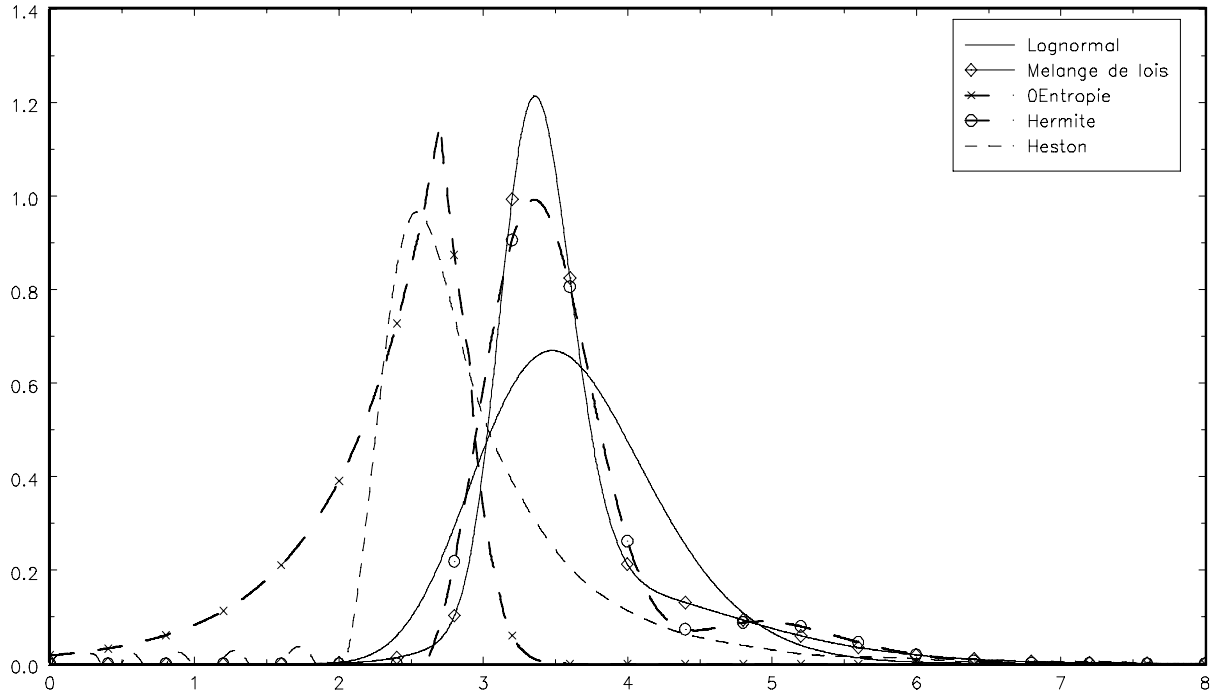
DNR du taux PIBOR pour plusieurs methodes
pour la date du 970421 et une maturite de 147 jours



DNR du taux PIBOR pour plusieurs methodes
pour la date du 970526 et une maturite de 112 jours



DNR du taux PIBOR pour plusieurs methodes
pour la date du 970602 et une maturite de 105 jours



DNR du taux PIBOR pour plusieurs methodes
pour la date du 970609 et une maturite de 98 jours

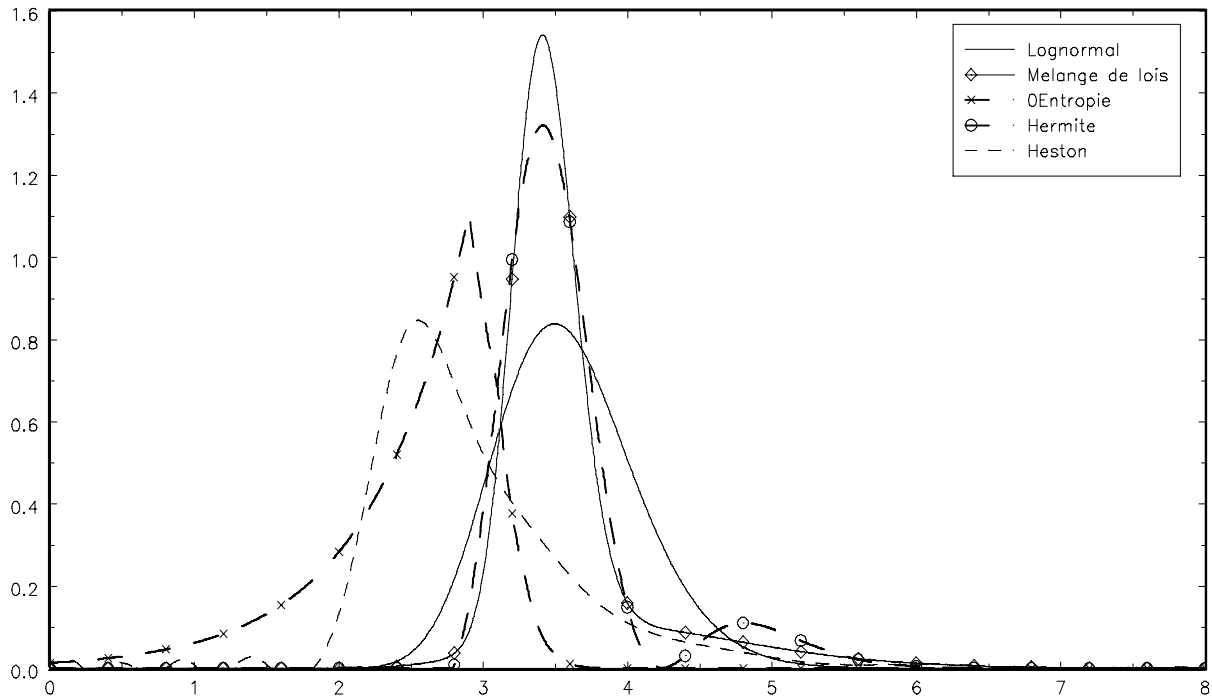


Figure 2.16.a: DNR du CAC 40 pour plusieurs methodes
pour la date du 970314 et une maturite de 47 jours

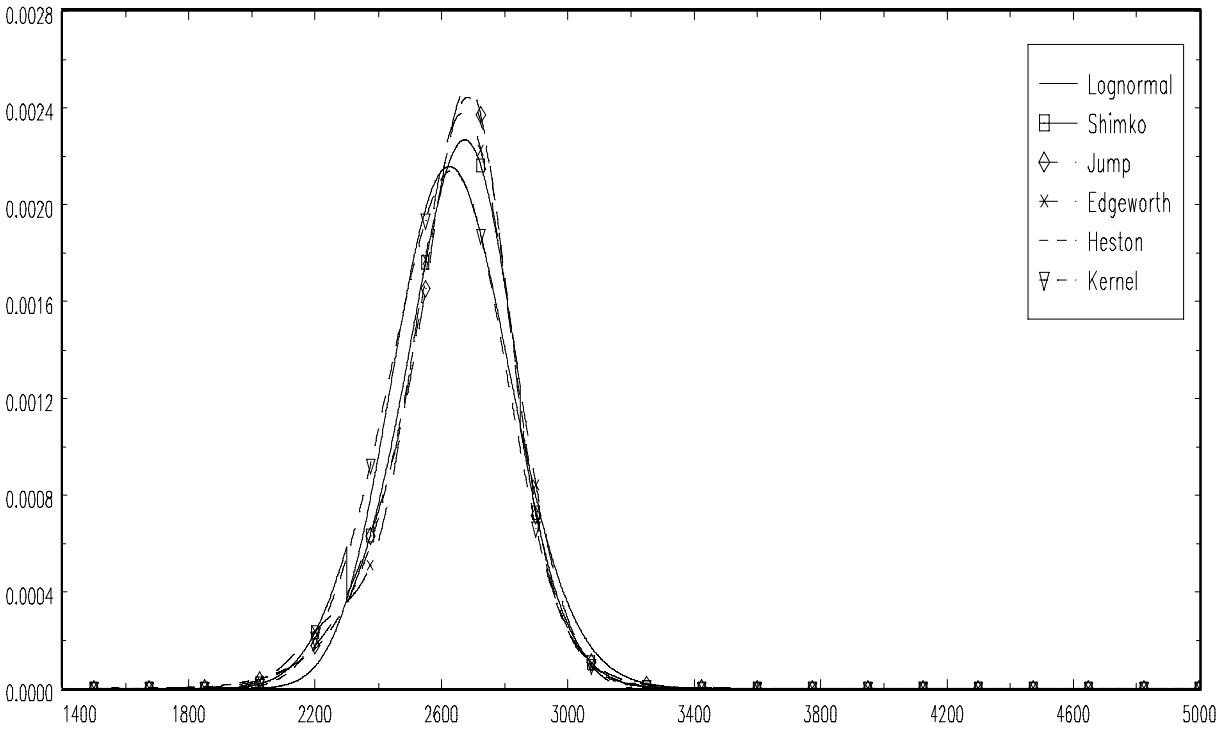


Figure 2.16.b: DNR du CAC 40 pour plusieurs methodes
pour la date du 970814 et une maturite de 47 jours

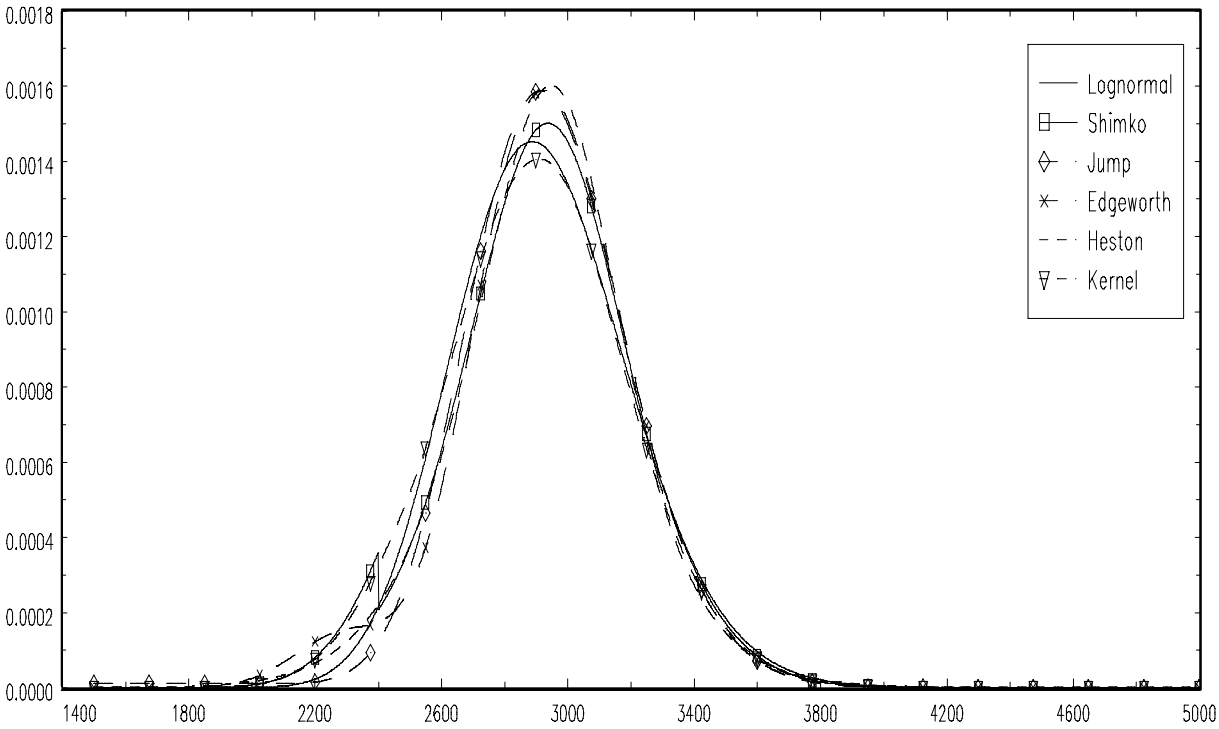


Figure 2.16.c: DNR du CAC 40 pour plusieurs methodes
pour la date du 971015 et une maturite de 44 jours

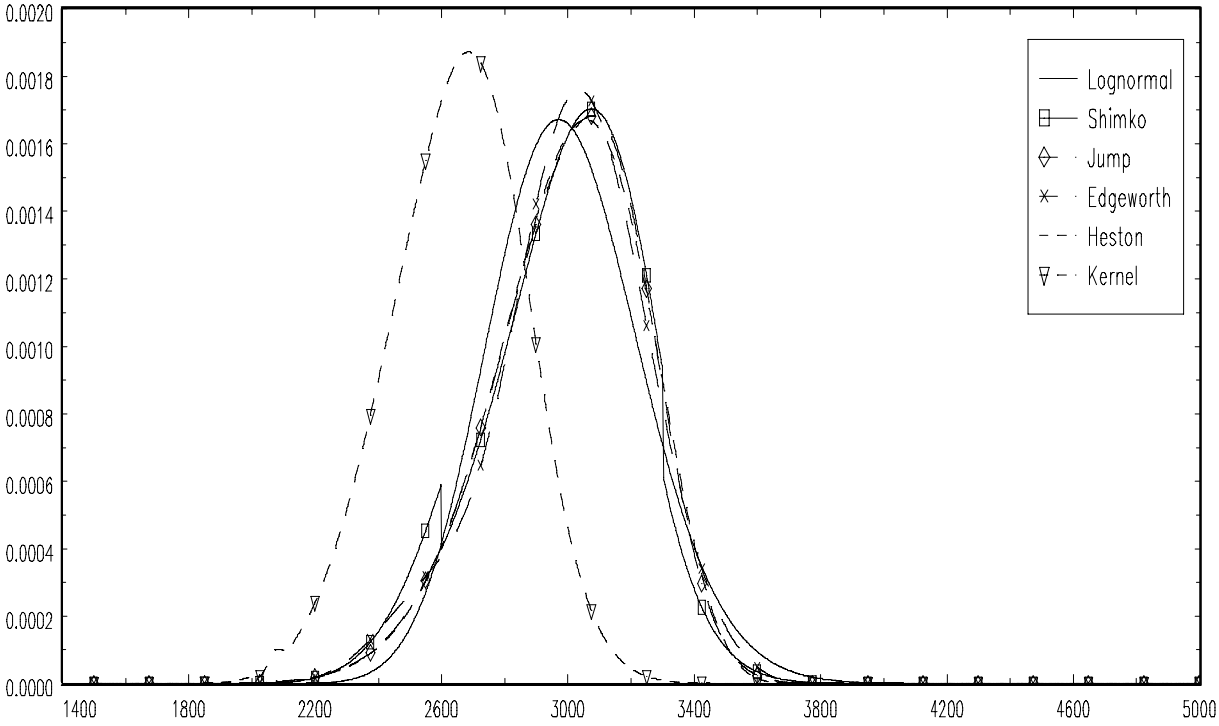
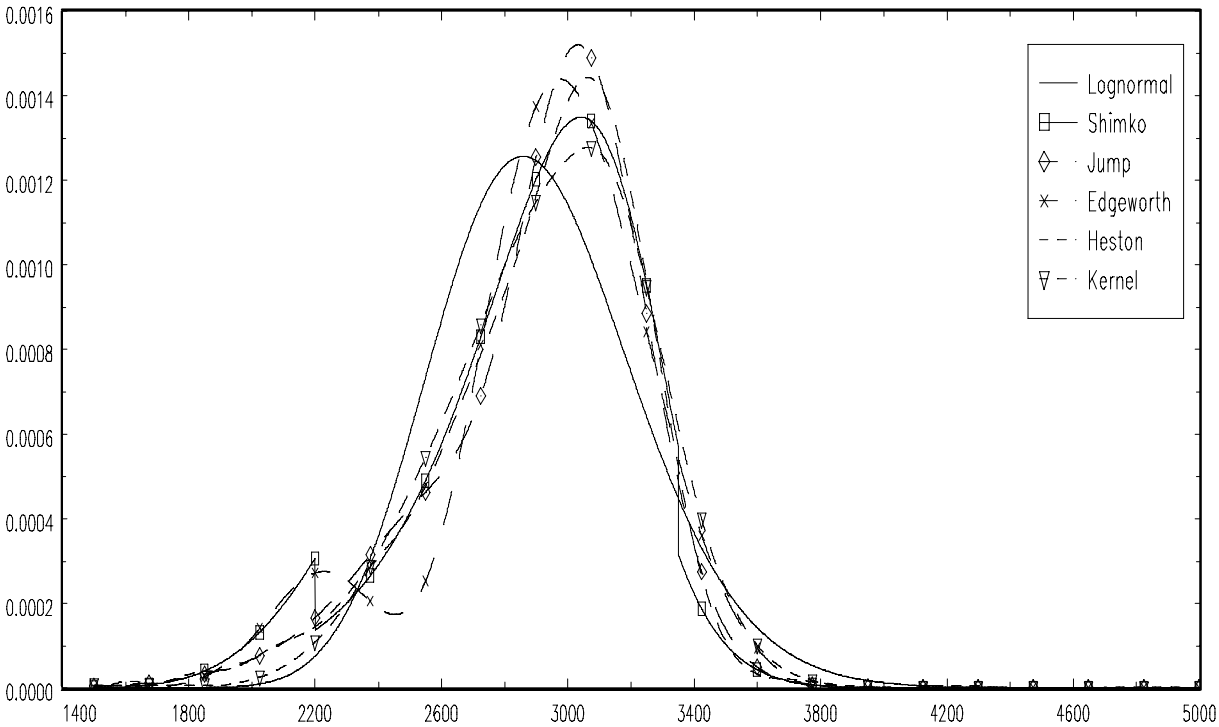


Figure 2.16.d: DNR du CAC 40 pour plusieurs methodes
pour la date du 980113 et une maturite de 45 jours



Annexes de la partie II

Annexe A : prix d'un call américain avec la méthode de Barone-Adesi et Whaley

On suppose que l'actif suit un mouvement brownien géométrique

$$dS = S\left(rdt + \sigma dW_t\right) \tag{5.4}$$

où σ est la volatilité du prix de l'actif et W un mouvement brownien standard.

En supposant qu'on peut construire un portefeuille sans risque à l'aide uniquement de l'option et de son sous-jacent, l'équation stochastique différentielle suivie par le prix de l'option est donnée par :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + bS\frac{\partial V}{\partial S} - rV + \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{5.5}$$

On rappelle que le prix d'une option est notée $C(t, S, K, T)$ de façon générale ; on notera en particulier $C^e(t, S, K, T)$ lorsque l'option est européenne et $C^a(t, S, K, T)$ lorsqu'elle est américaine.

L'équation (5.5), s'appliquant aux options européennes et américaines, s'applique également à la prime d'exercice anticipé qui peut s'écrire comme

$$\varepsilon_C(S, T) = C^a(t, S, K, T) - C^e(t, S, K, T). \tag{5.6}$$

L'équation différentielle vérifiée par (5.6) est donnée par

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S^2} + bS\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} - r\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0. \tag{5.7}$$

Pour plus de clarté, deux simplifications sont faites. Au lieu de considérer le temps t depuis aujourd'hui jusqu'à la maturité de l'option, on considère le temps $\tau = T - t$ de l'échéance de l'option à aujourd'hui. De plus, on multiplie l'équation (5.7) par la quantité $\frac{2}{\sigma^2}$; on obtient pour (5.7), en notant $M = 2r/\sigma^2$ et $N = 2b/\sigma^2$:

$$S^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S^2} - M\varepsilon + NS\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} - \frac{M}{r}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = 0. \tag{5.8}$$

Whaley fait l'hypothèse que la prime d'exercice peut s'écrire comme le produit d'une fonction du temps par une fonction du strike et du sous-jacent

$$\varepsilon_C(S, G) = G(\tau) f(S, G). \tag{5.9}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} &= G(\tau)\frac{\partial f}{\partial S}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S^2} &= G(\tau)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}, \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} &= \frac{\partial G}{\partial \tau} f + G(\tau)\frac{\partial G}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial G}.
\end{aligned}$$

En substituant ces dérivées dans l'équation (5.8), et en factorisant par G, on obtient après simplification :

$$S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + NS\frac{\partial f}{\partial S} - \frac{M}{G} f - (1 - G)M\frac{\partial f}{\partial G} = 0. \tag{5.10}$$

L'approximation arrive à ce stade des calculs dans l'équation (5.10) sur le dernier terme du membre de gauche. Pour des options de maturités très courtes (resp. très longues),

$\frac{\partial f}{\partial G}$ tend vers 0 (resp. G tend vers 1), et le terme $(1-K)M\frac{\partial f}{\partial G}$ disparaît. Le dernier terme de l'équation (5.10) disparaît et celle-ci devient :

$$S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + NS\frac{\partial f}{\partial S} - \frac{M}{G}f = 0. \tag{5.11}$$

Cette équation est une équation différentielle ordinaire du second ordre qui admet deux solutions indépendantes de la forme aS^q. En substituant cette solution dans (5.11), on trouve :

$$aS^q\left[q^2 + (N-1)q - \frac{M}{G}\right] = 0, \tag{5.12}$$

dont les racines sont

$$q_1 = \frac{1}{2}\left[-(N-1) - \sqrt{(N-1)^2 + 4\frac{M}{G}}\right], \tag{5.13}$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\left[-(N-1) + \sqrt{(N-1)^2 + 4\frac{M}{G}}\right]. \tag{5.14}$$

Puisque $M/G > 0$, on a $q_1 < 0$ et $q_2 > 0$.

La solution générale de (5.11) est donnée par

$$f(S) = a_1 S^{q_1} + a_2 S^{q_2}. \tag{5.15}$$

où il reste à déterminer a_1 et a_2. Lorsque le prix du support approche 0, le prix de l'option doit tendre vers 0. Comme $q_1 < 0$, on doit donc imposer $a_1 = 0$, pour ne pas avoir $\lim_{S\to 0} C^a(t,S,K,T) = 0$, ce qui nous donne pour le prix du call américain :

$$C^a(t,S,K,T) = C^e(t,S,K,T) + G(T)a_2 S^{q_2}. \tag{5.16}$$

Le prix du call américain doit rester inférieur à $S_t - K$; il existe donc un prix limite S^* au delà duquel le call est égal à $S_t - K$. Ce prix limite est déterminé de façon que le

prix du call américain soit continu et dérivable en S^*, i.e.

$$S^* - K = C^e(t, S^*, K, T) + G(T)a_2 S^{*q_2}, \tag{5.17}$$

$$1 = e^{(b-r)\tau} N(d_1(S^*)) + G(T)q_2 a_2 S^{*q_2-1}, \tag{5.18}$$

$$d_1(S) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left(\ln(\frac{S}{K}) + (b + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau \right) \tag{5.19}$$

La deuxième équation est obtenue par l'égalité des dérivées par rapport à S des deux termes de (5.16). Nous avons donc deux équations qui nous permettent de déterminer les deux inconnues S^* et a_2. En isolant a_2 dans (5.18) et en le substituant dans (5.17), on trouve que S^* est racine de l'équation suivante :

$$S^* - K = C^e(t, S^*, K, T) + \left[1 - e^{(b-r)\tau} N(d_1(S^*))\right] \frac{S^*}{q_2}, \tag{5.20}$$

et a_2 est alors obtenu par :

$$a_2 = \frac{1}{G(T)q_2 S^{*q_2-1}} \left[1 - e^{(b-r)\tau} N(d_1(S^*))\right]. \tag{5.21}$$

En substituant a_2 dans (5.16), on trouve le prix du call américain pour le modèle de Black-Scholes :

$$C^a(t, S, K, T) = C^e(t, S, K, T) + A_2 \left(\frac{S_t}{S^*}\right)^{q_2}, \text{ si } S_t < S^* \tag{5.22}$$

$$C^a(t, S, K, T) = S_t - K, \text{ si } S_t \geq S^*, \tag{5.23}$$

où

$$A_2 = \left[1 - e^{(b-r)\tau} N(d_1(S^*))\right] \frac{S^*}{q_2}. \tag{5.24}$$

On peut obtenir une formule similaire pour le prix du put américain :

$$P^a(t,S,K,T) = P^e(t,S,K,T) + A_1 \left(\frac{S_t}{S^{**}}\right)^{q_1}, \text{ si } S_t > S^{**} \tag{5.25}$$

$$P^a(t,S,K,T) = K - S_t, \text{ si } S_t \leq S^{**}, \tag{5.26}$$

où

$$A_1 = -\left[1 - e^{(b-r)\tau} N(-d_1(S^{**}))\right] \frac{S^{**}}{q_1}. \tag{5.27}$$

et S^{**} est solution de l'équation :

$$K - S^{**} = P^e(t,S^{**},K,T) - \left[1 - e^{(b-r)\tau} N(-d_1(S^{**}))\right] \frac{S^{**}}{q_1}. \tag{5.28}$$

Annexe B : calculs pour Hermite

Prix d'un call européen dans une base de polynômes d'Hermite

Le prix d'un call européen est donné par :

$$C_{\mathrm{e}}^{\mathrm{HER}}(t,S_t,K,T) = e^{-r_t(T)\tau}\int_0^{\infty}\left(F_t\exp[(-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau+\sigma\sqrt{\tau}z]-K\right)^+\widetilde{q}^{\mathrm{HER}}(z)dz$$
$$= e^{-r_t(T)\tau}\int_0^{\infty}\left(F_t\exp[(-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau+\sigma\sqrt{\tau}z]-K\right)^+\upsilon(z)n(z)dz.$$

Toute fonction peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des termes de la base, en particulier $\left(F_t\exp[(-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau+\sigma\sqrt{\tau}z]-K\right)^+$ et $\upsilon(z)$:

$$\left(F_t\exp[(-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau+\sigma\sqrt{\tau}z]-K\right)^+ = \sum_{k=0}^{+\infty}a_k\phi_k(z)$$
$$\upsilon(z) = \sum_{j=0}^{+\infty}b_j\phi_j(z),$$

et donc

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{e}}^{\mathrm{HER}}(t,F_t,K,T,\sigma_t,\theta_t^*) &= e^{-r_t(T)\tau}\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\phi_k(z)\sum_{j=0}^{+\infty}b_j\phi_j(z)n(z)dz \\ &= e^{-r_t(T)\tau}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}a_kb_j\int_0^{\infty}\phi_k(z)\phi_j(z)n(z)dz \\ &= e^{-r_t(T)\tau}\sum_{k=0}^{+\infty}a_kb_k, \end{aligned}$$

où les a_k sont donnés par :

$$a_k = a(k,S_0,x,\mu,\sigma,t) = \frac{\partial^k\Phi(u,S_0,x,\mu,\sigma,t)}{\partial u^k}\rfloor_{u=0}\frac{1}{\sqrt{k!}}$$
$$\Phi(u,S_0,x,\mu,\sigma,t) = S_0\exp(\mu t+\sigma\sqrt{t}z)N(d_1(u))-xN(d_2(u)).$$

Les paramètres $a_{k,t}$ sont explicitement donnés par :

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln(F_t) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau},\\
a_0 &= F_t N(d_1) - KN(d_2),\\
a_1 &= \sigma\sqrt{\tau}F_t N(d_1) + F_t n(d_1) - Kn(d_2),\\
a_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2 F_t N(d_1) + 2\sigma\sqrt{\tau}F_t n(d_1) + F_t n'(d_1) - Kn'(d_2)\right],\\
a_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^3 F_t N(d_1) + 3\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2 F_t n(d_1) + 3\sigma\sqrt{\tau}F_t n'(d_1) + F_t n''(d_1) - Kn''(d_2)\right],\\
a_4 &= \frac{1}{\sqrt{24}}\left[\begin{array}{c}\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^4 F_t N(d_1) + 4\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^3 F_t n(d_1) + 6\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2 F_t n'(d_1)\\ +4\sigma\sqrt{\tau}F_t n''(d_1) + F_t n^{(3)}(d_1) - Kn^{(3)}(d_2)\end{array}\right],
\end{aligned}$$

où $n(.)$ et $N(.)$ sont respectivement la densité de distribution et la fonction de répartition de la loi normale.

Contraintes sur les paramètres du modèle et calcul des moments

On note η_T la variable :

$$\eta_T = \frac{\ln(S_T) - \left[\ln(S_t) + \left(r_t(T) - d_t(T) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Cette variable a pour densité $\widetilde{q}^{\mathrm{HER}}(z)$.

On impose que $\widetilde{q}^{\mathrm{HER}}(z)$ s'intègre à 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{q}^{\mathrm{HER}}(z)dz = 1,$$

qui implique :

$$\beta_0 = 1.$$

On impose que l'espérance de η_T est nulle et que sa variance est égale à 1 sous la

probabilité neutre au risque. Dans ce cas, on a les contraintes suivantes sur β_1 et β_2 :

$$\begin{aligned}
\text{esp}(\eta_T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z\widetilde{q}^{\text{HER}}(z)dz = \beta_1 = 0 \\
\text{var}(\eta_T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z-\text{esp}(z))^2\, \widetilde{q}^{\text{HER}}(z)dz = 1+\sqrt{2}\beta_2+\beta_1 = 1 \\
&\Rightarrow \quad \beta_2 = 0
\end{aligned}$$

La valeur de la skewness est donnée par :

$$\begin{aligned}
\text{skew}(\eta_T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^3\widetilde{q}^{\text{HER}}(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} z^3 n(z) \left[\begin{array}{c} b_0 - \frac{b_2}{\sqrt{2}} + \frac{3b_4}{\sqrt{24}} + (b_1 - \frac{3b_3}{\sqrt{6}})z \\ +(\frac{b_2}{\sqrt{2}} - \frac{6b_4}{\sqrt{24}})z^2 + \frac{b_3}{\sqrt{6}}z^3 + \frac{b_4}{\sqrt{24}}z^4 \end{array} \right] dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} z^3 n(z) \left[(-\frac{3b_3}{\sqrt{6}})z + \frac{b_3}{\sqrt{6}}z^3 \right] dz \\
&= -9\frac{b_3}{\sqrt{6}} + \frac{b_3}{\sqrt{6}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^6 n(z)dz \\
&= \sqrt{6}b_3.
\end{aligned}$$

La valeur de la kurtosis est donnée par :

$$\begin{aligned}
\text{kurt}(\eta_T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^4\widetilde{q}^{\text{HER}}(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} z^4 n(z) \left[\begin{array}{c} b_0 - \frac{b_2}{\sqrt{2}} + \frac{3b_4}{\sqrt{24}} + (b_1 - \frac{3b_3}{\sqrt{6}})z \\ +(\frac{b_2}{\sqrt{2}} - \frac{6b_4}{\sqrt{24}})z^2 + \frac{b_3}{\sqrt{6}}z^3 + \frac{b_4}{\sqrt{24}}z^4 \end{array} \right] dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} z^4 n(z) \left[b_0 + \frac{3b_4}{\sqrt{24}} + (-\frac{6b_4}{\sqrt{24}})z^2 + \frac{b_4}{\sqrt{24}}z^4 \right] dz \\
&= 3 + 9\frac{b_4}{\sqrt{24}} - 90\frac{b_4}{\sqrt{24}} + \frac{b_4}{\sqrt{24}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^8 n(z)dz \\
&= 3 + 9\frac{b_4}{\sqrt{24}} - 90\frac{b_4}{\sqrt{24}} + 105\frac{b_4}{\sqrt{24}} \\
&= 3 + \sqrt{24}b_4
\end{aligned}$$

Contraintes de positivité de la densité

Jondeau et Rockinger (2000a) développent largement la description du domaine de positivité lorsque la distribution est une combinaison linéaire de polynômes d'Hermite jusqu'à l'ordre 4.

La densité $\widetilde{q}^{\mathrm{HER}}(z)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}^{\mathrm{HER}} &= n(z)P_4(z), \\
P_4(z) &= 1 + \frac{s}{6}H_3(z) + \frac{k}{24}H_4(z) \\
H_3(z) &= z^3 - 3z, \\
H_4(z) &= z^4 - 6z^2 + 3, \\
s &= b_3 \text{ et } k = b_4,
\end{aligned}$$

où s et k représentent la skewness et l'excès de kurtosis de $\widetilde{q}^{\mathrm{HER}}(z)$.

Pour que la densité $\widetilde{q}^{\mathrm{HER}}(z)$ soit positive, le polynôme $P_4(z)$ doit être positif pour tout z :

$$1 + \frac{s}{6}H_3(z) + \frac{k}{24}H_4(z) \geq 0.$$

On peut redéfinir cette contrainte de la façon suivante. $\widetilde{q}^{\mathrm{HER}}(z)$ est positive si un point $P(k, s)$ se trouve dans l'enveloppe délimitée par l'hyperplan :

$$1 + \frac{s}{6}H_3(z) + \frac{k}{24}H_4(z) = 0,\ z \in \mathbb{R}.$$

Cette enveloppe est donnée par :

$$\begin{aligned}
1 + \frac{s}{6}H_3(z) + \frac{k}{24}H_4(z) &= 0, \\
\frac{s}{2}H_2(z) + \frac{k}{6}H_3(z) &= 0.
\end{aligned}$$

La résolution de ce système donne l'expression de la skewness et de l'excès de kurtosis

en fonction de z :

$$
\begin{aligned}
s(z) &= -24\frac{H_3(z)}{d(z)}, && (5.29)\\
k(z) &= 72\frac{H_2(z)}{d(z)}, && (5.30)\\
d(z) &= 4H_3^2(z) - 3H_2(z)H_4(z).
\end{aligned}
$$

Le dénominateur $d(z)$ est toujours positif. Les maximum et minimum de la skewness sont atteints lorsque $s'(z) = 0$, c'est-à-dire lorsque :

$$z^8 - 6z^6 + 6z^4 - 18z^2 + 9 = 0.$$

Cette équation admet 4 solutions réelles qui sont $z_1 = \sqrt{3+\sqrt{6}}$, $z_2 = -\sqrt{3+\sqrt{6}}$, $z_3 = \sqrt{3-\sqrt{6}}$, et $z_4 = -\sqrt{3-\sqrt{6}}$. Les valeurs de l'excès de kurtosis sont $k(z_1) = \sqrt{6}$, $k(z_2) = \sqrt{6}$, $k(z_3) = -\sqrt{6}$ et $k(z_4) = -\sqrt{6}$. Pour z_3 et z_4 l'excès de kurtosis est négatif, donc seuls z_1 et z_2 nous intéressent ici. Les valeurs de la skewness pour z_1 et z_2 sont $s(z_1) = \sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}$ et $s(z_2) = -\sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}$. Lorsque $z \to \pm\infty$, $s(z)$ et $k(z)$ tendent vers 0 et lorsque $z \to \sqrt{3}$, $s(z)$ et $k(z)$ tendent respectivement vers 0 et 4.

Donc l'excès de kurtosis k et la skewness s définissent un domaine à l'intérieur des 4 points suivants $(0,0)$, $(\sqrt{6}, \sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}})$, $(\sqrt{6}, -\sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}})$ et $(4,0)$. La droite $y = 4$ est une asymptote et le domaine est tangent aux droites $x = \sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}$ et $x = -\sqrt{6}/\sqrt{3+\sqrt{6}}$. La skewness est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. On donne un graphique numérique du domaine sur la figure (). Le système (5.29)-(5.30) ne correspond à aucune forme fonctionnelle connue. Jondeau et Rockinger (2000a) proposent une méthode numérique pour imposer les conrtaintes de positivité.

[figure : domaine de définition des contraintes de positivité dans Hermite]

Annexe C : calcul de la variance d'Heston

En intégrant (2.15)-(2.16) entre 0 et t on obtient :

$$x_t = x_0 + \int_0^t \left(r_t(T) - \frac{1}{2} V_s \right) ds + \int_0^t \sqrt{V_s} dZ_s^1, \tag{5.31}$$

$$V_t = V_0 + \int_0^t (\alpha - \kappa^* V_s)\, ds + \gamma \int_0^t \sqrt{V_s} dZ_s^2. \tag{5.32}$$

Nous aurons besoin dans la suite des quantités suivantes que l'on peut trouver dans Cox, Ingersoll and Ross (1985b) :

$$\mathrm{E}(V_t/V_0) = \frac{\alpha}{\kappa^*} + \left(V_0 - \frac{\alpha}{\kappa^*} \right) \exp(-\kappa^* t), \tag{5.33}$$

$$\mathrm{Var}(V_t/V_0) = V_0 \frac{\gamma^2}{\kappa^*} \left(\exp(-\kappa^* t) - \exp(-2\kappa^* t) \right) + \frac{\alpha \gamma^2}{2\kappa^{*2}} \left(1 - \exp(-\kappa^* t) \right)^2. \tag{5.34}$$

$\mathrm{Var}(x_t/V_0)$ est composée de trois termes :

$$\mathrm{Var}(x_t/V_0) = \frac{1}{4} \mathrm{Var} \left(\int_0^t V_s ds \right) + \mathrm{Var} \left(\int_0^t \sqrt{V_s} dZ_s^1 \right) - \mathrm{Cov} \left(\int_0^t V_s ds, \int_0^t \sqrt{V_s} dZ_s^1 \right). \tag{5.35}$$

On note ces trois termes par $\varphi(t)$, $\phi(t)$ et $\psi(t)$ tels que :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \mathrm{Var} \left(\int_0^t V_s ds \right), \\ \phi(t) &= \mathrm{Var} \left(\int_0^t \sqrt{V_s} dZ_s^1 \right), \\ \psi(t) &= \mathrm{Cov} \left(\int_0^t V_s ds, \int_0^t \sqrt{V_s} dZ_s^1 \right). \end{aligned}$$

Calcul of $\phi(t)$.

$$\phi(t) = \mathrm{E} \left(\int_0^t V_s ds \right) = \frac{\alpha}{\kappa^*} t + \left(V_0 - \frac{\alpha}{\kappa^*} \right) \left(\frac{1 - \exp(-\kappa^* t)}{\kappa^*} \right). \tag{5.36}$$

Calcul of $\psi(t)$.

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \int_0^t \mathrm{Cov}\left[V_s, \int_0^t \sqrt{V_u} dZ_u^1\right] ds \\
&= \int_0^t \mathrm{Cov}\left[-b^* \int_0^s V_w dw + \gamma \int_0^s \sqrt{V_w} dZ_w^2, \int_0^t \sqrt{V_u} dZ_u^1\right] ds \\
&= -\kappa^* \int_0^t \psi(s) ds + \gamma \int_0^t \mathrm{E}\left[\int_0^s \int_0^s \sqrt{V_w}\sqrt{V_u} dZ_u^1 dZ_w^2\right] ds \\
&= -\kappa^* \int_0^t \psi(s) ds + \gamma\rho \int_0^t \mathrm{E}\left[\int_0^s V_u du\right] ds. \qquad (5.37)
\end{aligned}$$

On note la fonction ψ la solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= -\kappa^* \psi(t) + \gamma\rho\phi(t), \\
\psi(0) &= 0, \qquad (5.38)
\end{aligned}$$

où ϕ est donné par (5.36).

On cherche une solution du type :

$$\begin{aligned}
&\psi(t) = \gamma\rho \int_0^t \exp\left(-\kappa^*(s-t)\right) \phi(s) ds \\
&= \frac{\gamma\rho}{b^*} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\alpha t}{\kappa^*} + 2\frac{\alpha \exp(-\kappa^* t)}{\kappa^{*2}} - \frac{2\alpha}{\kappa^{*2}} + \frac{V_0}{\kappa^*} \\ -\frac{V_0 \exp(-\kappa^* t)}{\kappa^*} - V_0 t \exp(-\kappa^* t) + \frac{\alpha t \exp(-\kappa^* t)}{\kappa^*} \end{array} \right\}. \qquad (5.39)
\end{aligned}$$

Calcul de $\varphi(t)$.

De (5.32), on tire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(V_t/V_0\right) &= \kappa^{*2}\mathrm{Var}\left[\int_0^t V_u du\right] + \gamma^2 \mathrm{Var}\left[\int_0^t \sqrt{V_u} dZ_u^2\right] \qquad (5.40) \\
&\quad -2\gamma\kappa^* \mathrm{Cov}\left[\int_0^t V_u du, \int_0^t \sqrt{V_u} dZ_u^2\right] \qquad (5.41) \\
&= \kappa^{*2}\varphi(t) + \gamma^2\phi(t) - 2\gamma\kappa^* \mathrm{Cov}\left[\int_0^t V_u du, \int_0^t \sqrt{V_u} dZ_u^2\right] \qquad (5.42)
\end{aligned}$$

Calculons $A(t) = \text{Cov}\left[\int_0^t V_u du, \int_0^t \sqrt{V_u} dZ_u^2\right]$:

$$\begin{aligned}
A(t) &= \text{Cov}\left[\int_0^t V_u du, \int_0^t \sqrt{V_s} dZ_u^2\right] \\
&= \int_0^t \text{Cov}\left[V_u, \int_0^t \sqrt{V_s} dZ_u^2\right] du \\
&= \int_0^t \text{Cov}\left[-\kappa^* \int_0^u V_w dw + \gamma \int_0^u \sqrt{V_w} dZ_w^2, \int_0^t \sqrt{V_s} dZ_s^2\right] du \\
&= -\kappa^* \int_0^t \text{Cov}\left[\int_0^u V_w dw, \int_0^u \sqrt{V_s} dZ_s^2\right] du + \gamma \int_0^t \text{Cov}\left[\int_0^u \sqrt{V_w} dZ_w^2, \int_0^u \sqrt{V_s} dZ_s^2\right] du \\
&= -\kappa^* \int_0^t A(u) du + \gamma \int_0^t \text{E}\left[\int_0^u V_w dw\right] du.
\end{aligned}$$

alors A est solution de l'équation différentielle (5.38) et vérifie $A(0) = 0$. On observe que $A(t) = \frac{\psi(t)}{\rho}$.

Pour finir $\varphi(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= -\frac{V_0\gamma^2}{\kappa^{*3}} \exp(-2\kappa^* t) - \frac{5\alpha\gamma^2}{2\kappa^{*4}} + \frac{2\gamma^2\alpha}{\kappa^{*4}} \exp(-\kappa^* t) + \frac{\alpha\gamma^2}{2\kappa^{*2}} \exp(-2\kappa^* t) \\
&\quad + \frac{\gamma^2\alpha t}{\kappa^{*3}} + \frac{\gamma^2 V_0}{\kappa^{*3}} - \frac{2\gamma^2 V_0 t}{\kappa^{*2}} \exp(-\kappa^* t) + \frac{2\alpha\gamma^2 t}{\kappa^{*3}} \exp(-\kappa^* t). \qquad (5.43)
\end{aligned}$$

La somme des trois termes de (5.35) donne la variance conditionnelle du rendement de l'actif :

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left[x_t/V_0\right] &= \frac{\alpha t}{\kappa^*} + (1 - \exp(-\kappa^* t)) \left(\frac{V_0}{\kappa^*} - \frac{\alpha}{\kappa^{*2}} + 2\frac{\gamma\rho\alpha}{\kappa^{*3}} - \frac{\gamma\rho V_0}{\kappa^{*2}}\right) \\
&\quad - \frac{\gamma\rho\alpha t}{\kappa^{*2}} + \frac{\gamma\rho V_0}{\kappa^*} t \exp(-\kappa^* t) - \frac{\gamma\rho\alpha}{\kappa^{*2}} t \exp(-\kappa^* t) \qquad (5.44) \\
&\quad + \frac{\gamma^2}{4\kappa^{*2}} [\frac{V_0}{\kappa^*} (1 - \exp(-2\kappa^* t)) + \left(-2V_0 t + \frac{2\alpha}{\kappa^{*2}} + \frac{2\alpha t}{\kappa^*}\right) \exp(-\kappa^* t) \qquad (5.45) \\
&\quad - \frac{5\alpha}{2\kappa^{*2}} + \frac{\alpha}{2\kappa^{*2}} \exp(-2\kappa^* t) + \frac{\alpha t}{\kappa^*}]. \qquad (5.46)
\end{aligned}$$

Annexe D : optimisation de l'entropie

On utilise la méthode de Melik et Thomas (1997) pour le calcul des prix américains d'options. On étudie le cas du call. On rappelle que chaque prix est une combinaison linéaire d'une borne inférieure et supérieure données par :

$$\begin{aligned} C^u(t,S_t,T,K) &= E\left[\max(0,S_T-K)\right] \\ C^l(t,S_t,T,K) &= \max\left[E(S_T)-K, e^{-r_t(T)\tau}E\left[\max(0,S_T-K)\right]\right] \\ C(t,S_t,T,K) &= \omega C^u(t,S_t,T,K)+(1-\omega)C^l(t,S_t,T,K). \end{aligned}$$

Dans le cas du principe du maximum d'entropie, le prix d'un call américain P_j de strike K_j s'écrit :

$$P_j = \omega\int_0^\infty c_j(x)p_{\max}(x)dx+(1-\omega)\max\left[\int_0^\infty xp_{\max}(x)dx-K_j, e^{-r_t(T)\tau}\int_0^\infty c_j(x)p_{\max}(x)dx\right].$$

En intégrant le terme de gauche dans celui de droite et en remplaçant $p_{\max}(x)$ par sa valeur, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \omega\int_0^\infty (c_j(x)-P_j)\frac{1}{\mu}\exp\left(\sum_{i=0}^N \lambda_i c_i(x)\right)dx \\ &\quad +(1-\omega)\max[\int_0^\infty (x-K_j-P_j)\frac{1}{\mu}\exp\left(\sum_{i=0}^N \lambda_i c_i(x)\right)dx \qquad (5.47) \\ &\quad ,\int_0^\infty \left(e^{-r_t(T)\tau}c_j(x)-P_j\right)\frac{1}{\mu}\exp\left(\sum_{i=0}^N \lambda_i c_i(x)\right)dx]. \qquad (5.48) \end{aligned}$$

On note :

$$\begin{aligned} A_j(x) &= x-P_j-K_j, \\ B_j(x) &= c_j(x)-P_j, \\ B_j^*(x) &= e^{-r_t(T)\tau}c_j(x)-P_j. \end{aligned}$$

En multipliant (5.48) par μ et par $\exp\left(-\sum_{i=0}^{N}\lambda_i P_i\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \omega\int_0^\infty B_j(x)\exp\left(\sum_{i=0}^{N}\lambda_i B_j(x)\right)dx + (1-\omega)\max[\int_0^\infty A_j(x)\exp\left(\sum_{i=0}^{N}\lambda_i B_j(x)\right)dx \\ &\quad , \int_0^\infty B_j^*(x)\exp\left(\sum_{i=0}^{N}\lambda_i B_j(x)\right)dx]. \end{aligned}$$

On utilise une formule d'intégration rapide de Gauss du type :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(y)dy &= \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(y_i) + \mathcal{R}_n, \\ y_i &= \frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}, \end{aligned}$$

où l'abscisse x_i représente le i-ème zéro d'un polynôme orthogonal $P_n(x)$, $P_n(1) = 1$, et où R_n et les poids w_i sont donnés par :

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{2}{1-x_i}[P_n'(x_i)]^2, \\ \mathcal{R}_n &= \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi). \end{aligned}$$

Annexe E : méthode d'optimisation de Quasi-Newton

On donne ici le principe général de la méthode. Pour plus de détails on peut se référer au livre de Stoer et Bulirsh (1993).

On considère le problème de minimisation suivant pour une fonction réelle $h : R^n \to R$ pour n variables :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} h(x).$$

On suppose que h a des dérivées partielles continues par rapport à toutes ses variables, $h \in C^2(R^n)$, et on note le gradient de h par :

$$g(x)' = Dh(x) = \left(\frac{\partial h}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial h}{\partial x^n} \right),$$

et la matrice des dérivées secondes de h par :

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k} \right), \ i, k = 1, ..., n.$$

Presque toutes les méthodes de minimisation commencent avec un point $x_0 \in R^n$et engendrent une suite de points x_k, $k \geq 0$ qui sont supposés approcher le point minimum désiré $\overline{x}$.

A chaque pas d'itération, $x_k \to x_{k+1}$, pour lequel $g_k = g(x_k) \neq 0$, une direction de recherche s_k est spécifique à la méthode choisie est déterminée, et le point suivant

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k s_k$$

est obtenu par une "recherche linéaire", i.e. le pas de recherche λ_k est déterminé de telle façon que

$$\begin{aligned} h(x_{k+1}) &\approx \min(\varphi_k(\lambda)) \\ \varphi_k(\lambda) &= h(x_k - \lambda s_k) \end{aligned}$$

soit valable au moins de façon approximative pour x_{k+1}. En général la direction s_k est déterminée de façon "descendante" pour h, i.e. $\varphi_k'(0) = -g_k' s_k < 0$.

On est ainsi assuré que seules les valeurs positives de λ seront prises en compte dans la minimisation de $\varphi_k(\lambda)$.

Un minimum (local) $\overline{x}$ de h est un zéro de $g(x)$; ainsi on peut utiliser n'importe quelle méthode de détermination de zéro sur le système $g(x) = 0$ comme approche de découverte d'un point minimum de h.

Le point le plus important concerne la méthode de Newton[2]. A chaque pas $x_k \rightarrow x_{k+1} = x_k - \lambda_k s_k$ la direction de Newton $s_k = H(x_k)^{-1} g_k$ est prise comme direction de recherche. Utiliser un pas constant de longueur $\lambda_k = 1$ a l'avantage de définir une méthode convergente localement quadratique, mais a l'inconvénient de nécessiter la calcul de la matrice $H(x_k)$ à chaque pas d'itération. Si n est large et si h est compliquée, le calcul de $H_k(x)$ peut être très coûteux. Alors la méthode a été modifiée par l'intermédiaire des matrices $H(x_k)'$ qui sont remplacées par des matrices appropriées H_k, $s_k = H_k g_k$, faciles à calculer. Une méthode est dite "méthode de quasi-Newton" si pour tout $k \geq 0$, la matrice H_{k+1} satisfait l'équation de "quasi-Newton" donnée par :

$$H_{k+1}(g_{k+1} - g_k) = x_{k+1} - x_k.$$

Cette équation fait que H_{k+1} se comporte comme la matrice de Newton $H(x_{k+1})^{-1}$. De plus, la matrice H_k est définie positive pour tout $k \geq 0$.

Une généralisation de cette méthode est donnée dans Davidon (1959), Fletcher et Powell (1963), Broyden (1965) et Oren et Luenberger (1974) qui donnent un calcul de la matrice H_{k+1} à partir de H_k avec les propriétés désirées.

En utilisant les notations :

$$p_k = x_{k+1} - x_k,\ q_k = g_{k+1} - g_k$$

[2] La méthode généralisée de Newton dans la résolution d'un système d'équations de type

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x^1, ..., x^n) \\ . \\ f_n(x^1, ..., x^n) \end{bmatrix} = 0$$

est donnée par

$$x_{i+1} = x_i - (Df(x_i))^{-1} f(x_i),\ i = 0, 1, 2, ...$$

et les paramètres $\gamma_k > 0$ et $\theta_k \geq 0$, la matrice récursive a la forme :

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= \Psi(\gamma_k, \theta_k, H_k, p_k, q_k) \\ \Psi(\gamma, \theta, H, p, q) &= \gamma H + \left(1 + \gamma\theta \frac{q'Hq}{p'q}\right) \frac{pp'}{p'q} - \gamma \frac{(1-\theta)}{q'Hq} Hq.q'H - \frac{\gamma\theta}{p'q} \left(pq'H + Hqp'\right). \end{aligned}$$

La fonction d'update Ψ est définie seulement pour $p'q \neq 0$, $q'Hq \neq 0$. On observe que H_{k+1} est obtenue pour H_k en ajoutant une correction de rang$\leq$2 à la matrice $\gamma_k H_k$: $\text{rang}(H_{k+1} - \gamma_k H_k) \leq 2$. Ainsi Ψ est dite définie comme une méthode de rang 2.

On peut citer les deux cas suivants pour le calcul de Ψ particulièrement utilisés dans les procédures d'optimisation :

1. $\gamma_k = 1$, $\theta_k = 0$ appelée méthode DFP (Davidon, Fletcher et Powell)
2. $\gamma_k = 1$, $\theta_k = 1$ appelée méthode BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno),

cette dernière étant par expérience la plus souvent conseillée pour les problèmes de minimisation.

Troisième partie

Applications des densités neutres au risque en terme de contenu en information

Chapitre 1

Outil descriptif de mesure du risque sur les marchés

Les institutions financières sont soumises à un certain nombre de risques parmi lesquels les risques de liquidité, les risques opérationnels, les risques de contrepartie ou les risques de marché. C'est ce dernier qui nous intéresse dans cette partie. En effet, en réponse à une série de catastrophes financières récentes, les investisseurs considèrent aujourd'hui la notion de *risk management* comme l'une des principales responsabilités d'un gestionnaire d'entreprise. C'est pourquoi une attention particulière, récente, s'est portée sur la quantification des fluctuations du marché sous un angle statistique. Cette mesure de la *value-at-risk* (VaR) est au centre de nombreux systèmes de gestion du risque. La définition donnée par JP Morgan (1995) de la VaR est la suivante :

> "La Value-at-Risk est une estimation, étant donné un intervalle de confiance, de la quantité que quelqu'un peut perdre avec la détention d'une position sur un certain horizon. Les horizons potentiels peuvent typiquement être de l'ordre d'une journée pour des activités de trading ou de l'ordre d'un mois ou plus pour la gestion d'un portefeuille. Les méthodes décrites dans notre documentation utilisent les rendements historiques pour prévoir les volatilités et les corrélations qui sont ensuite utilisées pour estimer le risque de marché. Ces statistiques peuvent s'appliquer à un ensemble de classes d'actifs incorporant des produits utilisés par les institutions financières, les corporations, et les investisseurs institutionnels."

La *value-at-risk* est donc une estimation, grâce à un intervalle de confiance prédéfini,

du montant qu'un investisseur peut perdre en détenant une position sur un certain horizon. Cet horizon peut être de quelques jours pour l'activité de trading et de plusieurs mois ou plus pour la gestion de portefeuille.

Une façon d'obtenir une mesure statistique de la VaR est de modéliser les fluctuations des actifs d'un portefeuille et d'en dériver un intervalle de confiance de la perte possible du détenteur du portefeuille. Une méthode alternative pour calculer la VaR consiste à utiliser les prix d'options de façon à incorporer des aspects supplémentaires du risque du marché, importants dans la pratique de la gestion du risque. Cette méthode utilise les intervalles de confiance calculés à partir de la probabilité de distribution neutre au risque du sous-jacent de l'option. On obtient ainsi une mesure économique de la VaR.

1.1 Intervalles de confiance

La distribution implicite obtenue grâce à l'une des techniques proposées en section II donne une vision intéressante des anticipations du marché quant au comportement du niveau des taux courts ou des indices à des moments précis dans le futur. Comme nous l'avons vu, elle est particulièrement utile pour étudier l'impact d'un événement particulier ou d'une décision politique susceptible de changer la forme de la distribution d'un jour à l'autre. Cependant, le suivi dans le temps de la densité de probabilité en tant qu'indicateur des anticipations des taux d'intérêt futurs se révèle complexe lorsque la période analysée est relativement longue. La construction de marges implicites anticipées par le marché permet de pallier cette difficulté en offrant une lecture plus aisée de l'évolution des cours anticipés.

La connaissance de la distribution entière d'une variable aléatoire X permet de construire des intervalles de confiance pour un seuil donné α en résolvant l'équation :

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \alpha. \tag{1.1}$$

Cet intervalle de confiance permet de quantifier, pour une probabilité donnée, la perte maximale ou le gain maximal qui résulte de la détention de l'actif sous-jacent. On doit être prudent ici puisque les mesures obtenues sont prises dans un univers neutre vis-à-vis du risque. Cependant, comme l'écrit Rubinstein (1994) : "..., despite warnings to the contrary, we can justifiably suppose a rough similarly between the risk-neutral proba-

bilities implied in option prices and subjective beliefs." et il le justifie par un exemple numérique. A un paramètre près que l'on peut considérer comme étant une mesure de la prime de risque, les nombres obtenus sur l'intervalle de confiance sont ceux que l'on aurait obtenus sous la probabilité subjective. Dans tous les cas, il ne paraît pas absurde de penser que, d'un point de vue descriptif, les variations des anticipations vont dans le même sens sous les deux probabilités. Dans cet esprit, la Bundesbank fait une analyse du marché des options sur contrat à terme de taux à trois mois et sur obligation. Elle estime que les indicateurs dérivés de ces marchés sont des anticipations de marché sur les taux d'intérêt à trois mois du marché monétaire et les rendements des titres de la dette en Allemagne.

Le graphique (3.1) montre les résultats de l'intervalle de confiance du taux Pibor 3-mois en supposant une distribution lognormale. Pour chaque jour de la période, les quantiles pour 2 valeurs seuil $\alpha\%$ et $100 - \alpha\%$ sont calculés. La différence entre ces 2 valeurs forme un intervalle qui, en accord avec les anticipations des agents du marché et en excluant la prime de risque, capture les taux futurs à la date d'échéance de l'option (ici, interpolée pour 3 mois) avec une probabilité de $(100-2\alpha)\%$. L'écart de cet intervalle de confiance de niveau α peut être considéré comme une mesure de l'incertitude. En effet, plus les investisseurs croient en leurs anticipations, plus l'intervalle de confiance est étroit et ses bornes resserrées autour de la valeur espérée du taux futur.

L'obtention d'intervalles de confiance à travers le temps sur des options de même maturité n'est pas directe, contrairement aux options de change par exemple pour lesquelles il suffit d'estimer en fréquence quotidienne le modèle sur la maturité voulue. Dans le cas des options sur contrat à terme de taux d'intérêt et des options sur indices, le problème est plus délicat puisque c'est l'échéance et non la maturité qui reste fixée. Dans ce cas, si l'on cherche à comparer les distributions à deux dates séparées, les différences obtenues entre les deux dates ne résulteront pas de l'anticipation du marché, mais simplement de la diminution de la maturité qui intervient dans le calcul des moments. L'obtention de séries temporelles des quantiles nécessite une première étape qui est l'estimation du modèle sur l'ensemble des maturités disponibles pour une journée ; puis une seconde étape qui consiste à interpoler les résultats obtenus pour une maturité fixe pour obtenir des paramètres synthétiques de skewness et de kurtosis, sous-réserve que l'on ait au préalable fait l'hypothèse de l'existence d'une structure par terme des coefficients. Il existe plusieurs méthodes d'interpolation, Butler et Davies (1998) proposent une simple interpolation

linéaire. Nous préférons retenir une méthode de spline cubique[1] qui paraît plus souple qu'une simple méthode linéaire. Le choix des maturités pour la construction de distributions synthétiques s'est fait logiquement en fonction des maturités existantes. Ainsi, les options Pibor sont toujours cotées pour 4 échéances trimestrielles, donc les maturités de 3 mois, 6 mois et 9 mois sont toujours existantes. Concernant les options sur CAC 40 qui sont cotées pour 3 mois consécutifs au jour de cotation plus une échéance trimestrielle, il existe toujours des maturités de 1 mois, 45 jours et 3 mois. Ce sont donc ces maturités qui seront retenues pour l'étude suivante.

1.1.1 Taux d'intérêt

Les graphiques (3.2) et (3.3) montrent les intervalles de confiance du taux Pibor 3-mois en supposant respectivement une distribution dérivée d'un développement en polynômes d'Hermite et une distribution issue d'un mélange de lois lognormales. Ces intervalles de confiance apportent des précisions sur les événements qui ont entouré les élections anticipées de 1997. On remarque un calme relatif avant la date du 14 avril 1997. A partir de cette date, on note une brusque hausse de la borne supérieure de l'intervalle de confiance avant la date de l'annonce officielle de la dissolution de l'Assemblée le 21 avril 1997. Cette observation nous livre une information intéressante sur les marchés : des rumeurs de la dissolution avaient couru dans la semaine qui précédait l'annonce elle-même, ayant pour conséquence une hausse de la crainte des investisseurs quant à un futur relativement proche. Après la date du 21 avril, l'intervalle de confiance reste à un niveau élevé, sans toutefois s'agrandir. Au lendemain du 26 mai, premier tour des élections, la borne supérieure de l'intervalle subit à nouveau une augmentation due aux résultats du premier tour et aux sondages qui rendent désormais plus que probable un éventuel changement de gouvernement en faveur du parti socialiste. La crainte persiste jusqu'au 2 juin, second tour des élections, au cours duquel la gauche remporte la victoire. Une semaine après le second tour, les craintes des investisseurs se sont un peu apaisées, tout en restant présentes. Enfin, après le 10 juin, à la suite des discours rassurant du nouveau gouvernement sur leur position dans l'Union Monétaire Européenne et leur politique économique générale, l'intervalle de confiance se rapproche de son état antérieur au 14 avril, tout en restant cependant un peu plus large, signe que le nouveau gouvernement n'a pas complètement réussi à rassurer les marchés sur sa politique monétaire future.

[1] On trouvera une explication détaillée de la méthode dans le livre d'introduction à l'analyse numérique de Stoer et Bulirsch (1993).

On peut noter que, quelle que soit la période d'observation, le rapport du taux à terme sur la borne inférieure est toujours plus petit que le rapport de la borne supérieure sur le taux à terme, excepté dans le cas d'une densité lognormale. Pour les autres modèles, cette observation est la conséquence d'un coefficient d'asymétrie positif. De même, on remarquera que la largeur de l'intervalle de confiance est toujours plus petite dans le cas du modèle lognormal que pour les autres modèles, traduisant ici la présence d'un coefficient d'excès de kurtosis positif.

Figure 3.1.a: intervalles de confiance du PIBOR avec une lognormale
interpoles pour une maturite d'un mois

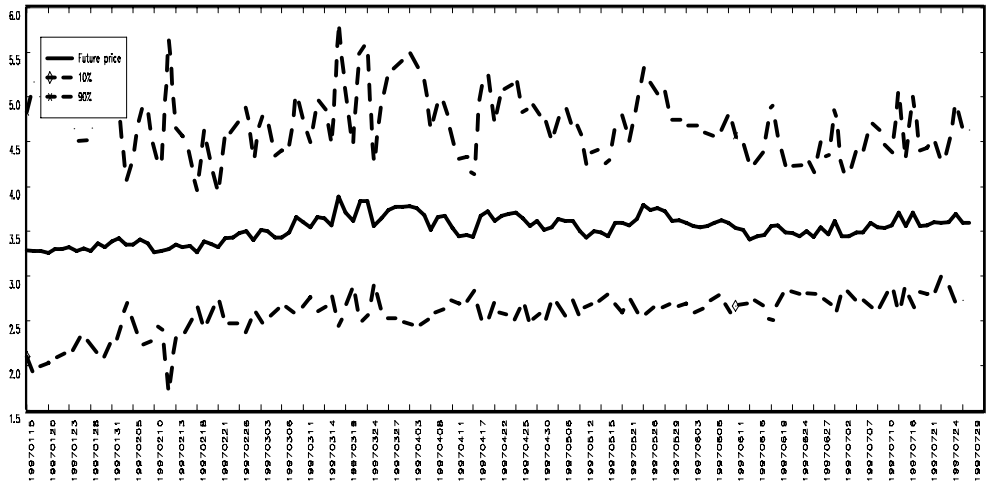


Figure 3.1.b: intervalles de confiance du PIBOR avec une lognormale
interpoles pour une maturite de 3 mois

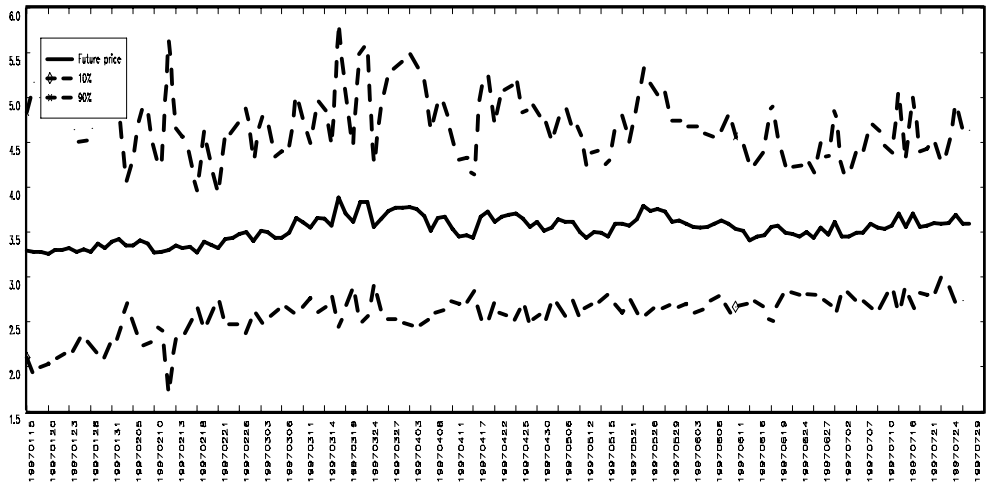


Figure 3.1.c: intervalles de confiance du PIBOR avec une lognormale
interpoles pour une maturite de 6 mois

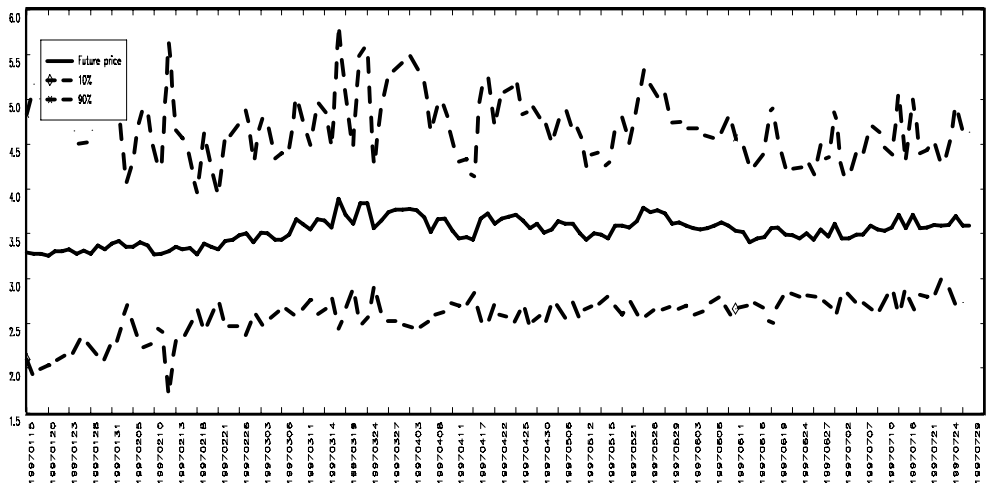


Figure 3.2.a: intervalles de confiance du PIBOR avec un developpement d'Hermite
interpoles pour une maturite d'un mois

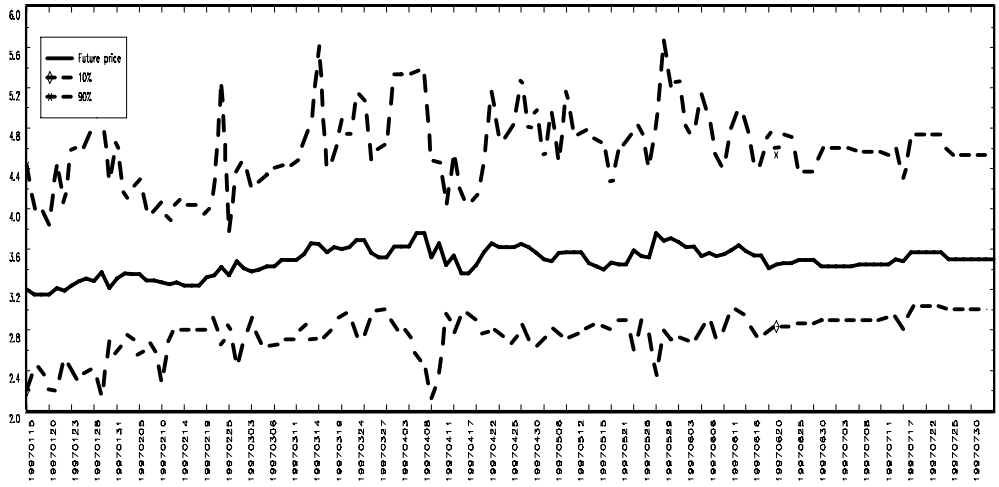


Figure 3.2.b: intervalles de confiance du PIBOR avec un developpement d'Hermite
interpoles pour une maturite de 3 mois

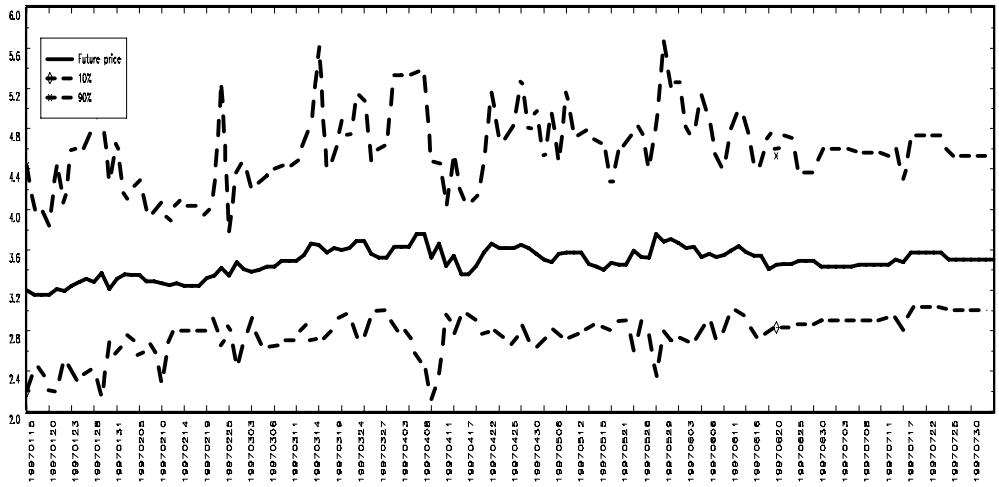


Figure 3.2.c: intervalles de confiance du PIBOR avec un developpement d'Hermite
interpoles pour une maturite de 6 mois

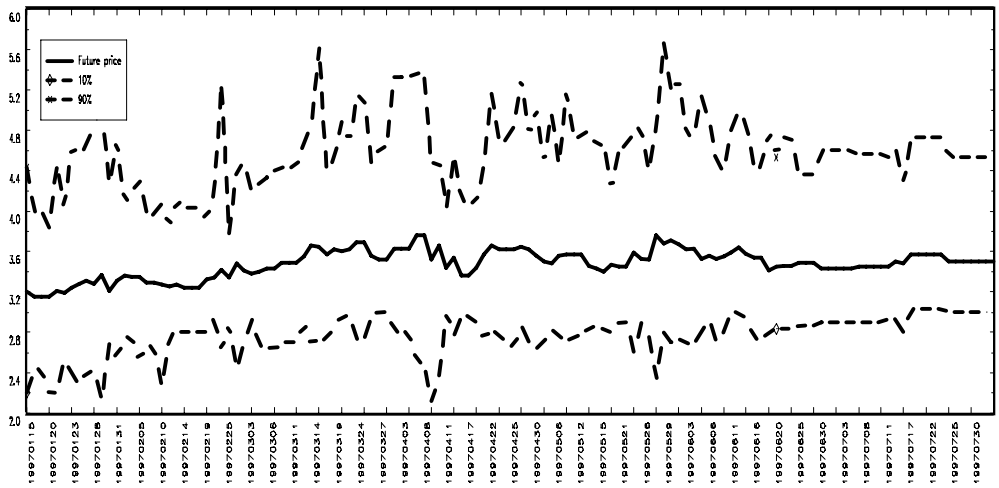


Figure 3.3.a: intervalles de confiance du PIBOR avec un melange de lois lognormales
interpoles pour une maturite d'un mois

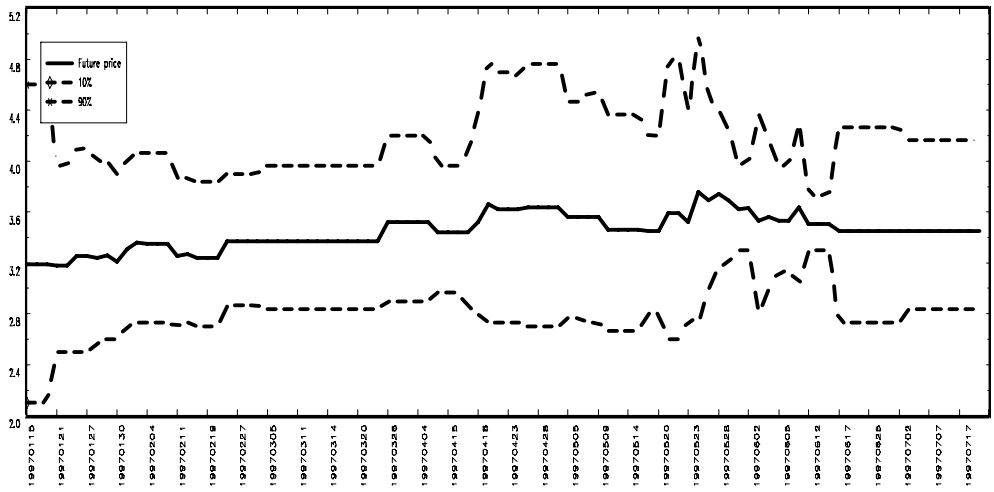


Figure 3.3.b: intervalles de confiance du PIBOR avec un melange de lois lognormales
interpoles pour une maturite de 3 mois

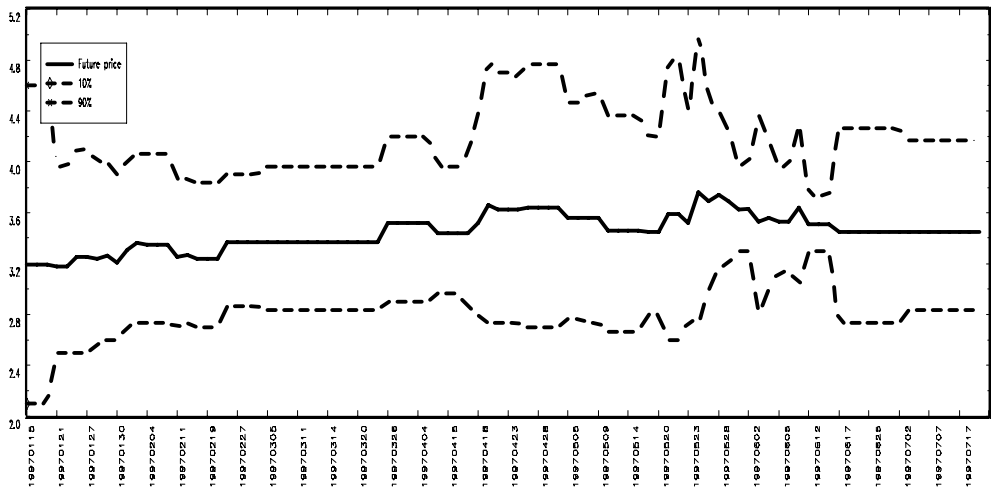
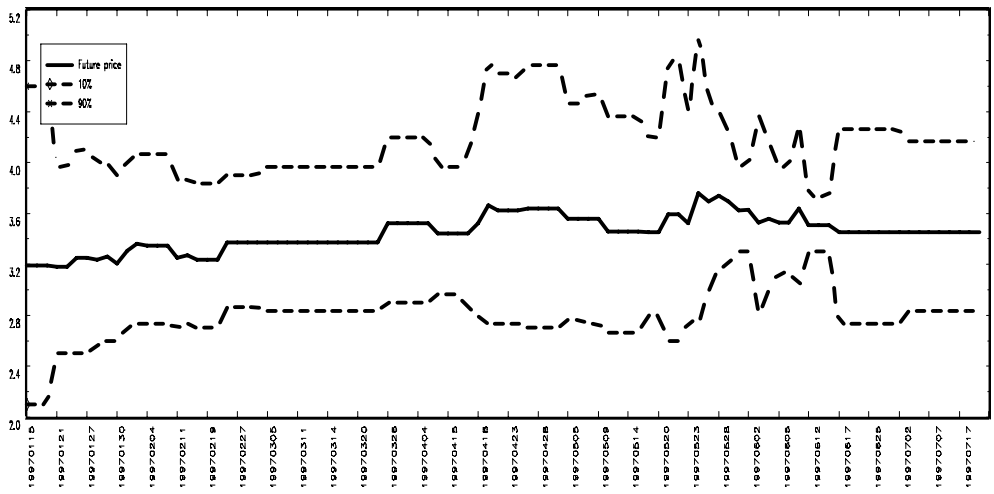


Figure 3.3.c: intervalles de confiance du PIBOR avec un melange de lois lognormales
interpoles pour une maturite de 6 mois



1.1.2 Indices

Dans la littérature, on note que les analyses des anticipations de marché à partir des intervalles de confiance sur les marchés d'actions sont nettement plus restreintes que celles sur les marchés de taux. Mais il apparaît clairement avec la multiplication des crises récentes, telles que la crise russe ou la crise asiatique, que les banques commerciales vont de plus en plus avoir besoin d'indicateurs pour tester le comportement des investisseurs. Les figures (3.5) et (3.6) montrent le cours du CAC 40 et les intervalles de confiance à un niveau de 10% avec les méthodes d'Hermite d'une part et un processus à sauts d'autre part. Ces intervalles de confiance sont obtenus en interpolant les quantiles à 10% pour des maturités de 1 mois, 45 jours et 3 mois sur une période de mai 1997 à décembre 1997. D'une façon générale, on observe que les bornes calculées avec le modèle lognormal sont au-dessus des bornes avec les modèles à sauts (JMP) et polynômes d'Hermite (HER). D'une certaine façon, on peut dire que l'insuffisance d'information capturée par le modèle lognormal rend trop "optimistes" les anticipations sur le cours de l'indice. Cette remarque est renforcée par la présence de "pics" ou de "sauts" dans la série des quantiles avec les modèles JMP et HER, que l'on ne retrouve pas avec le *benchmark*. Ces pics sont le reflet d'un incertain localisé et ponctuel. Par exemple, au début du mois de juillet 1997, on observe une baisse des quantiles inférieurs calculés avec HER et JMP, qui provoquent un brusque élargissement de la bande de confiance. La période de mai à juin 1997 est caractérisée par un intervalle de confiance relativement stable, reflétant le peu d'anxiété du marché à ce moment sur le comportement de l'indice à un horizon de 1 mois à 3 mois. Une certaine agitation semble animer le marché de fin juin à fin juillet 1997, renforcée par un élargissement de l'intervalle de confiance, signe que l'incertain sur les cours futurs a augmenté. De début août à mi-octobre, l'intervalle semble rétrécir tout en restant indécis au début du mois d'octobre. Le 20 octobre 1997 la borne inférieure de l'intervalle chute de 2198,6 à 1728,1 signe d'une très forte crainte des marchés d'actions, lié à l'influence de la crise russe sur les marchés développés.

Figure 3.4.a: intervalles de confiance du CAC 40 avec une lognormale
interpoles pour une maturite d'un mois

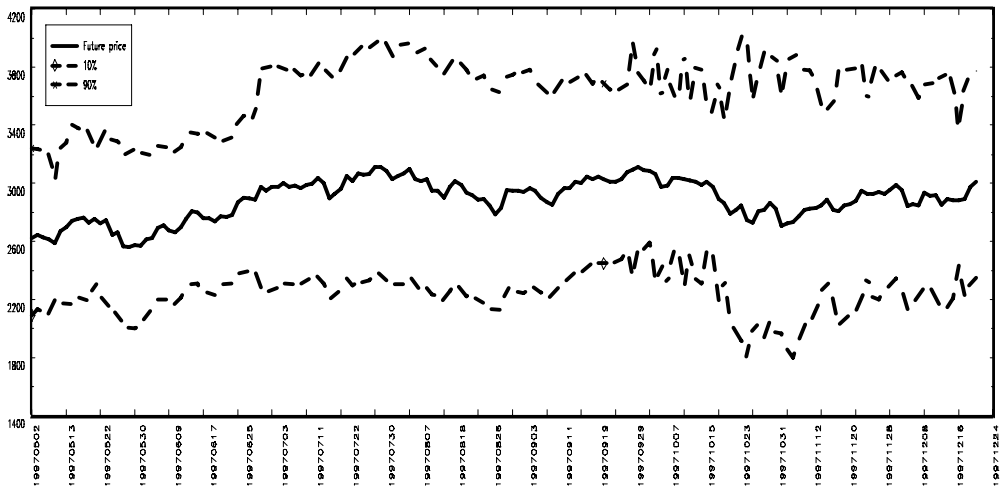


Figure 3.4.b: intervalles de confiance du CAC 40 avec une lognormale
interpoles pour une maturite de 45 jours

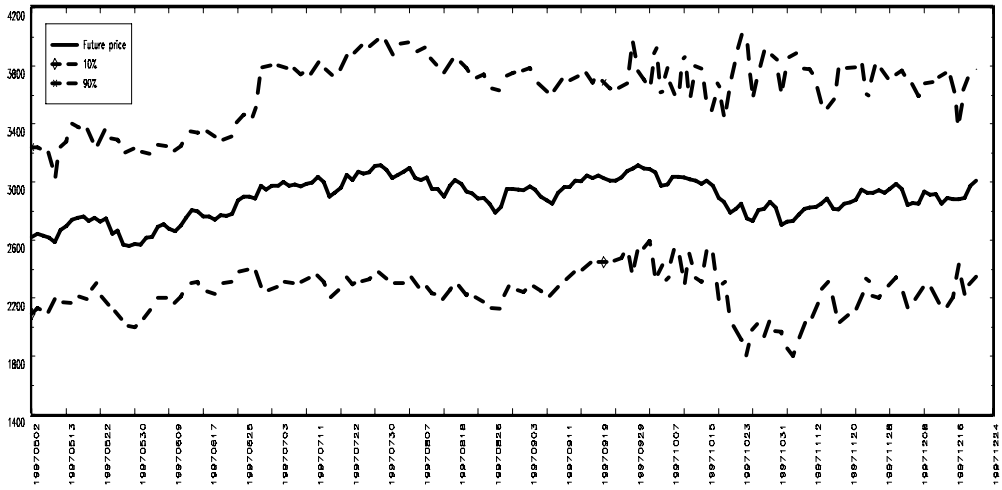


Figure 3.4.c: intervalles de confiance du CAC 40 avec une lognormale
interpoles pour une maturite de 3 mois

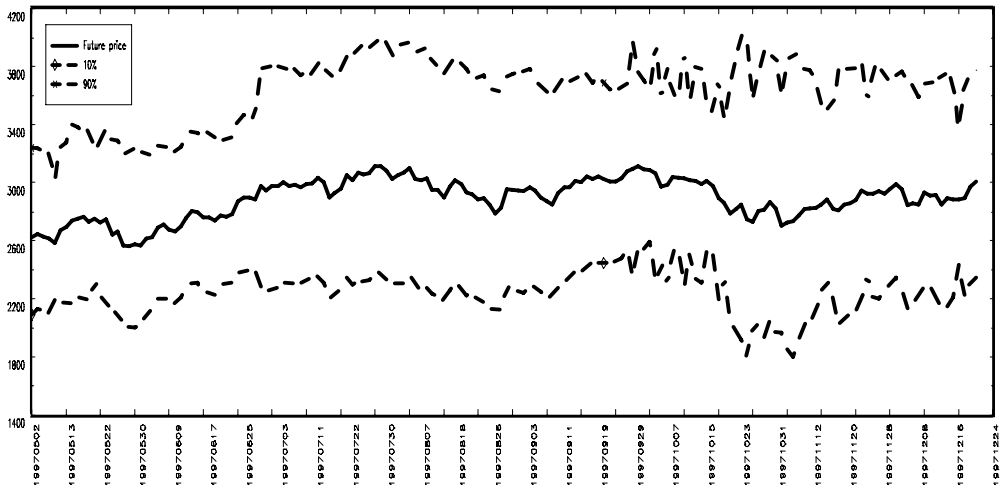


Figure 3.5.a: intervalles de confiance du CAC 40 avec un developpement d'Hermite
interpoles pour une maturite d'un mois

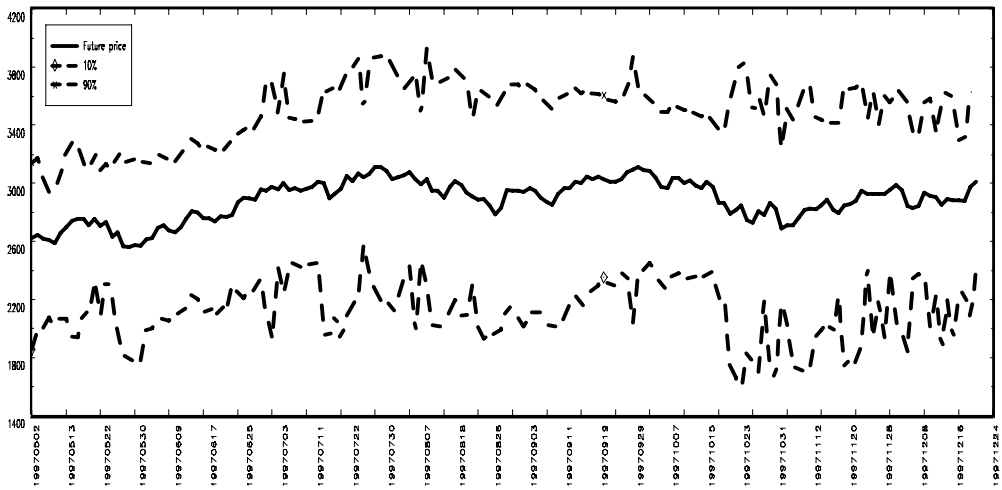


Figure 3.5.b: intervalles de confiance du CAC 40 avec un developpement d'Hermite
interpoles pour une maturite de 45 jours

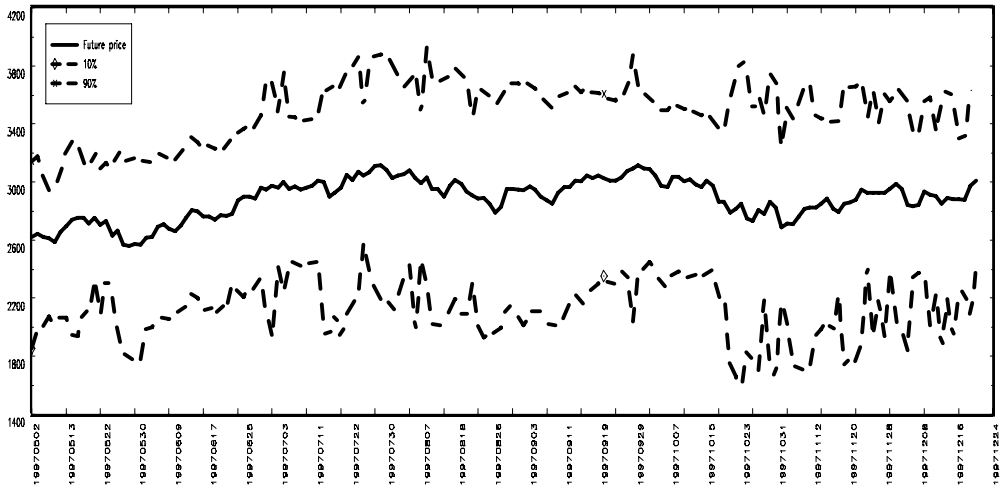


Figure 3.5.c: intervalles de confiance du CAC 40 avec un developpement d'Hermite
interpoles pour une maturite de trois mois

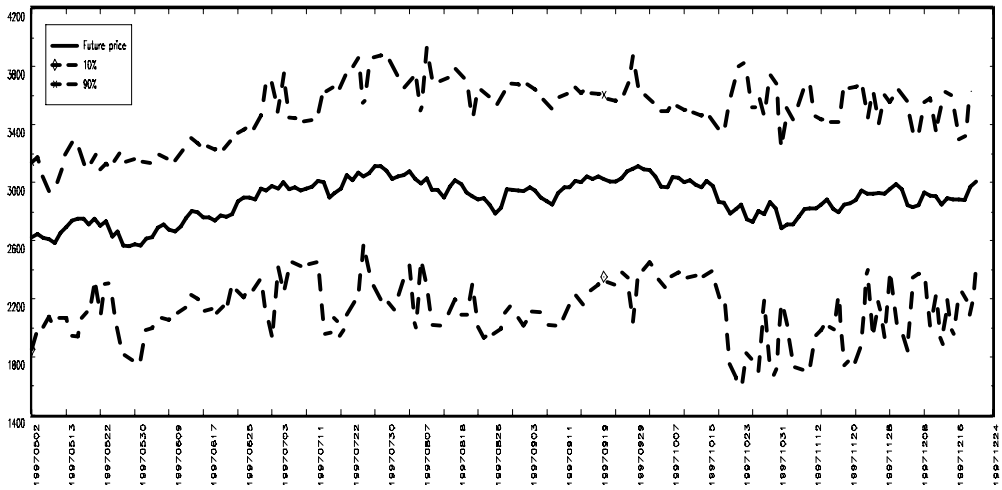


Figure 3.6.a: intervalles de confiance du CAC 40 avec un melange d'une lognormale et d'un Poisson
interpoles pour une maturite d'un mois

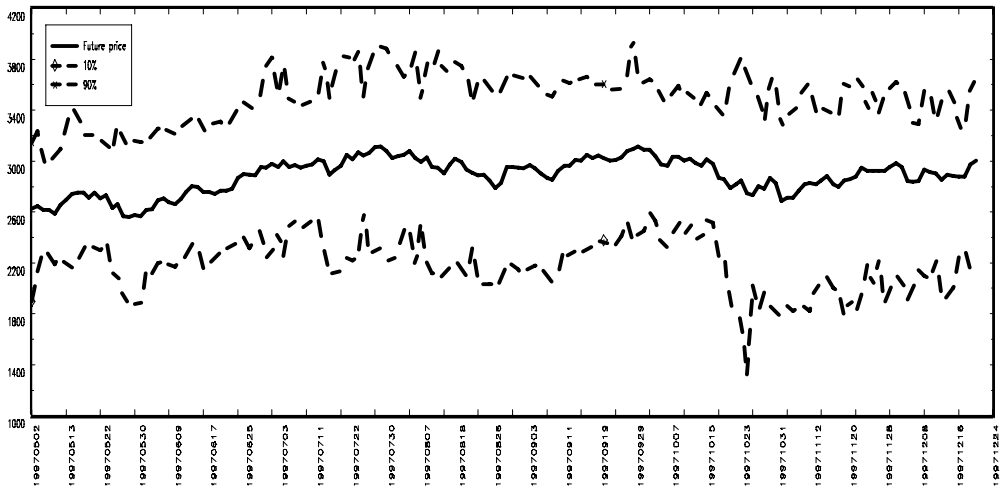


Figure 3.6.b: intervalles de confiance du CAC 40 avec un melange d'une lognormale et d'un Poisson
interpoles pour une maturite de 45 jours

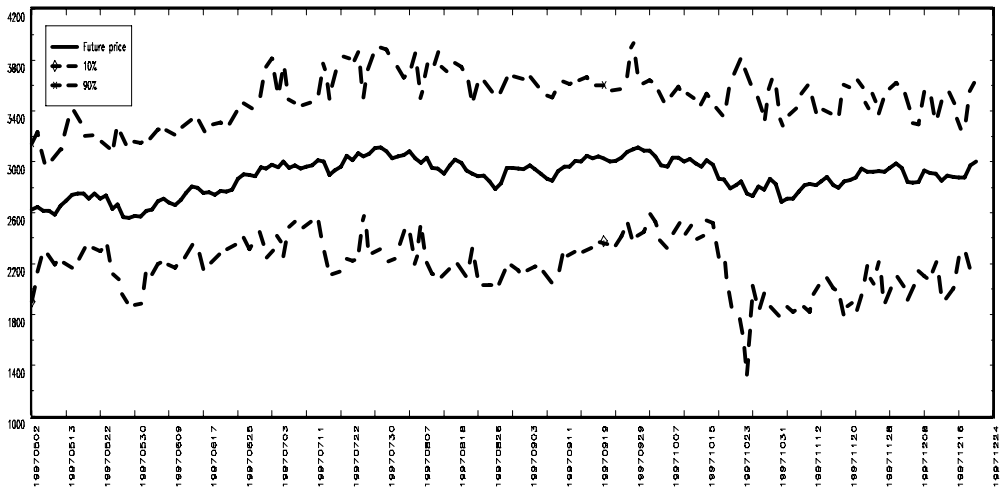
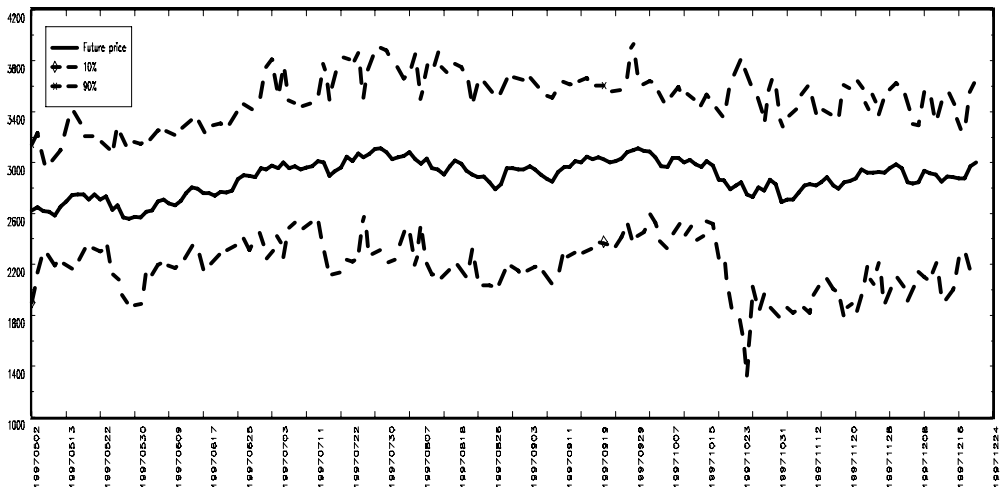


Figure 3.6.c: intervalles de confiance du CAC 40 avec un melange d'une lognormale et d'un Poisson
interpoles pour une maturite de 3 mois



Chapitre 2

Volatilité implicite et efficience des marchés d'options

Malkiel (1992) donne la définition suivante de l'efficience des marchés : "Un marché est dit efficient s'il reflète complètement et correctement toute l'information pertinente dans l'évaluation des prix d'actifs. Formellement le marché est dit efficient par rapport à un ensemble d'information si les prix d'actifs ne sont pas affectés par la révélation de cette information à l'ensemble des agents du marché. De plus l'efficience par rapport à une information implique qu'il est impossible de constituer des profits avec cette base d'information."

La volatilité implicite que l'on peut tirer des prix d'options est-elle le meilleur estimateur de la volatilité future ? Si l'on croit à l'efficience des marchés, la réponse à cette question est oui, sinon il serait possible de construire des stratégies qui pourraient engendrer des profits en identifiant les options mal évaluées. Ceux qui croient que les investisseurs ont des comportements non rationnels et que les prix d'actifs ne sont pas efficients à l'information répondront par non.

La réponse à cette question a donné lieu à une abondante littérature depuis la fin des années 70 et les conclusions des diverses études sur le sujet ne s'accordent pas toujours. Cependant, la majorité des conclusions tend à accepter l'hypothèse que la volatilité implicite contient de l'information supplémentaire par rapport aux volatilités historiques. Ainsi, Chiras et Manaster (1978) trouvent que les variances implicites obtenues avec le modèle de Black-Scholes sur les options sont de meilleurs prédicteurs des variances des rendements futurs des prix que celles obtenues à partir des séries historiques des prix.

Day et Lewis (1992) ont tendance à accepter l'hypothèse pour les options sur S&P100, mais nuancent leur résultat selon le jour de trading choisi pour le test. Harvey et Whaley (1992) testent et rejettent l'hypothèse que les mouvements futurs de la volatilité sont imprévisibles et concluent que le marché des options sur S&P100 est localement efficient. De même, Xu et Taylor (1995) examinent l'efficience informationelle du Philadelphia Stock Exchange (PHLX) en utilisant une méthodologie ARCH et trouvent que le marché des changes de Philadelphia est efficient au sens où les volatilités implicites fournissent de meilleurs prédicteurs que les volatilités conditionnelles. Jorion (1995) étudie à la fois le contenu en information et le pouvoir prédictif des volatilités implicites sur le Chicago Mercantile Exchange et trouve que les modèles de séries temporelles sont dominés par les prévisions faites avec les volatilités des options. Guo (1996) trouve sur le PHLX que la variance implicite est un prédicteur biaisé de la variance future. Plus récemment, Amin et Ng (1997) comparent le contenu en information dans la volatilité implicite tirée d'un modèle de type Heath-Jarrow-Morton (1992) avec celui existant dans une volatilité de type GARCH et concluent que la volatilité implicite domine nettement la volatilité GARCH. Christensen et Prabhala (1998) concluent que la volatilité des options englobe le contenu en information dans la volatilité passée. Blair, Poon et Taylor (1999) comparent le contenu en information de la série d'indices de volatilités implicites VIX et des rendements *intra-day* de l'indice S&P100. Ils trouvent que toute l'information est révélée par la volatilité implicite, et qu'il n'y a donc pas d'apport informationnel dans les données de haute fréquence.

A l'inverse des conclusions de ces études, Beckers (1981) étudie le pouvoir prédictif de la volatilité implicite en tenant compte du problème des dividendes et trouve que toute l'information disponible n'est pas reflétée dans les prix d'options, remettant ainsi en cause l'efficience du marché des options. Enfin, Canina et Figlewski (1993) trouvent que la volatilité implicite des options sur S&P100 est un faible prédicteur de la volatilité future.

Dans l'ensemble, les études sur les marchés des changes tendent à accepter l'hypothèse d'efficience des marchés, alors que les marchés d'actions ont plutôt tendance à la rejetter.

On se propose dans cette section de tenter de répondre à la question posée, à savoir si la volatilité implicite est le meilleur prédicteur de la volatilité future. On compare le pouvoir prédictif que l'on peut tirer des volatilités implicites obtenu en inversant le modèle de Black et Scholes (1973) avec celui contenu dans une volatilité estimée à partir d'une extension d'un modèle de type GARCH estimé sur une série temporelle du sous-jacent

de l'option.

Dans un premier temps, on décrit les différentes formes de volatilités qui apparaissent dans les tests, à savoir volatilité historique, volatilité implicite et volatilité conditionnelle estimée à partir d'un modèle GARCH. Dans un second temps, on explique les différents tests de contenu en information dans les volatilités implicites. Enfin, on analysera les résultats empiriques.

2.1 Volatilités historiques, implicites et GARCH

Dans un premier temps il s'agit de vérifier le contenu informationnel de la volatilité implicite. Si effectivement il y a de l'information dans les volatilités implicites, on peut dans un second temps tester l'hypothèse jointe de savoir si le modèle d'évaluation d'option choisi est bien spécifié et si la volatilité est bien la meilleure prévision de la volatilité future.

Les options portent sur un sous-jacent dont le prix à l'instant t sera donné par S_t et on note $R_t = \ln(S_{t+1}/S_t)$ le rendement sur l'intervalle $(t, t+1)$. On distingue trois types de volatilités : la volatilité historique, s_t, la volatilité implicite σ_t et la volatilité GARCH h_t.

2.1.1 Volatilités non conditionnelles

Variance future réalisée

La variance réalisée future notée s_t est calculée comme la moyenne arithmétique des rendements carrés des T prochains jours de trading :

$$s_t^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} R_{t+i}^2 \tag{2.1}$$

Variance historique

On peut calculer la variance historique sous la forme d'une moyenne mobile. Celle-ci représente une simple prévision de la variance du sous-jacent sur une fenêtre de N jours

et s'écrit :

$$s_t^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} R_{t-i+1}^2 \tag{2.2}$$

2.1.2 Volatilités conditionnelles GARCH

Le rôle important joué par le risque dans la théorie économique d'aujourd'hui a nécessité le développement de nouvelles techniques économétriques de séries temporelles permettant la modélisation de variances et covariances dépendantes du temps. Les modèles ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) introduits par Engle (1982) permettent de faire une distinction entre les moments conditionnels et non conditionnels du second ordre. Si la matrice de variance-covariance des variables peut être invariante à travers le temps, celle des variance-covariance conditionnelle dépend des états passés du monde. On rappelle la définition d'un modèle ARCH :[1]

Définition 6 *On note $\{\varepsilon_t\}$ un processus stochastique à temps discret dont la moyenne et la variance conditionnelles sont des fonctions paramétrisées par un vecteur de dimension finie $\theta \in \Theta \subseteq R^m$.*

On dit que le processus $\{\varepsilon_t\}$ suit un modèle ARCH si l'espérance conditionnelle est nulle

$$E\left(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, ...\right) = 0, t = 1, 2, ..., \tag{2.3}$$

et la variance conditionnelle dépend de la tribu engendrée par les observations passées $\{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, ...\}$

$$h_t^2 = E\left(\varepsilon_t^2 / \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, ...\right). \tag{2.4}$$

Rappellons brièvement quelques comportements que peut suivre le rendement de l'actif :

- la leptokurticité : les queues de distribution des rendements tendent à être épaisses,
- le regroupement de volatilité : de fortes variations tendent à être suivies par de fortes variations, et des faibles variations par des faibles (Mandelbrot (1963)),

[1] On trouvera une bonne revue de littérature sur les modèles ARCH dans Bollerslev, Engle et Nelson (1994).

- les effets de levier : les variations du prix de l'actif sont en général corrélées négativement avec les variations de la volatilité de l'actif,
- la prise en compte des jours de fermeture de marché, l'information accumulée lorsque le marché est fermé a tendance à se révéler quand il rouvre,
- les événements prévisibles : la diffusion d'une importante information prévisible est associée à une hausse de volatilité.

La modélisation des deux premiers comportements est assez bien prise en compte par un modèle de type GARCH(p,q), généralisation des modèles ARCH introduite par Bollerslev (1986) pour lequel la volatilité s'écrit :

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}^2. \tag{2.5}$$

En particulier le modèle GARCH(1,1) est donné par :

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2, \tag{2.6}$$

sous les contraintes $\alpha_0 > 0$, α_1, $\beta \geq 0$ qui imposent la positivité de la volatilité. Le processus est stationnaire si et seulement si $\alpha_1 + \beta < 1$, auquel cas la variance non conditionnelle est donnée par $\text{var}(\varepsilon_t) = \alpha_0/(1 - \alpha_1 - \beta)$.

Pour prendre en compte les effets de levier, on doit faire dépendre h_t^2 non plus uniquement de la taille des résidus passés, mais également du signe. C'est ce que permettent de faire les GARCH asymétriques dont on peut citer l'absolute GARCH ou AGARCH(1,1) proposé par Engle (1990)

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \delta \varepsilon_{t-1} + \beta h_{t-1}^2, \tag{2.7}$$

l'exponentiel GARCH ou EGARCH(1,1) de Nelson (1991) :

$$\ln(h_t^2) = \alpha_0 + \left(\theta \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} + \gamma(|\frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}) \right) + \beta \ln(h_{t-1}^2), \tag{2.8}$$

sans aucune contrainte nécessaire sur les paramètres,

le GJR(1,1) introduit par Glosten, Jagannathan et Runkle (1993) :

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{t-1}<0\}} + \beta h_{t-1}^2, \tag{2.9}$$

avec $\alpha_0 > 0$, α, $\beta \geq 0$ et $\alpha+\gamma \geq 0$. La volatilité est stationnaire lorsque $\alpha+\beta+\gamma/2 < 1$. Cette formulation permet une réponse quadratique de la volatilité aux nouvelles avec des coefficients différents selon qu'elles sont bonnes ou mauvaises.

On caractérisera le rendement par l'équation suivante incluant un effet *in mean* :

$$R_t = \lambda_0 + \lambda_1 h_t^2 + \varepsilon_t,$$

où ε_t suit une loi donnée de variance h_t^2.

D'autres modèles ont été proposés dans la littérature. Ainsi, Zakoïan (1991) introduit les modèles hétéroscédastiques à seuil pour modéliser la présence d'asymétrie.

2.1.3 Volatilités implicites et volatilités à-la-monnaie

On note $\sigma_{t,T}$ la volatilité implicite d'une option de maturité T pour un ensemble de prix d'exercice. Si le prix théorique d'une option d'achat est donné par $C(t, F, K_j, T)$, $j = 1, ..., m$ où m est le nombre de prix d'options observés, la volatilité implicite est calculée par minimisation des moindres carrés non linéaires comme :

$$\sigma_{t,T}^{\text{imp}} = \arg\min_{\sigma} \sum_{j=1}^{m} \left(\widehat{C}_j - C(t, F, K_j, T; \sigma)\right)^2, \tag{2.10}$$

où $\widehat{C}_j$ représente le prix observé de l'option d'achat de prix d'exercice K_j et de maturité T. La volatilité à-la-monnaie correspond à la volatilité implicite de l'option dont le prix d'exercice est le plus proche du prix à terme du sous-jacent. Elle est calculée ainsi :

$$\sigma_{t,T}^{\text{atm}} = \arg\min_{\sigma} \left(\widehat{C}_{\text{atm}} - C(t, F, K_{\text{atm}}, T; \sigma)\right)^2, \tag{2.11}$$

où $\widehat{C}_{\text{atm}}$ et K_{atm} représentent respectivement le prix observé et le prix d'exercice à-la-monnaie.

Pour ramener ces deux mesures de volatilité d'horizon T à un horizon d'un jour, on

retient comme mesure de la volatilité implicite et de la volatilité à-la-monnaie :

$$\begin{aligned} \sigma_{t,\mathrm{imp}} &= \frac{\sigma_{t,T}^{\mathrm{imp}}}{\sqrt{365}}, \\ \sigma_{t,\mathrm{atm}} &= \frac{\sigma_{t,T}^{\mathrm{atm}}}{\sqrt{365}} \end{aligned}$$

2.2 Tests d'efficience des marchés

Nous nous attachons ici à tester deux hypothèses : "les volatilités implicites ou à-la-monnaie contiennent-elles de l'information non prise en compte dans les volatilités issues de modèles de séries temporelles ?" et "les volatilités implicites ou à-la-monnaie sont-elles de bons prédicteurs des volatilités futures ?". Dans le cas d'une réponse positive, nous testerons si la volatilité implicite est bien le meilleur prédicteur de la volatilité future, comme ce devrait être le cas dans un marché efficient.

Pour tester l'hypothèse "les volatilités implicites contiennent de l'information qui permet de prévoir les volatilités futures" Jorion(1995) conseille de tester les équations suivantes :

$$s_t^2 = a + b_1\sigma_{t,\mathrm{imp}}^2 + b_2 h_{t,\mathrm{ST}}^2 + e_t, \tag{2.12}$$

$$s_t^2 = a + b_1\sigma_{t,\mathrm{atm}}^2 + b_2 h_{t,\mathrm{ST}}^2 + e_t, \tag{2.13}$$

où s_t^2 est la volatilité réalisée en t donnée par (2.1), $\sigma_{t,\mathrm{imp}}^2$ (resp. $\sigma_{t,\mathrm{atm}}^2$) est la volatilité implicite (resp. à-la-monnaie) donnée par (2.10) (resp. (2.11)) et $h_{t,\mathrm{ST}}^2$ est la volatilité issue d'un modèle de série temporelle donnée par (2.6), (2.8) ou (2.9). On pourra conclure que la volatilité implicite apporte un contenu informationnel supplémentaire à une volatilité conditionnelle si le coefficient b_2 est significativement différent de 0.

Dans un second temps, on cherche à comparer le pouvoir prédictif de la volatilité

implicite sur une autre forme de volatilité et l'on peut procèder aux régressions suivantes :

$$s_t^2 = a + bs_{t-1}^2 + e_t, \tag{2.14}$$

$$s_t^2 = a + bh_{t-1,\mathrm{ST}}^2 + e_t, \tag{2.15}$$

$$s_t^2 = a + b\sigma_{t-1,\mathrm{atm}}^2 + e_t, \tag{2.16}$$

$$s_t^2 = a + b\sigma_{t-1,\mathrm{imp}}^2 + e_t, \tag{2.17}$$

Si la volatilité implicite est un meilleur prédicteur de la volatilité future, alors on s'attend à ce que le coefficient b soit proche de 1, que le coefficient a soit proche de 0 et que le R^2 soit supérieur aux R^2 des autres régressions.

Les résultats obtenus vont dépendre fortement de la présence de biais dans l'estimation. Le premier problème à soulever est l'existence d'un biais lié au choix du modèle d'évaluation d'option utilisé pour calculer la volatilité implicite. Pour remédier à ce problème, nous testerons l'équation (2.17) avec une volatilité issue du modèle en polynômes d'Hermite, dont nous avons montré dans la seconde partie de la thèse qu'il était mieux adapté aux options sur indices que le modèle de Black. Un second problème vient de la période de l'échantillon choisie, donc de la stabilité des résultats à travers le temps. Pour diversifier les résultats, les régressions seront faites sur trois périodes différentes, dont une première période relativement calme, une seconde période plus agitée et la troisième période qui englobe les deux premières.

2.3 Résultats empiriques

2.3.1 Méthode d'estimation

Les modèles GARCH, EGARCH et GJR sont estimés par maximum de vraisemblance. La fonction de log-vraisemblance L de $x = (x_1, ..., x_N)'$ est donnée par :

$$L(x;\beta) = \sum_{t=1}^{N} L_t(x_t) \tag{2.18}$$

où L_t est la fonction de log-vraisemblance de x_t, telle que :

$$L_t(x) = -\ln(h_t) - \ln\left(f(\frac{x}{h_t};\nu)\right)$$

où f est la fonction de densité des résidus standardisés, ε_t et ν un paramètre qui caractérise éventuellement cette densité.

Si les modèles ARCH permettent de capturer la plus grande partie des régularités de la volatilité le plus souvent rencontrées, l'hypothèse de distributions des innovations est souvent une hypothèse gaussienne. Même si les modèles ARCH avec des erreurs gaussiennes résultent dans une kurtosis supérieure à celle de la loi normale pour les rendements, ils ne capturent pas suffisamment le degré de leptokurticité des rendements en fréquence élevée. Pour pallier cet inconvénient, nous introduisons une forme de distribution inspirée de Bollerslev (1987).

Bollerslev (1987) propose d'introduire une distribution de Student ou t-distribution pour les innovations :

$$f(z;\nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{z^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \tag{2.19}$$

où $\nu > 2$ est le nombre de degrés de liberté. $\Gamma(.)$ représente la fonction Gamma. La t-densité (2.19) est de moyenne nulle et de variance unitaire. Elle converge vers la loi normale quand $\nu \to \infty$. Lorsque $4 < \nu < \infty$, la kurtosis conditionnelle existe et est égale à $3(\nu-2)/(\nu-4)$, qui excède celle de la loi normale. Pour assurer l'existence du quatrième moment, on préfère souvent modéliser $0 < 1/\nu < 1/4$[2].

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\beta}_{MLE}$ est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\widehat{\beta}_{MLE} = \arg\max_{\beta}\left[L(x;\beta)\right].$$

[2] La loi est GED est également souvent utilisée pour caractériser la loi des innovations. La loi GED est donnée par :

$$\begin{aligned} f(x;\nu) &= \frac{\nu}{2^{(1+1/\nu)}\Gamma(1/\nu)}\exp(-\frac{1}{2}|\frac{x}{\lambda}|^{\nu}),\ 0<\nu<\infty \\ \lambda &= 2^{-1/\nu}\sqrt{\frac{\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)}} \end{aligned}$$

où f est la loi normale lorsque $\nu = 2$. Lorsque $\nu < 2$, la distribution est plus leptokurtique que la distribution de la loi normale.

On travaille avec des données en fréquence quotidienne. Les volatilités implicites choisies sont des volatilités implicites pour une maturité de 3 mois interpolée. Les rendements sont donnés par $R_t = \ln(S_{t+1}/S_t)$. Les données sont les prix de clôture des options sur CAC 40 et les prix de clôture de l'indice du 3 janvier 1995 au 29 décembre 1998 en données quotidiennes offrant un échantillon de 1040 observations.

2.3.2 Estimation des modèles GARCH

On présente dans le tableau (2.3.1) les résultats des estimations de la volatilité conditionnelle par des modèles GARCH, EGARCH et GJR avec un effet *in-mean*. Les statistiques de Student calculées en tenant compte de l'hétéroscédasticité apparaissent entre parenthèses. La significativité des paramètres est indiquée par les exposants a (10%), b (5%) et c (1%). Les paramètres de la moyenne λ_0 et λ_1 ne sont jamais significatifs, mais nous n'en tiendrons pas compte dans la suite puisqu'ils n'ont aucun rôle dans l'objectif de cette étude. Les paramètres α_1 et β des trois modèles sont significatifs à 90% (à l'exception du modèle GJR) et on a toujours la condition $\alpha_1 + \beta < 1$ qui assure la stationnarité du processus de volatilité. Il n'y a pas de différence sensible entre les log-vraisemblances des modèles GJR et EGARCH qui sont supérieures à celle du GARCH. Pour chacun des modèles, on note que lorsqu'on suppose une loi de Student, la vraisemblance est toujours supérieure à celle obtenue en postulant une loi normale sur les innovations. On peut confirmer cette remarque par un test de rapport des vraisemblances[3]. La valeur du quantile à un niveau de 5% d'une variable khi-deux à un degré de liberté étant égale à $3,84$, on rejette la nullité du paramètre ν à 95% pour les trois modèles. Concernant l'asymétrie, dans le GJR, l'effet d'un choc positif sur le rendement est caractérisé par α_1 ($0,012$ avec la normale et $0,010$ avec la Student) et l'effet d'un choc négatif par $\alpha_1 + \gamma$ ($0,089$ avec la normale et $0,087$ avec la Student). Le paramètre γ est significativement positif à 99% (resp. 95%) pour la loi normale (resp. Student), impliquant l'asymétrie de la volatilité. Dans l'EGARCH, la réponse à un choc positif est donnée par $\alpha_1 + \gamma$ ($0,024$ avec la loi normale et $0,023$ avec la Student) et la réponse à un choc négatif par $-\alpha_1 + \gamma$ ($-0,084$ avec la loi normale et $-0,081$ avec la Student). Contrairement au GJR, l'asymétrie est

[3] Le test du rapport des vraisemblances est le suivant. On cherche à tester l'hypothèse H_0 : $(\beta = 0)$ à partir des vraisemblances issues d'un modèle contraint, $L(x; \widehat{\alpha_c}, 0)$ et d'un modèle non contraint, $L(x; \widehat{\alpha}_{nc}, \widehat{\beta})$.

L'idée est d'accepter l'hypothèse nulle si l'écart entre les maxima contraint et non contraint est assez petit. La statistique du test est :

$$\xi = 2\left[L(x; \widehat{\alpha}_{nc}, \widehat{\beta}) - L(x; \widehat{\alpha}_c, 0)\right]$$

et est à valeurs positives. On montre que sous H_0 $\xi \longrightarrow \chi^2(r)$ où r est la taille de β. On accpete H_0 si $\xi < \chi^2_{95\%}(r)$, où $\chi^2_{95\%}(r)$ représente le quantile à 95% d'une loi du khi-deux à r d.d.l. et on refuse sinon.

assurée par la significativité du paramètre α_1. Le paramètre de la Student ν est supérieur à 4 à un niveau de 99% dans tous les modèles et vaut $9,696$ pour le GARCH, $11,421$ pour l'EGARCH et $10,920$ pour le GJR indiquant une forte leptokurticité de la distribution historique. On applique le critère d'Akaike ($AIC = -2ln(L) + 2$(nombre de paramètres)) pour comparer les modèles estimés. Plus la valeur du critère est faible, meilleur est le modèle pour se caler aux données. Nous allons utiliser les paramètres obtenus dans le tableau (2.3.1) pour tester le pouvoir prédictif des modèles GARCH et le comparer à celui des volatilités implicites et à-la-monnaie.

2.3.3 Estimation de contenu en information

Le tableau (2.3.2) montre le résultat des régressions linéaires (2.12)-(2.13). Le contenu informationnel dans les volatilités estimées à partir des options est toujours supérieur à celui des volatilités conditionnelles issues des modèles de séries temporelles. La volatilité implicite explique plus la volatilité future que la volatilité conditionnelle. Le R^2 est toujours supérieur et la constante n'est jamais significativement différente de 0 à un niveau de 1%. Dans la régression incluant la volatilité à-la-monnaie et la volatilité EGARCH comme variable explicative qui possède le plus grand R^2, elle est même significativement nulle. Dans tous les cas cependant le R^2 reste relativement faible et ces deux mesures de volatilités restent largement insuffisantes pour expliquer la volatilité future.

Le tableau (2.3.3) montre le résultat des régressions linéaires (2.14)-(2.17). La volatilité future réalisée est calculée avec $T = 20$, qui représente environ un horizon d'un mois. Ce test vise à évaluer la capacité des différentes formes de volatilité à prévoir la volatilité future. De façon à nuancer les résultats, le test est fait sur trois périodes : la période couvrant les deux années 1995 et 1996, avec un marché assez plat, la période couvrant les deux années 1997 et 1998 qui ont vu le marché des actions en plein essor, mais incluant deux crises, donc un marché agité par opposition aux deux premières années et enfin une troisième période rassemblant les deux autres de 1995 à 1998. Le coefficient de courbure b est significativement positif dans toutes les régressions. La valeur du coefficient est cependant nettement supérieur pour les volatilités historiques passées que pour les volatilités tirées des options et des séries temporelles. Curieusement, on note que le pouvoir prédictif est supérieur avec les volatilités à-la-monnaie qu'il ne l'est avec les volatilités implicites sur la période "agitée" et inversement pour la période "calme". Cette observation est surprenante puisque dans un marché très volatil et donc à fortes fluctuations, on s'attend à ce que la volatilité implicite qui incorpore les anticipations extrêmes liés à

tous les prix d'exercice y compris ceux qui sont très éloignés de la monnaie, contienne plus d'information sur la volatilité future que la volatilité à-la-monnaie.

Concernant les modèles de série temporelle, le modèle GARCH s'avère être un meilleur prédicteur que les modèles EGARCH et GJR sur la période "calme", alors que sur la période "agitée", ce sont ces deux derniers qui permettent de mieux prévoir la volatilité future.

L'analyse de ces résultats remet fortement en cause l'efficience du marché des options sur actions en France pour la période de janvier 1995 à 1998. Les volatilités issues des options, bien que révisées chaque jour à l'annonce de nouvelles informations, expliquent moins bien la volatilité future que ne l'expliquent les volatilités réalisées passées. Leur pouvoir prédictif reste cependant supérieur à celui d'un modèle de type GARCH. Plusieurs explications peuvent être soulevées sur ces résultats allant à l'encontre de l'hypothèse d'efficience des marchés. La première est le biais lié à une mauvaise spécification du modèle de Black pour les options : cependant, l'utilisation d'une volatilité implicite issue d'un modèle d'évaluation d'options différent (les polynômes d'Hermite) n'améliore pas le pouvoir prédictif. Le coefficient de R^2 passe de $0,453$ avec une volatilité implicite Black à $0,443$ avec une volatilité implicite Hermite. On peut expliquer cette dernière observation de la façon suivante : le modèle des polynômes d'Hermite permet de prendre en compte les effets d'asymétrie et de coefficient d'applatissement, donc la variance d'un tel modèle contient assurément moins d'information que celle d'un modèle de type Black-Scholes. La seconde explication provient de l'ensemble des bruits inclus dans la volatilité implicite tels que les coûts de transactions, la liquidité des options, ...qu'il serait souhaitable de filtrer.

Tableau 2.3.1 : Estimation des modèle GARCH(1,1) et GJR(1,1).

Les statistiques entre parenthèses montrent les statistiques de Student calculées en tenant compte de l'hétéroscédasticité.

Pour chaque tableau, les exposants a, b et c assurent la significativité du paramètre à des niveaux respectifs de 10%, 5% et 1%.

	GARCH		GJR		EGARCH	
	Normale	Sudent	Normale	Student	Normale	Student
$\lambda_0(\times 10^3)$	$0,281$	$0,316$	$0,391$	$0,387$	$0,129$	$0,199$
	$(0,439)$	$(0,280)$	$(0,271)$	$(0,263)$	$(0,186)$	$(0,270)$
λ_1	$4,905$	$4,908$	$2,415$	$3,084$	$4,646$	$5,005$
	$(1,034)$	$(0,524)$	$(0,198)$	$(0,251)$	$(0,893)$	$(0,913)$
α_0	$0,014 \times 10^{-4}$	$0,015 \times 10^{-4}$	$0,026 \times 10^{-4}$	$0,028 \times 10^{-4}$	$-0,072^a$	$-0,075$
	$(1,477)$	$(1,160)$	$(1,020)$	$(1,062)$	$(-1,791)$	$(-1,502)$
α_1	$0,056^c$	$0,047^c$	$0,012$	$0,010$	$0,054^c$	$0,052^c$
	$(3,330)$	$(2,928)$	$(0,952)$	$(0,691)$	$(5,166)$	$(4,850)$
β	$0,939^c$	$0,943^c$	$0,930^c$	$0,931^c$	$0,984^c$	$0,983^c$
	$(47,994)$	$(41,764)$	$(27,713)$	$(29,125)$	$(110,44)$	$(88,083)$
γ			$0,077^c$	$0,077^b$	$-0,030^c$	$-0,029^c$
			$(2,406)$	$(2,274)$	$(-3,385)$	$(-2,771)$
$1/\nu$		$0,103^c$		$0,092^c$		$0,088^c$
		$(3,754)$		$(3,051)$		$(3,184)$
ν		$9,676$		$10,920$		$11,421$
$\ln L$	$3166,51$	$3173,96$	$3174,80$	$3180,19$	$3175,60$	$3180,43$
ξ	$14,90$		$10,78$		$9,66$	
AIC	$-6,12$	$-4,13$	$-4,13$	$-4,13$	$-4,13$	$-2,13$

Tableau 2.3.2 : Estimations des modèles (2.12)-(2.13) entre 1995 et 1998 :

(1) $s_t^2 = a + b_1\sigma_{t,\mathrm{imp}}^2 + b_2 h_{t,\mathrm{GARCH}}^2 + e_t$,

(2) $s_t^2 = a + b_1\sigma_{t,\mathrm{imp}}^2 + b_2 h_{t,\mathrm{EGARCH}}^2 + e_t$,

(3) $s_t^2 = a + b_1\sigma_{t,\mathrm{imp}}^2 + b_2 h_{t,\mathrm{GJR}}^2 + e_t$.

(4) $s_t^2 = a + b_1\sigma_{t,\mathrm{atm}}^2 + b_2 h_{t,\mathrm{GARCH}}^2 + e_t$,

(5) $s_t^2 = a + b_1\sigma_{t,\mathrm{atm}}^2 + b_2 h_{t,\mathrm{EGARCH}}^2 + e_t$,

(6) $s_t^2 = a + b_1\sigma_{t,\mathrm{atm}}^2 + b_2 h_{t,\mathrm{GJR}}^2 + e_t$.

	Constante	**implicite**	**à-la-monnaie**	**GARCH**	**EGARCH**	**GJR**	R^2
(1)	$0,837^b$	$0,696^c$		$0,244^c$			$0,477$
	$(2,156)$	$(10,382)$		$(4,218)$			
(2)	$0,287$	$0,621^c$			$0,362^c$		$0,510$
	$(0,766)$	$(13,389)$			$(9,238)$		
(3)	$1,084^c$	$0,645^c$				$0,276^c$	
	$(2,838)$	$(13,009)$				$(7,738)$	$0,498$
(4)	$0,602^a$		$0,863^c$	$0,106^a$			$0,508$
	$(1,655)$		$(13,336)$	$(1,867)$			
(5)	$0,338$		$0,719^c$		$0,270^c$		$0,527$
	$(0,947)$		$(14,827)$		$(6,537)$		
(6)	$0,875^b$		$0,760^c$			$0,188^c$	$0,519$
	$(2,401)$		$(14,823)$			$(5,027)$	

Tableau 2.3.3 : Estimations des modèles (2.14)-(2.17) :

(1) $s_t^2 = a + bs_{t-1}^2 + e_t$,

(2) $s_t^2 = a + b\sigma_{t-1,\mathrm{imp}}^2 + e_t$,

(3) $s_t^2 = a + b\sigma_{t-1,\mathrm{atm}}^2 + e_t$,

(4) $s_t^2 = a + b\sigma_{t-1,\mathrm{her}}^2 + e_t$,

(5) $s_t^2 = a + bh_{t-1,\mathrm{GARCH}}^2 + e_t$,

(6) $s_t^2 = a + bh_{t-1,\mathrm{EGARCH}}^2 + e_t$,

(7) $s_t^2 = a + bh_{t-1,\mathrm{GJR}}^2 + e_t$.

	1995-1996			1997-1998			1995-1998		
	$a \times 10^3$	b	R^2	$a \times 10^3$	b	R^2	$a \times 10^3$	b	R^2
(1)	$0,264^b$	$0,971^c$	$0,94$	$0,254^b$	$0,983^c$	$0,970$	$0,141^b$	$0,988^c$	$0,98$
	$(2,579)$	$(88,360)$		$(2,087)$	$(123,451)$		$(2,317)$	$(204,491)$	
(2)	$-1,591^b$	$1,128^c$	$0,32$	$4,484^c$	$0,704^c$	$0,197$	$0,795^b$	$0,932^c$	$0,45$
	$(-2,204)$	$(14,880)$		$(4,471)$	$(10,828)$		$(2,017)$	$(28,778)$	
(3)	$1,233^b$	$0,839^c$	$0,27$	$3,650^c$	$0,780^c$	$0,268$	$0,720^b$	$0,956^c$	$0,49$
	$(2,054)$	$(13,207)$		$(4,330)$	$(13,211)$		$(1,950)$	$(31,002)$	
(4)	$1,198^a$	$0,770^c$	$0,25$	$4,565^c$	$0,628^c$	$0,183$	$1,273^c$	$0,811^c$	$0,44$
	$(1,866)$	$(12,535)$		$(4,646)$	$(10,325)$		$(3,298)$	$(28,181)$	
(5)	$3,151^c$	$0,657^c$	$0,28$	$7,515^c$	$0,521^c$	$0,201$	$3,285^c$	$0,757^c$	$0,40$
	$(7,117)$	$(13,640)$		$(11,242)$	$(10,948)$		$(9,564)$	$(25,964)$	
(6)	$4,271^c$	$0,476^c$	$0,23$	$6,974^c$	$0,580^c$	$0,327$	$3,328^c$	$0,731^c$	$0,40$
	$(10,273)$	$(11,830)$		$(13,222)$	$(15,224)$		$(9,614)$	$(25,624)$	
(7)	$5,251^c$	$0,415^c$	$0,18$	$8,371^c$	$0,470^c$	$0,290$	$4,856^c$	$0,619^c$	$0,39$
	$(13,622)$	$(10,218)$		$(17,527)$	$(13,975)$		$(16,424)$	$(25,131)$	

Figure 3.7.a: volatilites historiques et volatilites implicites a horizon de 3 mois des options CAC 40:
periode de janvier 1995 a decembre 1998

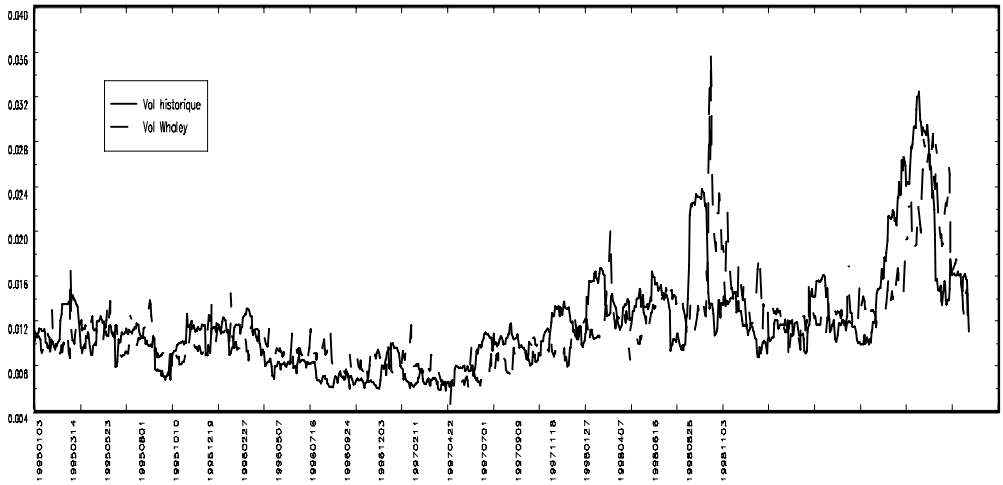


Figure 3.7.b: volatilites historiques et volatilites a-la-monnaie a horizon de 3 mois des options CAC 40:
periode de janvier 1995 a decembre 1998

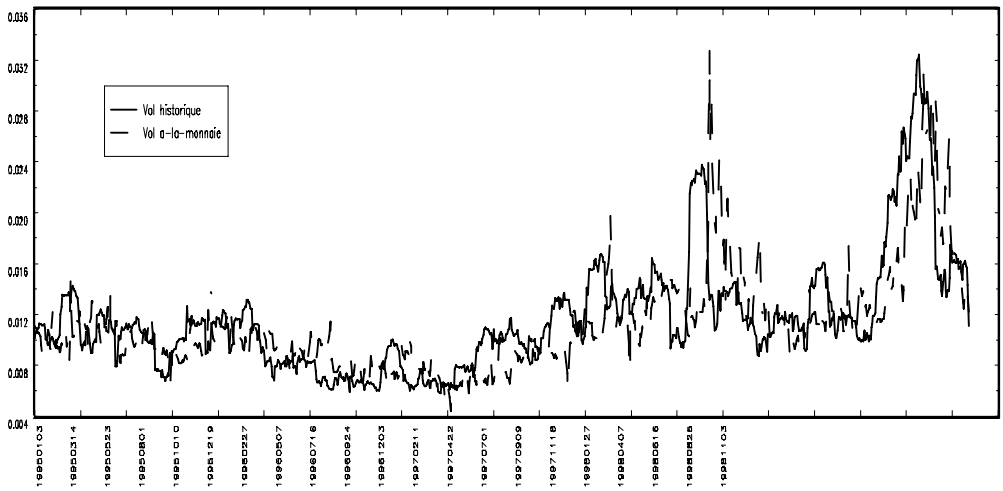


Figure 3.7.c: volatilites historiques et volatilites Hermite a horizon de 3 mois des options CAC 40:
periode de janvier 1995 a decembre 1998

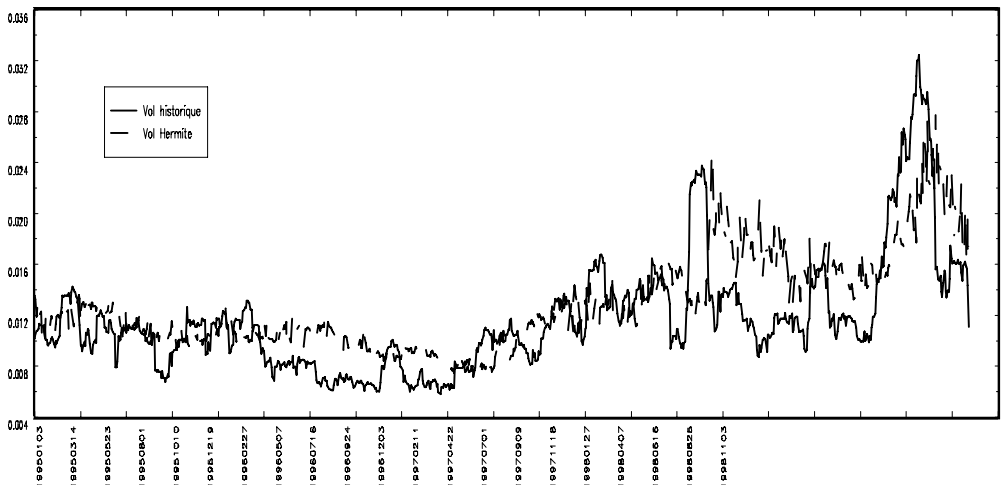


Figure 3.8.a: volatilites historiques et volatilites GARCHsur le CAC 40:
periode de janvier 1995 a decembre 1998

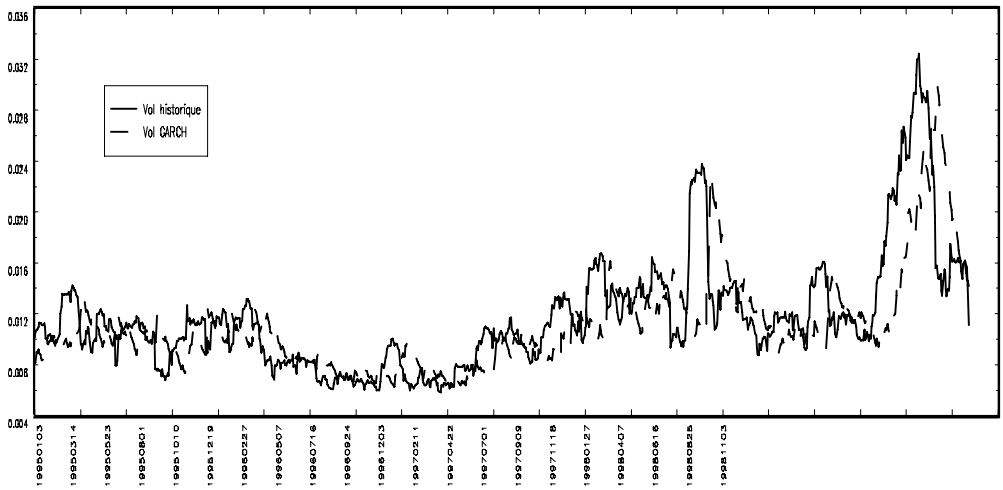


Figure 3.8.b: volatilites historiques et volatilites EGARCH sur le CAC 40:
periode de janvier 1995 a decembre 1998

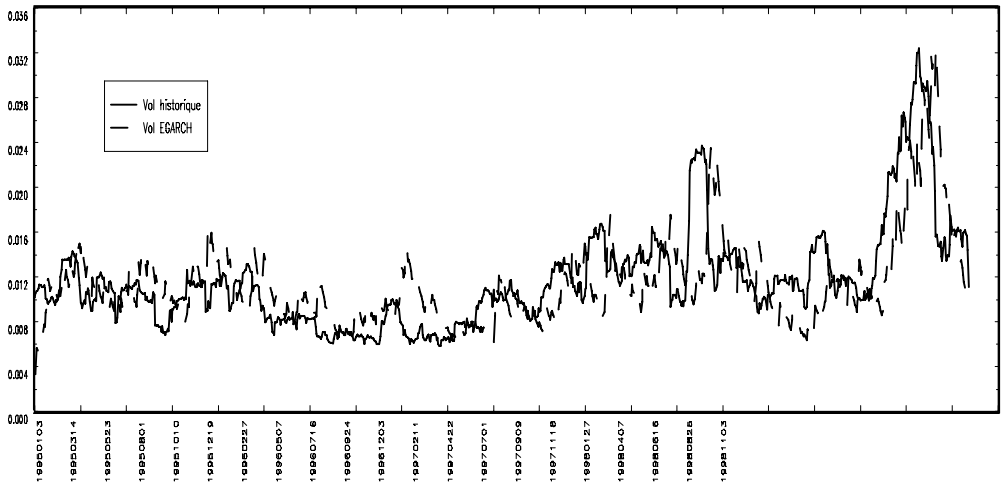


Figure 3.8.c: volatilites historiques et volatilites GJR sur le CAC 40:
periode de janvier 1995 a decembre 1998

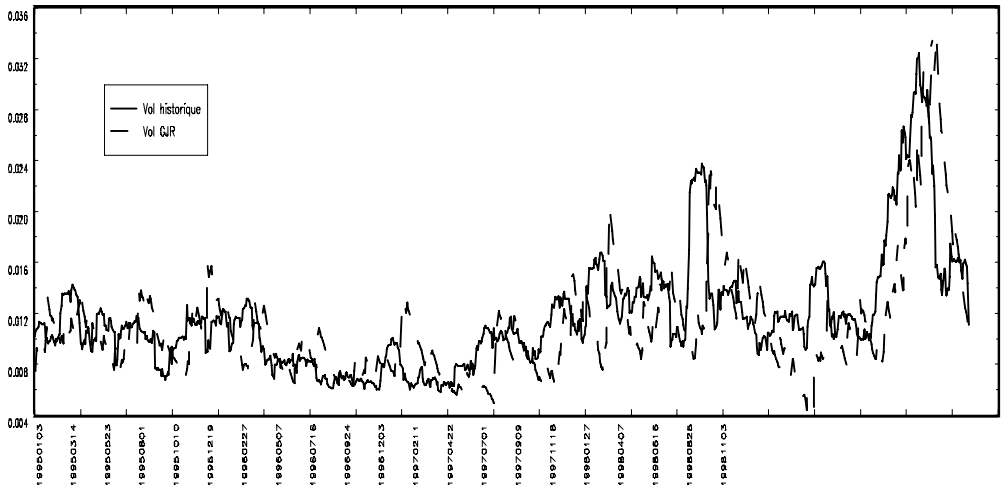
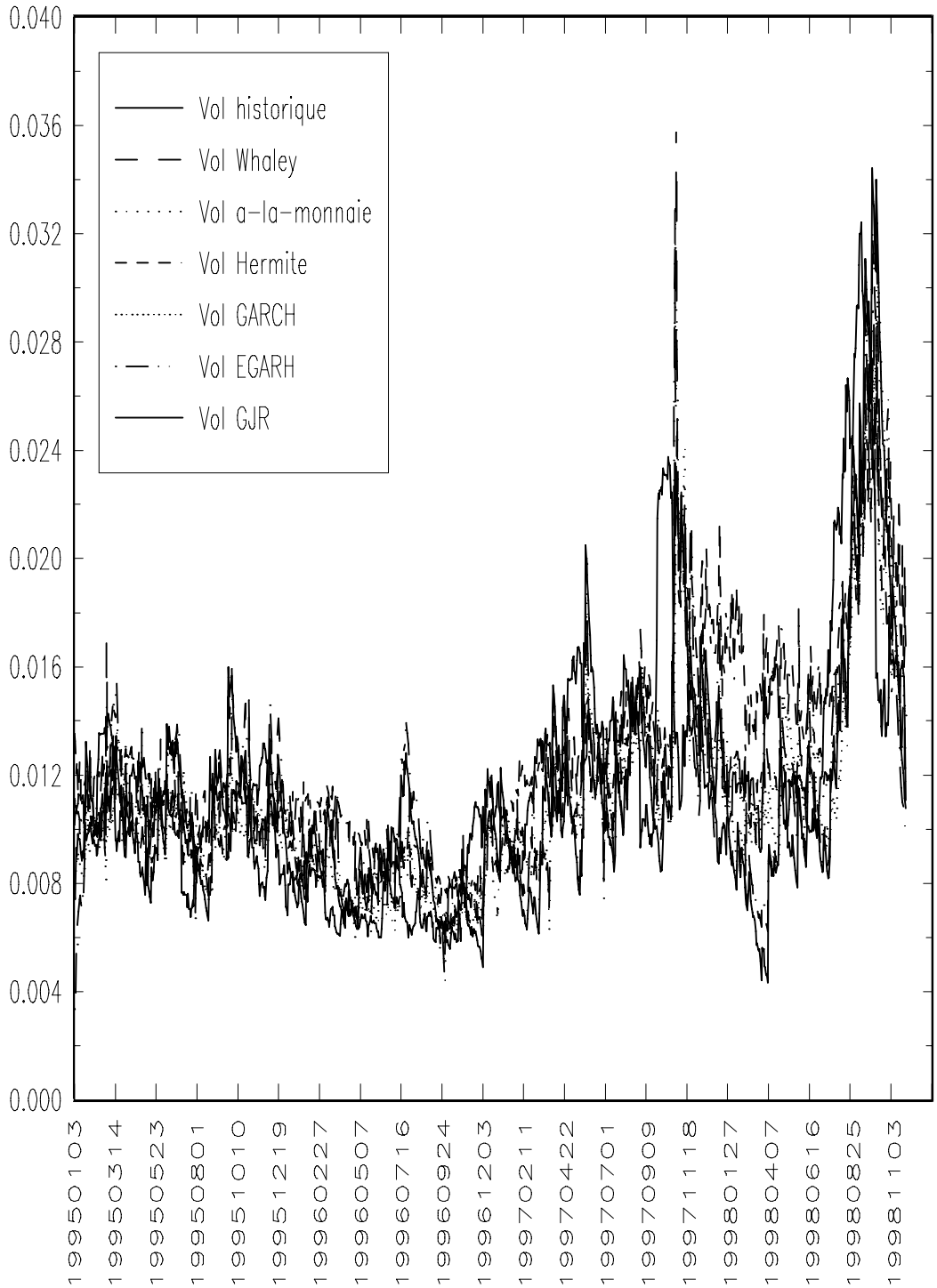


Figure 3.9: volatilites historiques, conditionnelles et implicites du CAC 40: periode de janvier 1995 a decembre 1998



Chapitre 3

Tests de la théorie des anticipations à partir des options

La théorie des anticipations dans sa forme originale consiste à supposer que l'excès de rendement anticipé issu de deux placements de même horizon est constant à travers le temps. Plus précisément, on note $R_t^F(m,n)$ le rendement d'un placement à terme en t pour la date $t+m$ et de maturité n et $R_{t+m}(n)$ le rendement entre $t+m$ et $t+m+n$ d'un placement au comptant en $t+m$ d'un taux de maturité n. Alors, la théorie des anticipations postule que la quantité $\pi_t^{(m,n)}$, appelée *prime de terme* et définie par :

$$\pi_t^{(m,n)} = R_t^F(m,n) - E_t\left[R_{t+m}(n)\right], \tag{3.1}$$

est constante dans le temps.

Les premiers travaux visant à tester l'équation (3.1) par des méthodes de régression sont menés par Hamburger et Platt (1975) et Fama (1976) puis Shiller, Campbell et Schoenholtz (1983). Ils se sont intéressés à tester l'équation (3.1) réécrite avec la variation du taux au comptant et l'écart entre le taux à terme et le taux au comptant en régressant le premier sur le second :

$$r_{t+m}(n) - r_t(n) = \alpha + \beta\left(f_t(m,n) - r_t(n)\right) + \varepsilon_t \tag{3.2}$$

où $r_t(n)$ est le taux court terme en t d'horizon n et $f_t(m,n)$ est le taux forward en t d'une opération à terme entre $t+m$ et $t+m+n$. Par exemple, $f_t(m,n)$ peut être le taux à terme sous-jacent d'une option sur contrat PIBOR 3 mois de maturité m. Dans ce cas, on a $n = 0,25$. Cette formulation permet de tester directement la théorie des anticipations en testant l'égalité à 1 du paramètre β.

Hamburger et Platt (1975), Fama (1976) et Shiller, Campbell et Schoenholtz (1983) utilisent des Treasury Bill avant 1974, donc des obligations de maturités inférieures à 1 an. Ils trouvent que les taux forward non ajustés des primes de risque sont de mauvais prédicteurs des taux courts futurs et concluent que les taux forward ne captent pas aussi bien le comportement des taux futurs que des modèles naïfs d'extrapolation des taux courts passés. Fama et Bliss (1987) utilisent les taux forward de maturité longue (U.S. Treasury Bonds). Ils constatent que les taux forward à 1 an permettent de prévoir les variations des taux d'intérêt à 1 an dans 2 à 4 ans et que le pouvoir prédictif augmente avec la maturité. Ils attribuent cette amélioration à la propriété de retour à la moyenne des taux d'intérêt à 1 an. Mishkin (1988) affine les résultats de Fama (1984) en utilisant des techniques économétriques qui permettent de corriger les écart-types pour des données d'overlapping et pour l'hétéroscédasticité conditionnelle. Ils trouvent que la structure par termes aide à prédire les mouvements des taux d'intérêt quelques mois plus tard et, en actualisant les résultats de Fama, ils constatent que le pouvoir prédictif des taux forward est généralement meilleur d'octobre 1982 à juin 1986 que durant la période antérieure à 1974 retenue par Fama. Stambaugh (1988) et Jorion et Mishkin (1991) confirment également les résultats de Fama (1984). Jondeau (1998) présente une analyse théorique et une étude empirique complète de toutes les formes de théorie des anticipations.

3.1 Le modèle

Il existe une littérature étendue sur la question de savoir si les prix forward sont des prédicteurs non biaisés des prix spots futurs. Gerlach et Smets (1995) en proposent une brève revue. Bien que l'absence de biais puisse être rejetée aux Etats-Unis, la conclusion générale, confirmée par les travaux de Gerlach et Smets, est que les conclusions des différentes études sont moins claires en ce qui concerne les autres pays. Pour le Royaume-Uni, les conclusions sont mitigées. Hardouvelis (1994) et Breedon et Brookes (1994) trouvent que l'absence de biais ne pouvait pas être rejetée, alors que Cuthbertson (1992) et Hurn, Moody et Muscateli (1994) ont été plus relatifs. Plus récemment, Rossi (1996) a

trouvé que les taux à terme LIMEAN à trois et six mois étaient des prédicteurs non biaisés des taux spots futurs sur la période de 1982 à 1995. Si le chapitre précédent s'est attaché à vérifier l'hypothèse de la théorie des anticipations sur les volatilités historiques, implicites et conditionnelles sur les indices, nous nous attacherons, dans le présent chapitre, à tester cette hypothèse sur les taux.

Dans cet esprit, Butler et Davies (1998) suggèrent de régresser les prix spots sur les prix à terme ainsi que les moments jusqu'à l'ordre 4. Ils proposent de tester dans un premier temps une simple régression des prix spots sur les prix forward, puis dans un second temps d'ajouter dans la régression les moments d'ordre 2, 3 et 4 du prix. Nous nous proposons dans cette section de suivre l'idée de Butler et Davies mais en travaillant sur les taux et non les prix, comme le suggèrent Hamburger et Platt (1975), Fama (1976) puis Shiller, Campbell et Schoenholtz (1983) qui testent la relation suivante sur les taux d'intérêt :

$$\Delta^m r(t, t+n) = \alpha + \beta \Delta^m f(t, t+n) + \varepsilon_t, \tag{3.3}$$

avec $\Delta^m r(t,t+n) = r(t+m,t+m+n) - r(t,t+n)$, $\Delta^m f(t,t+n) = f_m(t,t+n) - r(t,t+n)$ où $r(t,t+n)$ est un taux court de maturité n (dans le cas du PIBOR 3 mois, $n = 0,25$) en t et $f_m(t,t+n)$ est le taux sous-jacent d'une option sur contrat à terme de taux d'intérêt d'échéance $t+m$ (dans le cas des options sur contrat PIBOR 3 mois, $f_m(t,t+n) = 100 - F_{t,t+m}$).

Intuitivement, lorsque $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, on peut dire que le spread forward est un prédicteur sans biais du spread futur.

A la relation (3.4), Tobin (1958) et Merton (1980) ajoutent la volatilité. Nous allons plus loin en ajoutant les moments supérieurs du taux PIBOR estimés à partir des options. On doit alors estimer les modèles suivants :

$$\Delta^m r(t, t+n) = \alpha + \beta \Delta^m f(t, t+n) + \gamma SD_t^r + \delta SK_t^r + \phi(KU_t^r - 3) + \varepsilon_t \tag{3.4}$$

où SD_t^r, SK_t^r et KU_t^r représentent les séries des écart-types, skewness et kurtosis du taux PIBOR sous la probabilité neutre au risque estimés par l'une des méthodes vues dans la seconde partie sur une période de temps donnée par un échantillon de prix d'options.

L'estimation des équations (3.3) et (3.4) soulève un problème économétrique lié à l'effet

de chevauchement (overlapping). Le spread forward chaque jour constitue une prévision du spread instantané futur sur des périodes se chevauchant. Les termes d'erreurs sont seriellement corrélés, car le terme d'erreur qui peut être considéré comme une erreur de prévision, n'est réalisé qu'après $n-1$ périodes et ε_t va suivre un MA$(n-2)$. Les estimations des paramètres restent efficaces mais le chevauchement fait apparaître un biais à la baisse dans les écart-types issus des moindres carrés ordinaires (MCO). Une solution à ce problème est apportée par Hansen et Hodrick (1980) qui donnent l'estimation suivante de la matrice de variance-covariance des paramètres estimés :

$$V = (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1},$$

où X représente la matrice des variables explicatives des équations (3.3) et (3.4) et Ω représente la matrice de variance-covariance des résidus $E(\varepsilon_t\varepsilon_t')$.

Cependant les éléments de la matrice Ω ne permettent pas de prendre en compte l'hétéroscédasticité conditionnelle des termes d'erreurs. White (1980) corrige la matrice de Hansen et Hodrick pour l'hétéroscédasticité. Le problème de ces deux matrices est qu'elles ne sont pas nécessairement définies positives et les écart-types des coefficients risquent d'être négatifs. Newey et West (1985) ont proposé une matrice de variance-covariance qui garantit que la matrice est définie positive. Les éléments de la matrice sont donnés par :

$$\begin{aligned} \omega(i,j) &= \left[1 - \frac{p}{(q+1)}\right]\widehat{\varepsilon}_i\widehat{\varepsilon}_j, \text{ si } p \leq q \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , \text{ ailleurs.} \end{aligned}$$

3.2 Résultats

Les graphiques (3.10) à (3.11) montrent le résultat des estimations des skewness et kurtosis du taux Pibor 3-mois, $R_T(0,25)$ sur la période de janvier 1993 à décembre 1997, calculés avec les méthodes de développement en polynômes d'Hermite et de Shimko. Le tableau (3.2.1) montre les résultats des tests de stationnarité des séries $\Delta^1 r(t,t+n)$,

$\Delta^m f(t, t+n)$ et des séries temporelles des écart-types, skewness et excès de kurtosis du taux PIBOR estimés à partir les modèles de développements en polynômes d'Hermite (HER) et lissage de Shimko (SHI) interpolés pour une maturité de 3 mois. On a utilisé un test de Dickey et Fuller augmenté (ADF), dont on donne la méthodologie en annexe pour vérifier l'éventuelle présence de racine unitaire dans les données. p_c est la valeur du nombre de retards nécessaires pour rendre les résidus bruits blancs et BP est la valeur de la statistique de Box-Pierce associée. Comme il existe 3 tests ADF selon que les séries temporelles incluent ou non une constante et/ou une tendance déterministe, on reporte dans le tableau les statistiques de Student $t(\phi_a)$ (ni constante ni tendance déterministe), $t(\phi_b)$ (constante sans tendance) ou $t(\phi_c)$ (constante et tendance déterministe) associée au paramètre $\phi = \rho - 1$. La seule série non stationnaire est la série des volatilités issues du modèle SHI. Les paramètres estimés, associés à cette série, dans les tableaux de résultats ne sont donc pas pertinents.

On présente dans les tableaux (3.2.2) et (3.2.3), les résultats des régressions (3.3) et (3.4). Le modèle 0 correspond à la régression (3.3) et au test original de la théorie des anticipations appliqué aux taux à terme 3 mois dans 3 mois. Le paramètre de courbure β est égal à $0,75$ et significativement différent de 0 à un niveau de 5% et l'hypothèse jointe d'absence de biais ($\alpha = 0$ et $\beta = 1$) ne peut pas être rejetée. Cependant le R^2 indique que seulement $61,3\%$ de la série des spreads taux futurs moins taux comptant peut être expliquée par la série des spreads taux à terme moins taux comptant.

Dans le modèle 1, on ajoute la volatilité à la régression. Le coefficient γ associé à la série des écarts pour le modèle HER est de $-0,979$ et est significativement différent de 0. Le signe négatif du coefficient indique que le taux futur et la variance du taux futurs sont négativement corrélés. Le R^2 du modèle 1 est de 67% indiquant que l'ajout de la volatilité dans la régression améliore la quantité de variables dépendantes expliquée.

Le modèle 2 intègre en plus la prime de skewness. Les résultats diffèrent selon le modèle utilisé pour le calcul des skewness implicites. Dans le cas du modèle d'Hermite, le paramètre δ associé à la skewness est non significatif, alors qu'avec Shimko, il est de $-0,380$ et significativement non nul à un niveau de 5%. De plus le pourcentage des variables indépendantes expliquées est nettement amélioré puisqu'il passe de $61,3\%$ pour le modèle 0 à $62,4\%$ pour le modèle 2 avec volatilité et skewness. Cependant, la constante devient elle aussi significativement non nulle. On constate les mêmes résultats lorsqu'on ajoute l'excès de kurtosis à la place de la skewness. Le paramètre δ associé est significativement non nul à un niveau de 5% avec SHI et n'est pas significatif avec HER.

Enfin, le modèle 4 où l'on intègre tous les moments fait apparaître des résultats plutôt satisfaisants. Dans le cas du modèle de Shimko, les paramètres associés à la skewness et à l'excès de kurtosis sont de $-3,149$ et $0,433$ et sont significativement non nuls à 5%. De plus le R^2 est fortement amélioré puisque $64,8\%$ de l'écart de taux futur est expliqué. Concernant Hermite, les paramètres δ et ϕ sont inférieurs et moins significatifs (10% et 25%), mais la volatilité est significative et le R^2 de $67,8\%$ est supérieur à celui obtenu avec Shimko.

Tableau 3.2.1 : tests de stationnarité des séries intervenant dans (3.3)-(3.4)

		p_c	BP	$t(\phi_a)$	$t(\phi_c)$	ρ
	$\Delta^1 r(t,t+n)$	1	$2,327$		$-9,882$	$-0,033$
	$\Delta^m f(t,t+n)$	1	$20,482$	$-2,184$		$0,973$
	SD_t^r	5	$31,318$		$-4,051$	$0,901$
Hermite	SK_t^r	1	$20,172$		$-17,342$	$0,306$
	KU_t^r	1	$0,009$		$-16,168$	$0,261$
	SD_t^r	6	$24,104$	$-1,147$		$0,996$
Shimko	SK_t^r	3	$24,822$		$-5,998$	$0,547$
	KU_t^r	1	$21,585$		$-7,432$	$0,368$

Tableau 3.2.2 : résultats de l'estimation des modèles (3.3)-(3.4) pour une maturité interpolée de 3 mois avec Shimko

(Modèle 0) $r_{t+m}(3 \text{ mois}) - r_t(3 \text{ mois}) = \alpha + \beta\,(f_t(m, 3 \text{ mois}) - r_t(3 \text{ mois})) + \varepsilon_t$

(Modèle 1) $r_{t+m}(3 \text{ mois}) - r_t(3 \text{ mois}) = \alpha + \beta\,(f_t(m, 3 \text{ mois}) - r_t(3 \text{ mois})) + \gamma SD_t^R + \varepsilon_t$

(Modèle 2) $r_{t+m}(3 \text{ mois}) - r_t(3 \text{ mois}) = \alpha + \beta\,(f_t(m, 3 \text{ mois}) - r_t(3 \text{ mois})) + \gamma SD_t^R + \delta SK_t^R + \varepsilon_t$

(Modèle 3) $r_{t+m}(3 \text{ mois}) - r_t(3 \text{ mois}) = \alpha + \beta\,(f_t(m, 3 \text{ mois}) - r_t(3 \text{ mois})) + \gamma SD_t^R + \phi(KU_t^R - 3) + \varepsilon_t$

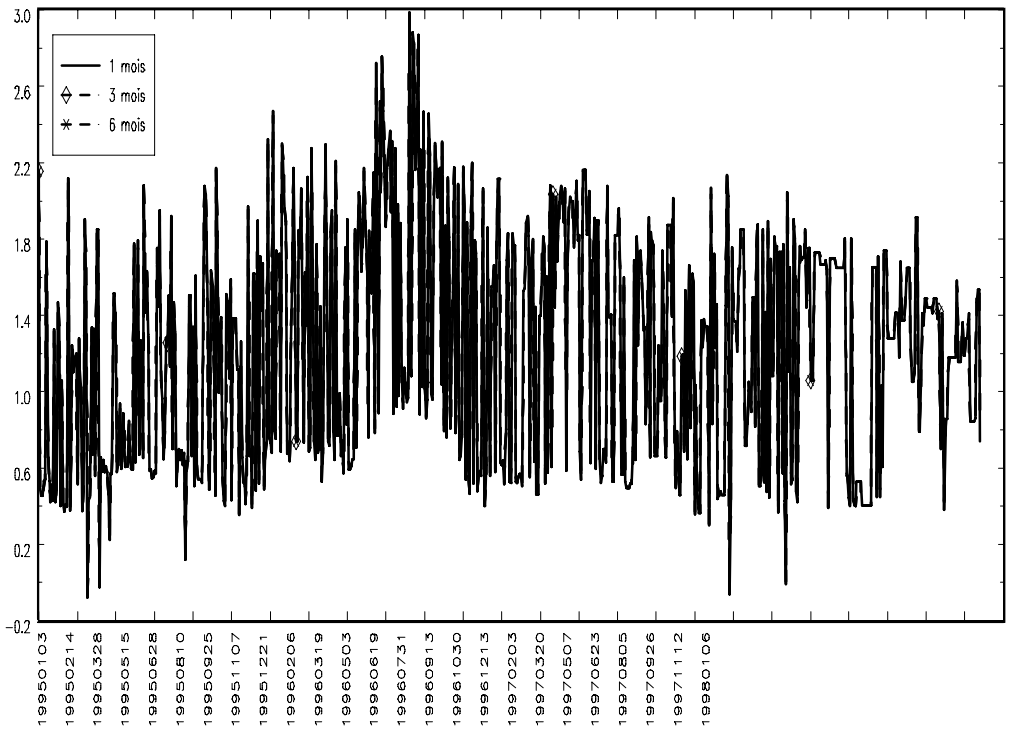
(Modèle 4) $r_{t+m}(3 \text{ mois}) - r_t(3 \text{ mois}) = \alpha + \beta\,(f_t(m, 3 \text{ mois}) - r_t(3 \text{ mois})) + \gamma SD_t^R + \delta SK_t^R + \phi(KU_t^R - 3) + \varepsilon_t$

	α	β	γ	δ	ϕ	R^2
Modèle 0	$-0,028$	$0,750^a$				$0,613$
	$(-0,166)$	$(5,950)$				
Modèle 1	$0,159$	$0,742^a$	$-0,087$			$0,614$
	$(0,188)$	$(5,481)$	$(-0,221)$			
Modèle 2	$0,688^a$	$0,757^a$	$-0,018$	$-0,380^a$		$0,624$
	$(1,015)$	$(5,439)$	$(-0,043)$	$(-1,654)$		
Modèle 3	$0,083$	$0,752^a$	$-0,037$		$-0,038^a$	$0,618$
	$(0,095)$	$(5,379)$	$(-0,088)$		$(-1,073)$	
Modèle 4	$5,427^a$	$0,752^a$	$-0,089$	$-3,149^a$	$0,433^b$	$0,648$
	$(2,207)$	$(5,603)$	$(-0,219)$	$(-2,601)$	$(2,218)$	

Tableau 3.2.3 : résultats de l'estimation des modèles (3.3)-(3.4) pour une maturité interpolée de 3 mois avec Hermite

	α	β	γ	δ	ϕ	R^2
Modèle 0	$-0,028$	$0,750^a$				$0,613$
	$(-0,166)$	$(5,950)$				
Modèle 1	$0,979^a$	$0,676^a$	$-0,979^a$			$0,670$
	$(2,726)$	$(5,771)$	$(-2,727)$			
Modèle 2	$0,986^a$	$0,692^a$	$-0,878^b$	$-0,106$		$0,673$
	$(2,832)$	$(5,471)$	$(-1,994)$	$(-0,843)$		
Modèle 3	$0,979^a$	$0,677^a$	$-0,974^b$		$-0,002$	$0,670$
	$(2,691)$	$(5,533)$	$(-2,311)$		$(-0,066)$	
Modèle 4	$1,026^a$	$0,700^a$	$-0,843^c$	$-0,385^c$	$0,071^b$	$0,678$
	$(2,934)$	$(5,513)$	$(-1,954)$	$(-1,807)$	$(2,083)$	

Skewness implicite du PIBOR avec un developpement d'Edegworth
interpolee pour des maturites d'1 mois, 45 jours et 3 mois



Kurtosis implicite du PIBOR avec un developpement d'Edegworth
interpolee pour des maturites d'1 mois, 45 jours et 3 mois

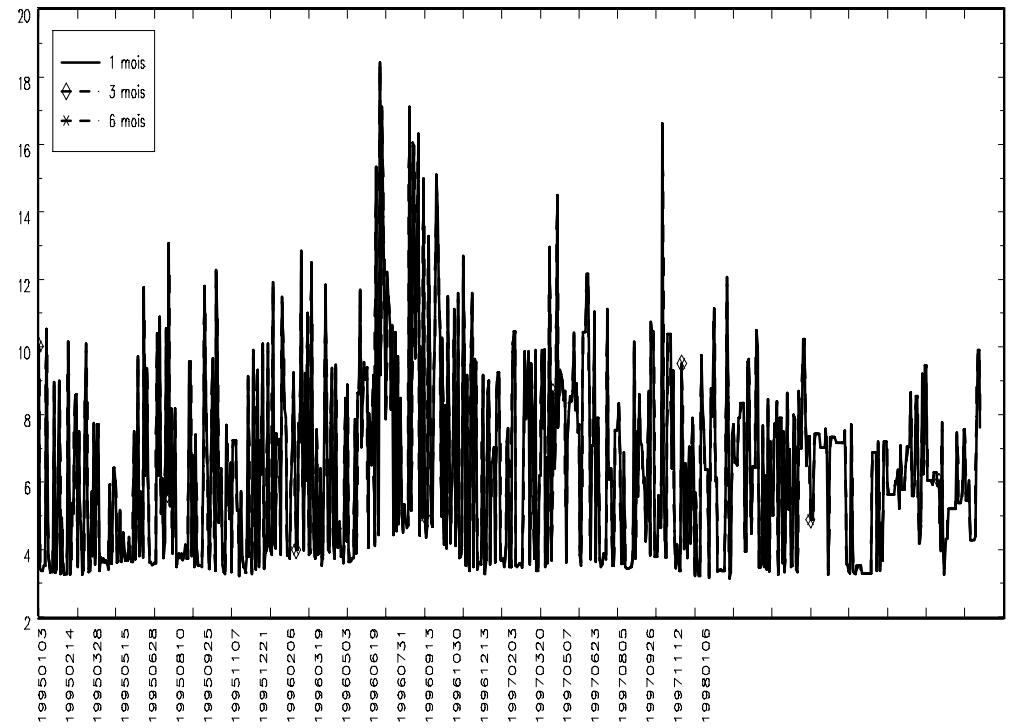


Figure 3.11.a: skewness implicite du PIBOR avec un lissage de smile
interpolee pour des maturites d'1 mois, 45 jours et 3 mois

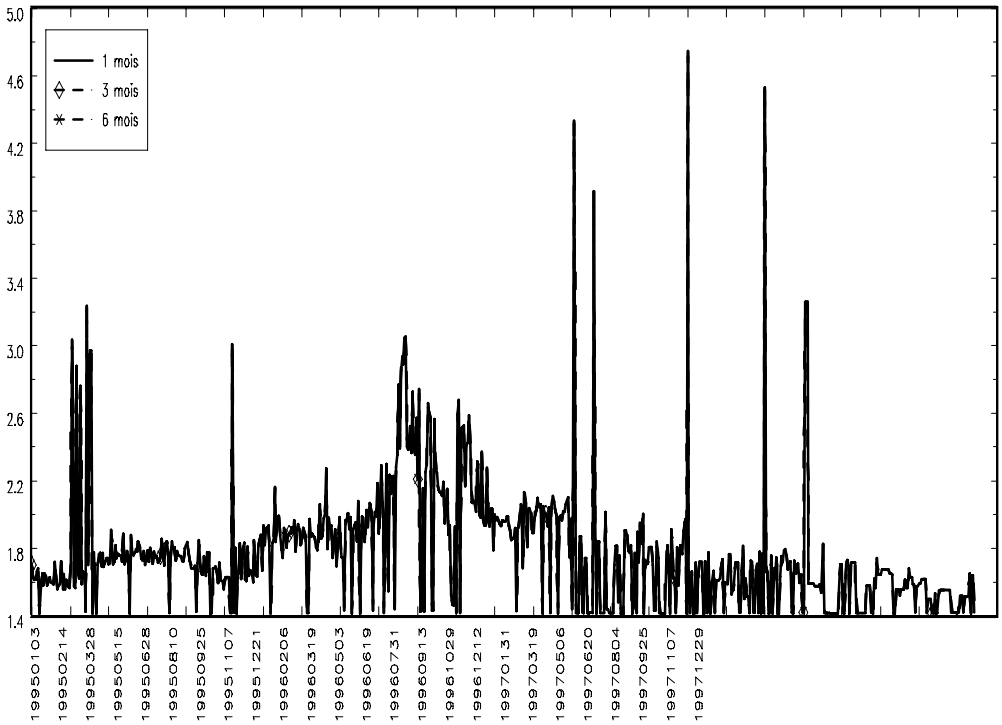
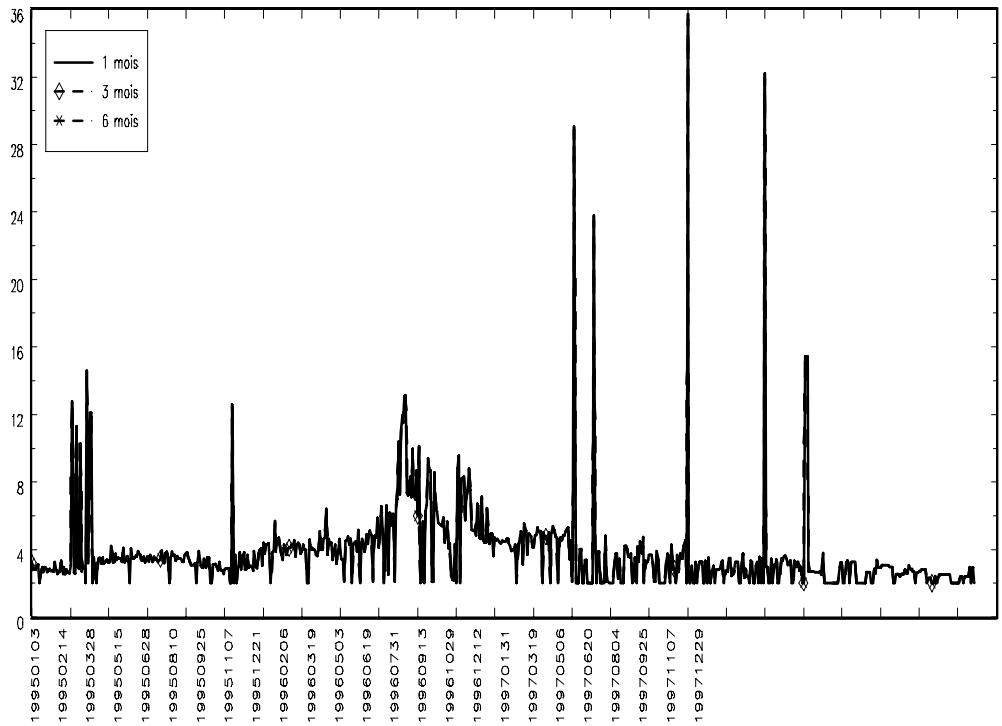


Figure 3.11.b: kurtosis implicite du PIBOR avec un lissage de smile
interpolee pour des maturites d'1 mois, 45 jours et 3 mois



Chapitre 4

Estimation de l'aversion au risque des agents du marché

L'optique de ce chapitre est l'estimation du degré d'aversion au risque des agents du marché en utilisant des outils tels que la fonction d'aversion au risque et une relation théorique entre les densité neutre au risque et statistique et la fonction d'aversion au risque. L'idée d'utiliser les options pour étudier les préférences des agents a été relativement peu étudiée dans la littérature. Récemment, les chercheurs ont essayé d'appliquer la connaissance du degré d'aversion pour le risque au domaine de la gestion de risque. En outre, Rosenberg et Engle (1997) et Aït-Sahalia et Lo (2000) utilisent la relation entre les densités et l'aversion au risque pour dériver les fonctions d'utilité marginale. Garcia et Renault (1998) montrent que les conditions d'équilibre des prix d'options apportent de l'information sur les paramètres de référence. Guo (1998) estime la prime de risque implicite dans les prix d'options en utilisant un modèle à volatilité stochastique lui permettant de récupérer une valeur implicite du degré d'aversion au risque des agents du marché. Jackwerth (1999a) tente d'estimer la fonction d'aversion au risque. A la suite de ces auteurs, nous allons tenter d'estimer le degré d'aversion au risque à partir du décalage entre la densité neutre au risque issue des options et la densité statistique obtenue à partir des séries temporelles. Puis nous essaierons d'utiliser cette mesure de la prime de risque dans le domaine de la gestion de risque. Comme nous avons présenté l'équilibre par arbitrage, nous avons maintenant besoin d'introduire la notion d'équilibre général.

4.1 Notion de risque et d'équilibre général

Dans un contexte d'équilibre général, le prix est défini par l'égalité de l'offre et de la demande de l'actif échangé. Le prix d'équilibre du risque dépend, ici, de l'attitude des agents vis-à-vis de ce risque, et donc, via leur fonction d'utilité, de leur niveau de consommation effectif. Dans l'optique de la théorie standard, leur choix de consommation est déterminé conjointement à leur choix d'épargne et d'investissement, c'est-à-dire à leur offre et demande de titres.

En premier lieu nous présentons les hypothèses qui définissent l'environnement économique et les comportements individuels et en second lieu nous exposons la théorie du choix de portefeuille.

4.1.1 Hypothèses liées à l'équilibre général

La première hypothèse définit l'unique actif physique (le bien) considéré.

Hypothèse 11 *Il n'existe qu'un seul bien ou actif S. Celui-ci peut être soit consommé, soit utilisé comme input dans la production. Toutes les valeurs sont mesurées en unités de ce bien.*

Un seul type d'agent sera considéré dans cette étude : le consommateur-investisseur. L'hypothèse suivante confère à chacun d'eux un comportement rationnel standard.

Hypothèse 12 *A tout instant, chaque individu cherche à maximiser l'espérance d'une fonction d'utilité, cumulée jusqu'à la date de sa mort (supposée connue). L'utilité, qui dépend de sa consommation et du niveau des variables d'état à l'instant considéré, est monotone croissante et strictement concave.*

L'hypothèse suivante permet d'homogénéiser la population quant à ses caractéristiques économiques.

Hypothèse 13 *Il existe un nombre donné d'individus. Ces individus ont des dotations et des préférences identiques, chacun d'eux admet que l'économie est telle que décrite précédemment.*

Cette dernière hypothèse est équivalente à supposer que l'économie ne comporte qu'un seul individu dont le comportement est décrit par l'hypothèse (12).

Les deux hypothèses suivantes spécifient les instruments financiers que les agents ont à leur disposition, afin de pouvoir gérer au mieux les risques économiques.

Hypothèse 14 *Il existe des marchés parfaits (cf. hypothèse (2)) de titres financiers. Ces titres, créés et achetés par des individus, spécifient en totalité les paiements conditionnels auxquels ils donnent droit. Ces paiements peuvent dépendre de toutes les variables décrivant l'état de l'économie.*

Hypothèse 15 *Il existe un marché pour l'emprunt et le prêt instantané au taux r.*

4.1.2 Evaluation d'actifs contingents à l'équilibre

Le choix de base d'investissement pour un individu est de déterminer l'allocation optimale de sa richesse selon les opportunités d'investissement possibles (cf. Merton (1969)). Pour la suite on peut se référer au livre de Huang et Litzenberger (1990). Rappelons d'abord la définition d'un actif contingent.

Définition 7 *Un actif d'état contingent est un actif qui paie une unité de bien consommé quand un état du monde a lieu et rien ailleurs.*

On commence par considérer une économie d'échange à deux périodes avec un seul bien de consommation à chaque période. Les individus choisissent leur consommation pour aujourd'hui, au temps 0, et les actifs d'état contingents pour leur consommation demain, au temps 1. Sans perte de généralité, le bien de consommation unique est considéré comme numéraire.

Définition 8 *Une allocation d'actifs d'état contingents pour des individus, notée* $\{(c_{i0}, c_{i\omega}, \omega \in \Omega); i = 1, 2, ..., I\}$ *est dite réalisable si*

$$\sum_{i=1}^{I} c_{i0} = C_0$$

et

$$\sum_{i=1}^{I} c_{i\omega} = C_\omega, \ \forall \omega \in \Omega,$$

où c_{i0} représente l'allocation de consommation de l'individu i au temps 0, $c_{i\omega}$ représente l'allocation de consommation de l'individu i dans l'état ω au temps 1, C_0 représente la consommation disponible au temps 0, et C_ω la consommation disponible dans l'état ω.

Une allocation d'actifs d'état contingents est dite Pareto optimale ou Pareto efficiente si elle est réalisable et s'il n'existe pas d'autre allocation réalisable qui puisse augmenter strictement l'utilité d'au moins un individu sans décroître l'utilité des autres.

D'après un théorème connu (voir par exemple Varian (1978)), on sait que correspondant à une allocation optimale de Pareto, il existe un ensemble de nombre positifs, $\{\lambda_i\}_{i=1}^I$, tels que :

$$\max_{\{(c_{i0},c_{i\omega})_{i=1}^I,\omega\in\Omega\}} \sum_{i=1}^I \lambda_i \left[\sum_{\omega\in\Omega} \pi_{i\omega} u_{i\omega}(c_{i0},c_{i\omega})\right],$$

sous contraintes

$$\sum_{i=1}^I c_{i0} = C_0 \text{ et } \sum_{i=1}^I c_{i\omega} = C_\omega, \forall\omega\in\Omega,$$

où $\pi_{i\omega}$ est la probabilité subjective de l'individu i de l'occurrence de l'état ω et $u_{i\omega}(.,.)$ est la fonction d'utilité de l'individu i entre une consommation en 0 et une consommation en 1 pour l'état ω. En formant un Lagrangien, on est amené à résoudre le problème de maximisation suivant :

$$\max_{\{(c_{i0},c_{i\omega})_{i=1}^I,\omega\in\Omega\}} L = \sum_{i=1}^I \lambda_i \left[\sum_{\omega\in\Omega} \pi_{i\omega} u_{i\omega}(c_{i0},c_{i\omega})\right] + \phi_0 \left[\sum_{i=1}^I c_{i0} - C_0\right] + \sum_{\omega\in\Omega} \phi_\omega \left[\sum_{i=1}^I c_{i\omega} - C_\omega\right].$$

Comme les fonction d'utilité sont strictement concaves et que les λ_i sont strictement positifs, les conditions de premier ordre pour le programme ci-dessus sont nécessaires et suffisantes pour un optimum global. Elles sont

$$\lambda_i \sum_{\omega\in\Omega} \pi_{i\omega} \frac{\partial u_{i\omega}(c_{i0},c_{i\omega})}{\partial c_{i0}} = \phi_0,\ i=1,...,I \tag{4.1}$$

$$\lambda_i \pi_{i\omega} \frac{\partial u_{i\omega}(c_{i0},c_{i\omega})}{\partial c_{i\omega}} = \phi_\omega,\ \omega\in\Omega,\ i=1,...,I, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^I c_{i0} = C_0, \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^I c_{i\omega} = C_\omega,\ \forall\omega\in\Omega. \tag{4.4}$$

En remplaçant la relation (4.2) dans (4.1) pour un même individu, on obtient :

$$\frac{\pi_{i\omega}\frac{\partial u_{i\omega}(c_{i0},c_{i\omega})}{\partial c_{i\omega}}}{\sum_{\omega\in\Omega}\pi_{i\omega}\frac{\partial u_{i\omega}(c_{i0},c_{i\omega})}{\partial c_{i0}}} = \frac{\phi_\omega}{\phi_0},\ \omega\in\Omega,\ i=1,...,I.$$

que l'on peut encore noter

$$\phi_\omega = \frac{\pi_\omega u_i'(c_{i\omega})}{u_{i0}'(c_{i0})}, \forall \omega \in \Omega$$

On suppose maintenant que l'hypothèse (13) est valide, donc que les agents ont des croyances homogènes π_ω Il y a $N+1$ actifs négociés. L'actif j est représenté par sa structure de payoffs $x_{j\omega}$ dépendant de son état. L'actif 0 est un actif sans risque avec $x_{0\omega} = 1$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le prix d'un actif contingent est donné par

$$\phi_\omega = \frac{\pi_\omega u_1'(C_\omega)}{u_0'(C_0)}, \forall \omega \in \Omega \tag{4.5}$$

et le prix d'un actif complexe peut être vu comme un portefeuille d'actifs contingents élémentaires. Ainsi, le prix de l'actif j est donné par :

$$S_j = \sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega x_{j\omega}. \tag{4.6}$$

En remplaçant (4.5) dans (4.6), on obtient :

$$S_j = E\left[\frac{u_1'(\widetilde{C})}{u_0'(C_0)}\widetilde{x}_j\right], \tag{4.7}$$

où la notation $\widetilde{x}_j$ signifie que le payoff au temps 1 de l'actif j est une variable aléatoire. Dans le cas d'une obligation zéro-coupon, actif sans risque non élémentaire qui paie une unité de consommation dans tous les états de la nature, nous avons :

$$S_0 = E\left[\frac{u_1'(\widetilde{C})}{u_0'(C_0)}\right]. \tag{4.8}$$

La quantité $\frac{u_1'(\widetilde{C})}{u_0'(C_0)}$ est appelée taux marginal de substitution intertemporel entre les consommations aux dates 0 et 1. Il est donné par le rapport des utilités marginales en 1 et 0.

Le passage au temps continu se fait comme suit. On se place dans le contexte des hypothèses (11)-(15). On note maintenant par $U(.)$ la fonction d'utilité de l'investisseur. La seule information disponible en t sur les actifs pour les décisions des investisseurs est la densité de distribution de S_T. D'après (4.7) le prix à l'équilibre de l'actif risqué S_t en t avec une valeur liquidative en T de $\Psi(S_T)$ est donné par :

$$S_t = E_t^{\mathbf{P}}\left[\Psi(S_T)M_{t,T}\right], \tag{4.9}$$

$$M_{t,T} = \frac{U'(S_T)}{U'(S_t)}, \tag{4.10}$$

sous la probabilité subjective $\mathbf{P}$, où $M_{t,T}$ est le taux marginal de substitution ou encore le facteur d'actualisation stochastique entre les consommations aux dates t et T.

4.1.3 Prime de risque

Nous donnons maintenant une notion de la prime de risque dans le cadre de l'équilibre général. Lorsque $U(.)$ est concave on dit que l'agent a de l'aversion pour le risque. En effet, si C représente la consommation future à la date 1, c'est une variable aléatoire prenant les valeurs c^j avec probabilité μ_j et d'après l'inégalité de Jensen on a :

$$U(E[C]) \geq E[U(C)]. \tag{4.11}$$

L'investisseur préfère donc la consommation future certaine $E[C]$ à la consommation c^1 avec probabilité μ_1, c^2 avec probabilité μ_2, ... On dit que l'investisseur est neutre vis-à-vis du risque lorsque $U(.)$ est une fonction affine, et dans ce cas on a l'égalité dans (4.11).

On définit la prime de risque de la façon suivante.

Définition 9 *La prime de risque ρ liée à la consommation aléatoire C est le montant que l'investisseur est prêt à abandonner pour obtenir une consommation certaine égale à $E[C]$; elle est donnée par :*

$$U(E[C] - \rho) = E[U(C)].$$

La quantité $E[C] - \rho$ est appelée équivalent certain de C. Lorsque l'investisseur est neutre au risque, $\rho = 0$.

4.2 Aversion au risque implicite dans les prix d'options

4.2.1 Mise en évidence d'une relation théorique

On note $p(.)$ la densité de distribution sous la probabilité subjective $\mathbf{P}$, ou densité subjective pour simplifier (DS), et $q(.)$ la densité de distribution sous la probabilité neutre au risque $\mathbf{Q}$, ou densité risque neutre pour simplifier (DRN).

On peut récrire (4.9) :

$$\begin{aligned} S_t &= \int_0^\infty \Psi(S_T)\frac{U'(S_T)}{U'(S_t)}p(S_T)dS_T \\ &= e^{-r_t(T)\tau}\int_0^\infty \Psi(S_T)q(S_T)dS_T \\ &= e^{-r_t(T)\tau}E_t^{\mathbf{Q}}\left[\Psi(S_T)\right] \end{aligned}$$

avec

$$q(S_T) = \frac{M_{t,T}}{\int_0^\infty M_{t,T}p(S_T)dS_T}p(S_T). \tag{4.12}$$

Une façon de spécifier les ordres de préférences de tous les choix possibles pour un investisseur est d'introduire la fonction d'aversion au risque. Une mesure de cette aversion au risque est donnée par l'aversion au risque absolue $A(.)$ de Pratt et Arrow (cf. Pratt (1964)) :

$$\mathcal{A}(S) = \frac{-U''(S)}{U'(S)}. \tag{4.13}$$

Comme U est croissante ($U'(S) > 0$) et strictement concave ($U"(S) < 0$), la fonction $A(.)$ est positive ; ainsi les investisseurs sont averses au risque. Une autre mesure de l'aversion pour le risque est la fonction d'aversion au risque relative $R(.)$:

$$\mathcal{R}(S) = \frac{-U''(S)}{U'(S)}S. \tag{4.14}$$

De la relation (4.12), on peut déduire que le rapport p/q est proportionnel à $M_{t,T}$ et l'on peut écrire :

$$\zeta(S_T) = \frac{q(S_T)}{p(S_T)} = \theta M_{t,T} = \theta \frac{U'(S_T)}{U'(S_t)}. \tag{4.15}$$

où θ est une constante indépendante du niveau de S.

En dérivant (4.15) par rapport à S_T on obtient :

$$\zeta'(S_T) = \theta \frac{U''(S_T)}{U'(S_t)},$$

et en prenant le rapport de $\zeta'(.)$ sur $\zeta(.)$, on a :

$$-\frac{\zeta'(S_T)}{\zeta(S_T)} = -\frac{U''(S_T)}{U'(S_T)} = \mathcal{A}(S_T).$$

On peut alors calculer $A(.)$ comme une fonction de $p(.)$ et $q(.)$ et on obtient directement un estimateur de la fonction d'aversion au risque absolue indépendant du paramètre θ :

$$\mathcal{A}(S_T) = \frac{p'(S_T)}{p(S_T)} - \frac{q'(S_T)}{q(S_T)}. \tag{4.16}$$

Pour extraire une estimation du coefficient d'aversion au risque, on a besoin maintenant de donner une forme à la fonction d'utilité. On fait l'hypothèse supplémentaire suivante.

Hypothèse 16 *On se place dans un monde dans lequel les investisseurs ont des préférences caractérisées par des fonctions d'utilité du type Constant Relative Risk Aversion (CRRA) (Merton (1969, 1971)). Ces fonctions ont la forme générale suivante :*

$$U(S) = \begin{cases} \frac{S^{1-\lambda}}{1-\lambda} & , \ si \ \lambda \neq 1 \\ \ln(S) & , \ si \ \lambda = 1 \end{cases} \tag{4.17}$$

$$\mathcal{A}(S) = \frac{\lambda}{S}, \tag{4.18}$$

où λ est un paramètre positif qui représente le niveau d'aversion au risque de l'investisseur.

Une estimation du paramètre λ permet d'avoir directement une idée de l'aversion au

risque des investisseurs.

4.2.2 Un exemple : le modèle de Black-Scholes

Dans cette section, on explique comment utiliser la relation théorique qui lie la fonction d'aversion au risque aux densités subjective et neutre au risque, sur le modèle traditionnel de Black-Scholes (1973), pour obtenir une estimation de λ.

On se place sous les hypothèses (2) (7). Le prix de l'actif risqué suit sous $\mathbf{Q}$ la dynamique (2.12) :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

et sous $\mathbf{P}$ la dynamique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t d\widehat{W}_t,$$

où W_t et $\widehat{W}_t$ sont respectivement des mouvements browniens standards sous les probabilités risque neutre et subjective. On montre facilement que S_t suit une loi lognormale sous chacune des deux probabilités. La DNR $q^{\mathrm{BS}}(S,\sigma)$ et la DS $p^{\mathrm{BS}}(S,\sigma,\mu)$ avec le modèle de Black et Scholes diffèrent uniquement par leur moyenne :

$$p^{\mathrm{BS}}(S,\sigma,\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}S}\exp\left[-\frac{\left(\ln(S)-m_t(\mu)\right)^2}{2\sigma^2\tau}\right], \tag{4.19}$$

$$q^{\mathrm{BS}}(S,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}S}\exp\left[-\frac{\left(\ln(S)-m_t(r)\right)^2}{2\sigma^2\tau}\right], \tag{4.20}$$

avec

$$m_t(x) = \ln(S_t) + \left(x - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau.$$

En remplaçant (4.19) et (4.20) dans (4.16) sous l'hypothèse (**??**) on obtient directement :

$$\mathcal{A}^{\mathrm{BS}}(S) = \frac{\mu - r}{\sigma^2 S} = \frac{\lambda}{S}, \tag{4.21}$$

donc dans le cas du modèle de Black et Scholes, le coefficient d'aversion au risque, a^{BS} est donné par :

$$\lambda^{\mathrm{BS}} = \frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

Une estimation des paramètres μ et σ nous donne directement le paramètre λ^{BS}. On note qu'on retrouve bien la valeur du prix de marché du risque λ^{BS} donné par (2.14).

Nous avons mis en évidence une relation théorique entre densité neutre au risque, densité subjective et fonction d'aversion au risque du marché. On entend par risque de marché le risque que les mouvements des prix sur le marché affaiblissent la condition financière d'une entreprise à cause de ses positions sur les produits dérivés[1]. On rappelle que la densité neutre au risque (DNR) est celle estimée à partir des prix d'options qui fait abstraction de toute notion de risque sur les marchés mais apporte une information importante quant au comportement futur de l'actif sous-jacent. Au contraire la densité subjective (DS) ou encore densité de probabilité vraie est la densité estimée directement à partir d'une série temporelle de l'actif sous-jacent et prend en compte la mesure du risque. Il est donc possible d'estimer pour un même actif deux densités sous deux probabilités différentes. Au vu de la définition donnée à chacune de ces deux densités, on peut espérer intuitivement par une comparaison des deux, avoir une idée sur la mesure du risque sur le marché ; or, nous avons vu en première partie que cette mesure existait et que l'on pouvait la quantifier exactement numériquement en mettant en évidence cette relation théorique. Concrètement, on s'intéresse maintenant à l'estimation du paramètre λ dans (4.17) qui nous donne directement le degré d'aversion au risque des agents sur le marché. Une fois que l'on a supposé une classe de fonction d'utilité, on doit spécifier un modèle pour estimer les densités neutre au risque q et subjective p. Dans le but d'étudier les réactions des agents à travers le temps, on impose au degré d'aversion au risque d'être variant dans le temps et l'on remplace toutes les notations de (4.16) par leur équivalent indexé par l'instant présent t : p_t, q_t, A_t et a_t. L'estimation de λ peut se faire dans un cadre implicite ou explicite. On se propose de l'estimer dans ces deux contextes et de comparer les résultats obtenus lorsqu'on suppose différentes formes de la fonction d'utilité.

[1] Par opposition à toutes les autres formes de sources de risque que l'on peut rencontrer et décrites par Figlewski et Green (1998) de la façon suivante :
- Risque de crédit : risque (au sens large) que la contrepartie d'un contrat sur produits dérivés n'arrive pas à remplir ses obligations contractuelles.
- Risque opérationnel : risque de pertes sur dérivés provenant d'une déficience au sein de contrôles internes ou de systèmes d'information.
- Risque de légalité : risque qu'un contrat de dérivés ne soit pas légalement exécutoire.
- Risque du modèle : risque que le modèle spécifié soit mal adapté aux données au comportement de l'actif.

4.3 Estimation implicite de l'aversion au risque

Dans un premier temps, on expose comment, en appliquant (4.16), on peut extraire la fonction d'aversion au risque des agents du marché, en supposant deux structures différentes pour les densités réelle (sous la vraie probabilité $\mathbf{P}$) et neutre au risque (sous la probabilité risque neutre $\mathbf{Q}$) ; dans un second temps, on étudie la possibilité de tirer des stratégies de *trading* à partir du biais entre ces deux densités.

4.3.1 Estimation de la densité actuelle par une densité Conditionnellement Autoregressive

Il existe de nombreux candidats pour estimer la densité conditionnelle du sous-jacent sous la vraie probabilité $\mathbf{P}$. Les modèles ARCH décrits dans la section précédente sont les modèles les plus utilisés dans la littérature pour l'estimation de la densité conditionnelle d'une série de prix. Nous avons vu en section (2.2) que l'on pouvait utiliser la loi de Student pour exhiber l'excès de kurtosis de la distribution des innovations.

Dans un but de comparaison de la densité actuelle à la densité risque-neutre, on voudrait transformer la distribution de Student de façon qu'elle puisse être asymétrique et variante dans le temps. Hansen (1994) suggère une généralisation de la densité (2.19) qui autorise la présence d'asymétrie dans la distribution. Harvey et Siddique (1999) et Jondeau and Rockinger (2000b) utilisent également cette loi que l'on écrit :

$$g(z;s,\eta) = \begin{cases} bc\left[1+\frac{1}{\eta-2}\left(\frac{bz+a}{1-s}\right)^2\right]^{-\frac{\eta+1}{2}}, & z < -a/b \\ bc\left[1+\frac{1}{\eta-2}\left(\frac{bz+a}{1+s}\right)^2\right]^{-\frac{\eta+1}{2}}, & z \geq -a/b \end{cases} \tag{4.22}$$

avec $\eta > 2$, $-1 < s < 1$ et

$$a = 4sc\left(\frac{\eta-2}{\eta-1}\right), \tag{4.23}$$

$$b = 1+3s^2-a^2, \tag{4.24}$$

$$c = \frac{\Gamma(\frac{\eta+1}{2})}{\sqrt{\pi(\eta-2)}\Gamma(\frac{\eta}{2})}. \tag{4.25}$$

Hansen montre que cette densité est de moyenne nulle et de variance un. On donne en

annexe H page (261) le calcul des moments d'ordre 3 et 4 de $g(.)$. Cette densité possède un seul maximum en $-a/b$. La distribution est asymétrique à droite quand $s < 0$ et à gauche quand $s > 0$.

On cherche maintenant à introduire de la variation dans le temps sur les moments d'ordre supérieur à 2 en faisant dépendre le nombre de degrés de liberté η et l'asymétrie s des valeurs passées des résidus. Le modèle complet à estimer est le suivant :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= R_t - \mu_0 - \mu_1 h_t^2, && (4.26)\\
h_t^2 &= f(h_{t-1}^2, \varepsilon_t^2; \theta), && (4.27)\\
z_t &= \frac{\varepsilon_t}{h_t}, && (4.28)\\
\frac{1}{\eta_t} &= \eta_t^* = r(\widetilde{\eta}_t, 0, \frac{1}{4}), && (4.29)\\
\widetilde{\eta}_t &= n_0 + n_1 \eta_{t-1}^* + n_2 z_{t-1}, && (4.30)\\
s_t &= r(\widetilde{s}_t, -1, 1), && (4.31)\\
\widetilde{s}_t &= l_0 + l_1 s_{t-1} + l_2 z_{t-1}, && (4.32)
\end{aligned}$$

où la fonction $r(u, L, U)$ permet de conserver la variable u à l'intérieur de l'intervalle $]L, U[$ et s'écrit :

$$r(u, L, U) = L + \frac{U - L}{1 + e^u},$$

La fonction $f(.; \theta)$ dépend du modèle retenu pour modéliser la variance parmi les modèles (2.6), (2.7), (2.8) ou (2.9) décrits dans la section précédente. L'innovation standardisée z_t suit la distribution $g(z; s_t, \eta_t)$.

La densité actuelle conditionnelle de S_{t+1} est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
p(x) = p(x; s_t, \eta_t) &= \frac{1}{h_t S_t} g(z; s_t, \eta_t), && (4.33)\\
z &= \frac{\ln(x) - (\ln(S_t) + \mu_0 + \mu_1 h_t^2)}{h_t}. && (4.34)
\end{aligned}$$

4.3.2 Estimation de la densité neutre au risque par un développement en polynômes d'Hermite

On reprend ici, le modèle développé dans la section (4.2.2) dont nous ne rappellerons que la structure de la densité obtenue.

4.3.3 Résultats de l'estimation

Les figures (4a) et (4b) montrent les variations de la densité Hermite relativement aux paramètres b_3 et b_4. On voit que l'asymétrie de la densité est sensible au premier paramètre et que l'épaisseur de la queue de distribution est réactif au deuxième. On a vu en seconde partie que la skewness et la kurtosis d'une densité en polynômes d'Hermite sont directement reliés à b_3 et b_4. Dans un même temps, on montre en figures (5a) et (5b) les variations de l'ARCD en fonction des paramètres s_t et η_t. L'asymétrie varie avec s_t alors que le comportement de la queue de distribution varie avec le paramètre η_t.

Le tableau (4.3.1) reporte les estimations des différents modèles pour les paramètres sous la probabilité actuelle. La première colonne correspond au modèle GARCH ordinaire GARCH avec un coefficient d'épaisseur constant η_0 et une asymétrie constante s_0. Le paramètre autoregressif dans l'équation de la variance (4.27) est significatif à un niveau de 5% Le paramètre η_0 est significatif avec une valeur de 10.20. La présence d'asymétrie dans la distribution historique n'arrive pas à être expliquée par s_0 qui apparaît être non significativement différent de 0. Le second (resp. troisième) modèle correspond à (4.26)-(4.32) avec une kurtosis (resp. skewness) constante et une skewness (resp. kurtosis) qui varie avec le temps. Les paramètres de la variance conditionnelle sont similaires à ceux du GARCH. Le quatrième modèle correspond à (4.26)-(4.32) avec à la fois la skewness et la kurtosis qui varient dans le temps, et le dernier modèle inclut une effet GJR dans la variance conditionnelle. Le paramètre d'asymétrie γ dans la variance est significatif et le test de rapport des vraisemblances[2] nous permet de rejeter l'hypothèse nulle $H_0 : \gamma = 0$. Les autres paramètres dans (4.29)-(4.32) sont moins significatifs. L'estimation du modèle ASKARCH s'est avérée assez critique, et nous avons décidé pour la suite d'utilise les paramètres estimés du modèle SKARCH.

[2] On note $L_N(x; \widehat{\alpha}, \widehat{\gamma})$ le maximum de la log-vraisemblance du modèle non contraint ASKARCH et $L_N(x; \widehat{\alpha}, 0)$ le maximum de la log-vraisemblance du modèle contraint SKARCH. On veut tester l'hypothèse nulle $H_0 : \gamma = 0$. Alors le test de rapport des vraisemblances se constitue comme suit.

Définissons la statistique positive :

$$\xi_N^R = 2\left[L_N(x; \widehat{\alpha}, \widehat{\gamma}) - L_N(x; \widehat{\alpha}, 0)\right]$$

On accèpte H_0 si $\xi_N^R < \chi^2_{95\%}(1)$ où $\chi^2_{95\%}(1)$ est le quantile à 95% de la distribution khi-carré à 1 degré de liberté.

La figure (8) représente sur le même graphique les volatilités implicites annualisées calculées avec les polynômes d'Hermite et les volatilités conditionnelles tirées du modèle SKARCH. Les deux mesures de volatilité apparaissent assez proches excepté pour quelques pics, mais nous renvoyons ici à la section (2).

Tableau 4.3.1 : Estimation du modèle (4.26)-(4.32) avec les restrictions suivantes :

(1) GARCH : $\beta = \{\mu_0, \mu_1, \theta', 0, 0, 0, 0, 0, 0, s_0, \eta_0\}$ avec $\theta = \{\alpha_0, \alpha_1, \beta\}$

(2) SARCH : $\beta = \{\mu_0, \mu_1, \theta', 0, 0, 0, l_0, l_1, l_2, s_0, \eta_0\}$ avec $\theta = \{\alpha_0, \alpha_1, \beta\}$

(3) KARCH : $\beta = \{\mu_0, \mu_1, \theta', n_0, n_1, n_2, 0, 0, 0, s_0, \eta_0\}$ avec $\theta = \{\alpha_0, \alpha_1, \beta\}$

(4) SKARCH : $\beta = \{\mu_0, \mu_1, \theta', n_0, n_1, n_2, l_0, l_1, l_2, s_0, \eta_0\}$ avec $\theta = \{\alpha_0, \alpha_1, \beta\}$

(5) ASKARCH : $\beta = \{\mu_0, \mu_1, \theta', n_0, n_1, n_2, l_0, l_1, l_2, s_0, \eta_0\}$ avec $\theta = \{\alpha_0, \alpha_1, \beta, \gamma\}$

	GARCH	SARCH	KARCH	SKARCH	ASKARCH
$\mu_0 \times 10^{-3}$	0.294	0.309	0.349	0.366	0.197
	(0.561)	(0.727)	(0.816)	(0.672)	(0.841)
μ_1	4.486	5.118	4.192	4.595	4.532
	(3.831)	(5.790)	(6.831)	(5.532)	(7.593)
$\alpha_0 \times 10^{-5}$	0.143	0.139	0.142	0.135	0.314
	(0.093)	(0.097)	(0.098)	(0.092)	(0.226)
α_1	0.047^c	0.049^c	0.047^c	0.048^c	0.012
	(0.014)	(0.015)	(0.014)	(0.014)	(0.027)
β	0.943^c	0.942^c	0.943^c	0.942^c	0.923^c
	(0.018)	(0.019)	(0.019)	(0.018)	(0.036)
γ	0	0	0	0	0.079^a
					(0.041)

	GARCH	SARCH	KARCH	SKARCH	ASKARCH
n_0	0	0	-2.077^c	-0.020	-0.025
			(0.378)	(0.020)	(0.026)
n_1	0	0	2.323	1.323^c	1.284^c
			(1.818)	(0.299)	(0.457)
n_2	0	0	-0.584^b	0.058	0.054
			(0.283)	(0.801)	(0.129)
l_0	0	-0.0137	0	-2.003^c	-2.161^c
		(0.013)		(0.442)	(0.520)
l_1	0	1.336^c	0	1.898	1.901
		(0.269)		(3.680)	(7.151)
l_2	0	0.059	0	-0.560^a	-0.793
		(0.059)		(0.301)	(0.586)
$1/\eta_0$	0.098^c	0.102^c	0.157	0.126	0.083
	(0.028)	(0.029)	(0.614)	(0.398)	(2.614)
s_0	-0.043	0	-0.050	0	0
	(0.044)		(0.614)		
$\ln(L)$	3174.46	3175.02	3175.35	3175.83	3182.55

4.4 Application en terme de stratégies de trading

La figure (3.12) représente les skewness neutres au risque et les skewness actuelles estimées respectivement à partir des options et des séries temporelles. Les moments neutres au risque sont clairement plus élevés que les moments actuels. Ce résultat confirme l'idée que les options contiennent de l'information non capturée dans les séries temporelles du sous-jacent. Cette observation est également confirmée par les figures (3.13) et (3.14) qui montrent sur un même graphique les densités actuelles et neutres au risque pour un jour donné. Aït-Sahalia (1998c) propose d'exploiter le biais entre les deux densités comme des mesures de profit de trading. Les prises de position ont lieu à une date t, à laquelle la DNR $q(.)$ a été estimée avec les données de cette date et la densité subjective $p(.)$ a été estimée avec les données d'une période jusqu'à cette date t.

On considère un trader qui prend des positions sur les puts et les calls hors-la-monnaie (OTM), puisqu'ils sont plus cotés que les calls et puts dans-la-monnaie. On choisit la mesure actuelle comme mesure de référence ; la différence entre la DNR et la DS peut alors être considérée comme une information supplémentaire contenue dans les prix d'options concernant les anticipations des agents du marché sur l'évolution des cours futurs. On définit par Q-skew et Q-kurt (resp. P-skew et P-kurt) la skewness et la kurtosis sous la probabilité neutre au risque $\mathbf{Q}$ (resp. sous la probabilité actuelle $\mathbf{P}$).

Tournons-nous en premier lieu vers le trading des options OTM avec l'excès de kurtosis. On rappelle que la kurtosis est une mesure des variations futures importantes du prix de l'actif sous-jacent en général dans le sens d'une chute. Si la Q-kurt est plus grande que la P-kurt, cela signifie que les investisseurs s'attendent à une violente baisse du prix de l'indice. Dans ce cas, le prix de l'option d'achat peut devenir très bas. Comme le prix d'exercice est très grand pour les calls très en dehors de la monnaie, le payoff à l'échéance sera très proche de 0 ; dans ce cas, le trader doit vendre des calls très OTM. En ce qui concerne les puts OTM, les prix du sous-jacent S_T et d'exercice seront faibles à l'échéance. Encore une fois, le payoff est proche de 0 et le trader doit choisir de vendre les puts fortement hors-de-la-monnaie. Lorsque la Q-kurt est inférieure à la P-kurt, on suggère de se tourner vers la prime de skewness et de travailler avec celle-ci. On note que, lorsque la distribution est asymétrique à gauche, la skewness est négative, signe que les opérateurs de marché anticipent plus une baisse des prix qu'une hausse. Ainsi, quand la Q-skew est plus négative que la P-skew, on s'attend à ce que le payoff des puts OTM soit positif à l'échéance et on suggère d'acheter ces puts. Le payoff des calls OTM sera proche de 0, il faut donc les vendre. Réciproquement, si la Q-skew est plus positive que

la P-skew, alors une hausse de l'indice est espérée, et l'on doit acheter les calls OTM et vendre les puts OTM.

Par exemple, la figure (3.13) montre les densités de l'indice CAC 40 aux dates du 15 mars 1995 et 15 juillet 1998 qui peuvent être considérées comme deux dates situées dans une période relativement calme sur les marchés. Pour ces deux dates, les densités ne sont pas tellement leptokurtiques et il serait préférable d'utiliser la skewness pour établir des stratégies de trading. Dans les deux cas, la Q-skew est négative et en dessous de la P-skew. Par conséquent, en suivant les règles décrites dans le paragraphe précédent, on doit acheter les puts OTM et vendre les call OTM. Les densités sur la figure (3.14) sont estimées à partir des prix d'options du 15 avril 1997 et du 15 octobre 1998, dates à l'intérieur d'une période que l'on peut qualifier d'agitées. En effet, la densité de la première date précède de quelques jours l'annonce des élections législatives anticipées de 1997 en France. La densité de la seconde date est la conséquence de la crise russe au début de l'année 1998 qui a affecté les marchés développés de septembre à novembre 1998. Dans ces deux cas, le contenu informationnel supplémentaire des prix d'options sur les séries temporelles est clairement reflété sur la DNR. Cette dernière est bimodale, effet caractérisé par une seconde bosse sur la gauche de la distribution. Cette seconde bosse est la preuve de la présence d'un fort excès de kurtosis. A ces deux dates, les participants du marché craignent une chute de l'indice. Dans ces deux cas, on privilégie les stratégies de trading avec la kurtosis sur la stratégie de trading avec la skewness.

Enfin, sur les figures (3.15) sont dessinées les fonctions d'aversion au risque implicites pour les dates des 15 mars 1995 et 15 octobre 1998. La fonction d'aversion au risque absolue est comparés à celle obtenue avec le modèle de Black-Scholes en supposant une fonction d'utilité CRRA et en utilisant l'expression (4.21). Comme les densités sont supposées changer au cours du temps par construction, il est clair que les fonctions d'aversion au risque dépendent également du temps. On remarque que les fonctions d'aversion au risque implicites estimées avec le modèle des polynômes d'Hermite ont une forme qui diffère assez de celles de Black-Scholes. La valeur de l'aversion pour le risque est plus grande pour des valeurs plus basses de l'actif sous-jacent. Cela semble indiquer que le modèle de Black-Scholes ne reflète pas assez l'aversion au risque lorsque le marché anticipe une baisse des prix.

Figure 3.12.a: skewness neutre au risque et skewness statistique
sur la periode du 01/01/1995 au 29/12/1998

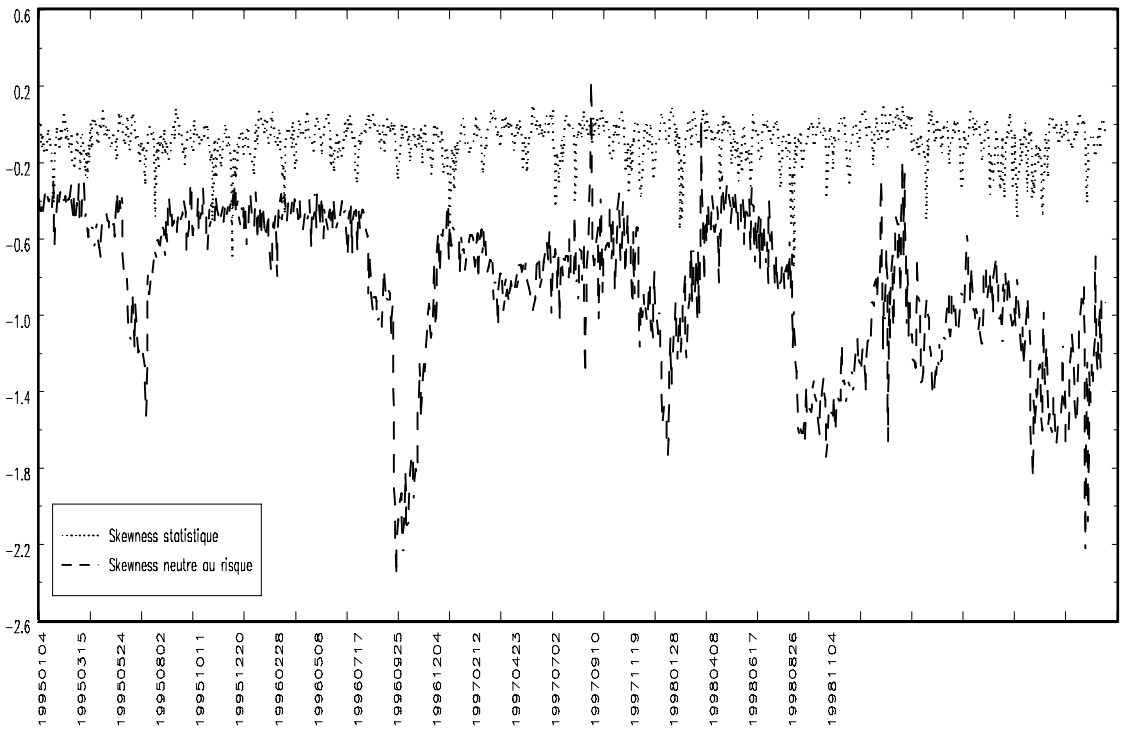


Figure 3.12.b: kurtosis neutre au risque et skewness statistique
sur la periode du 01/01/1995 au 29/12/1998

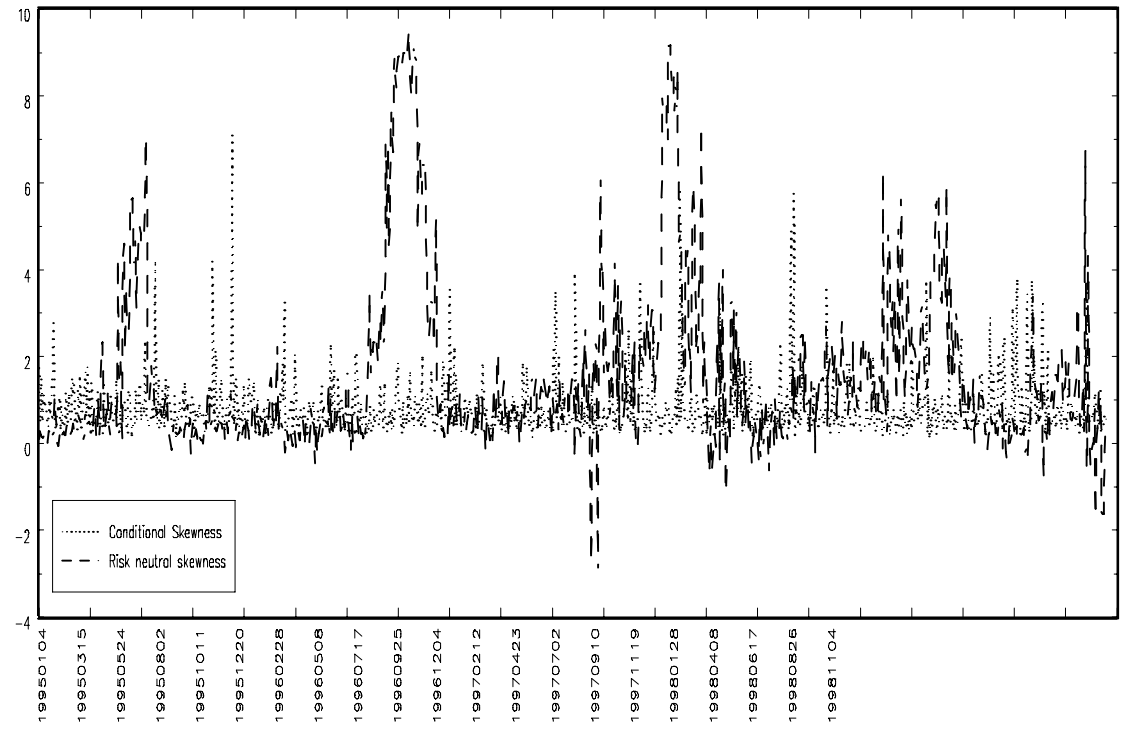


Figure 3.13.a: densite neutre au risque et densite statistique
du 19950315

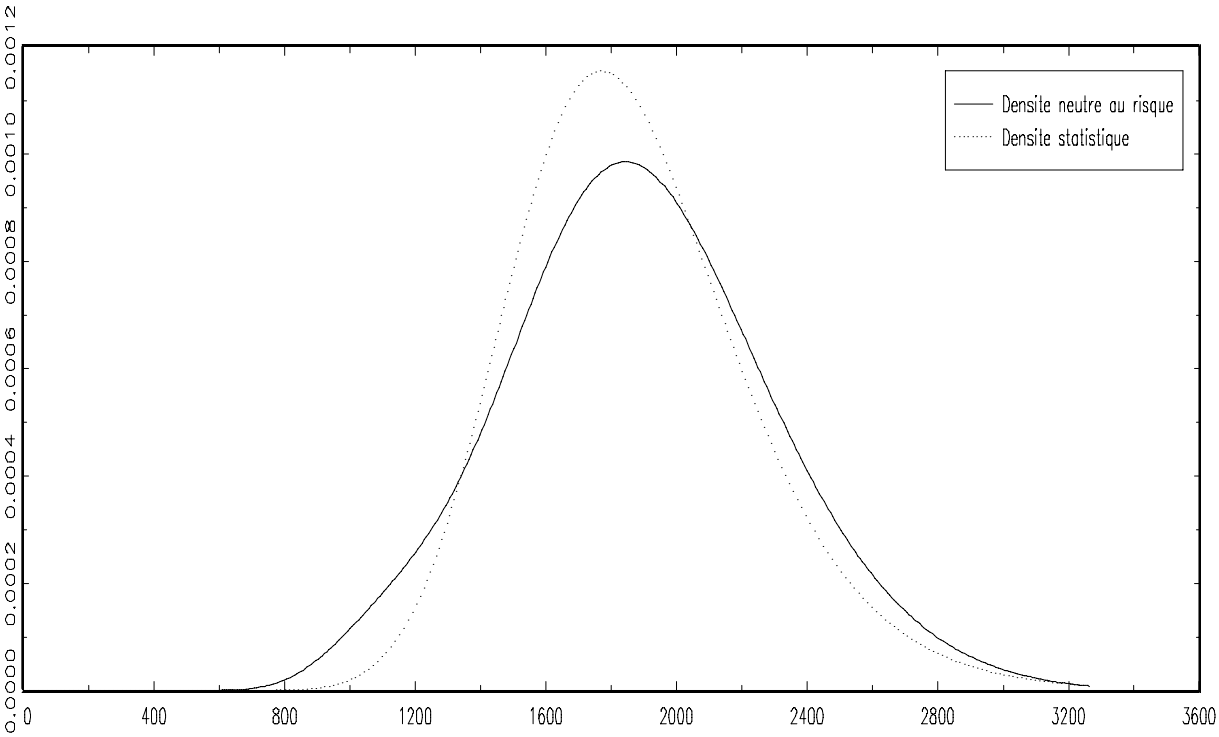


Figure 3.13.b: densite neutre au risque et densite statistique
du 19980715

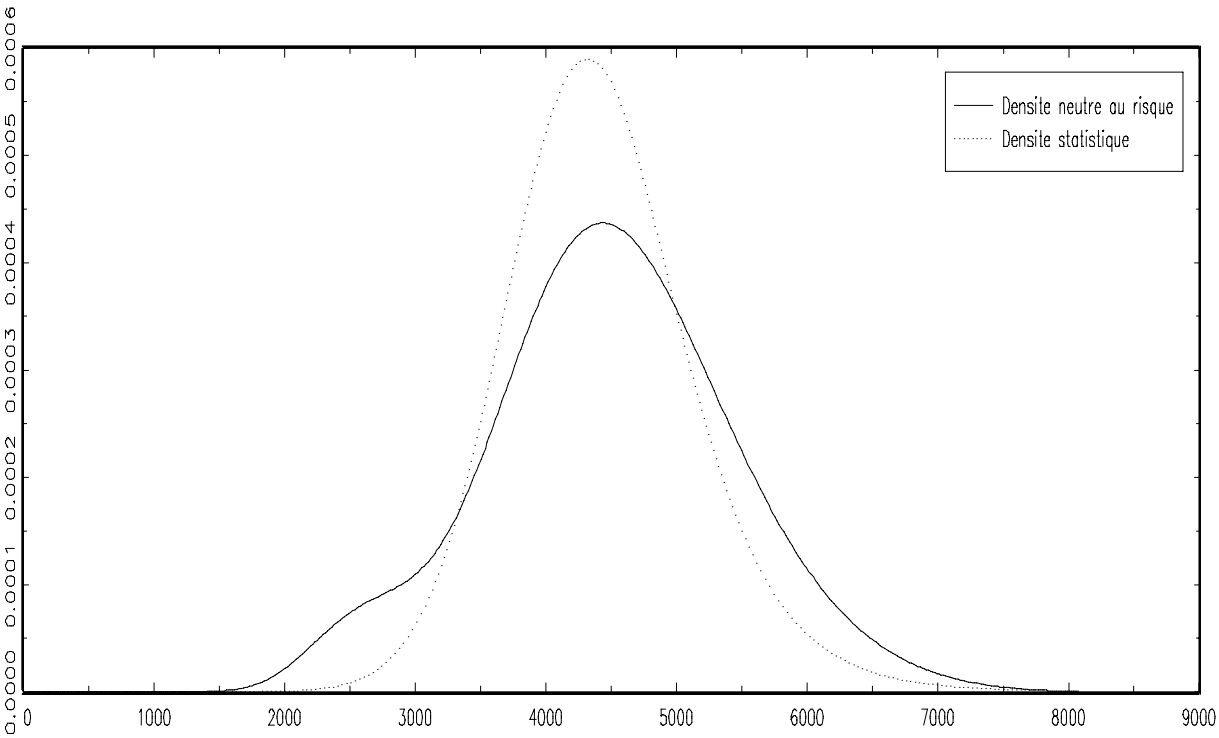


Figure 3.14.a: densite neutre au risque et densite statistique
du 19970415

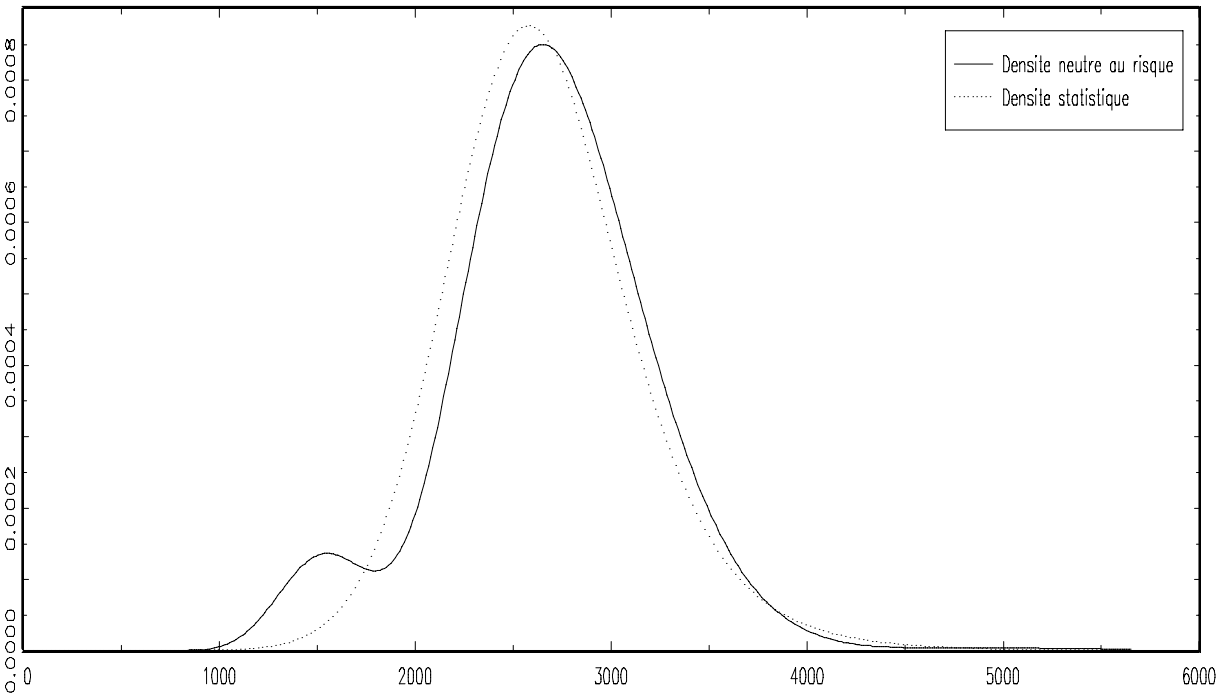


Figure 3.14.b: densite neutre au risque et densite statistique
du 19981015

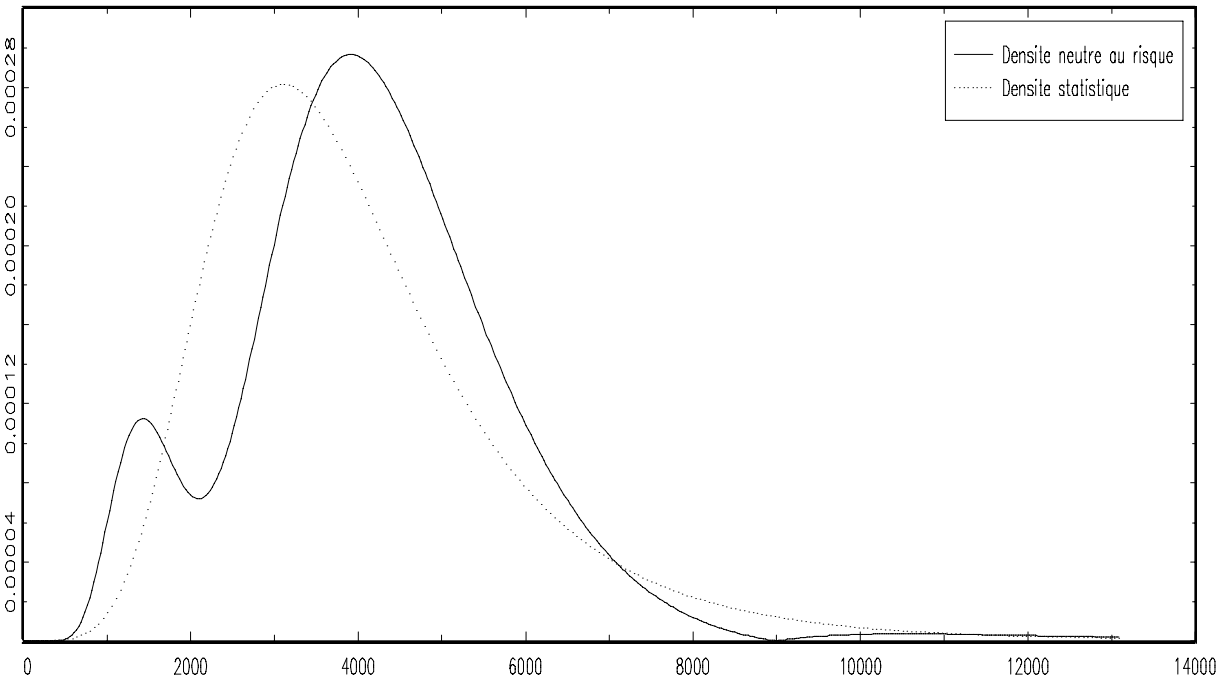


Figure 3.15.a: fonctions d'aversion au risque implicite Hermite et explicite Black-Scholes:
19950315

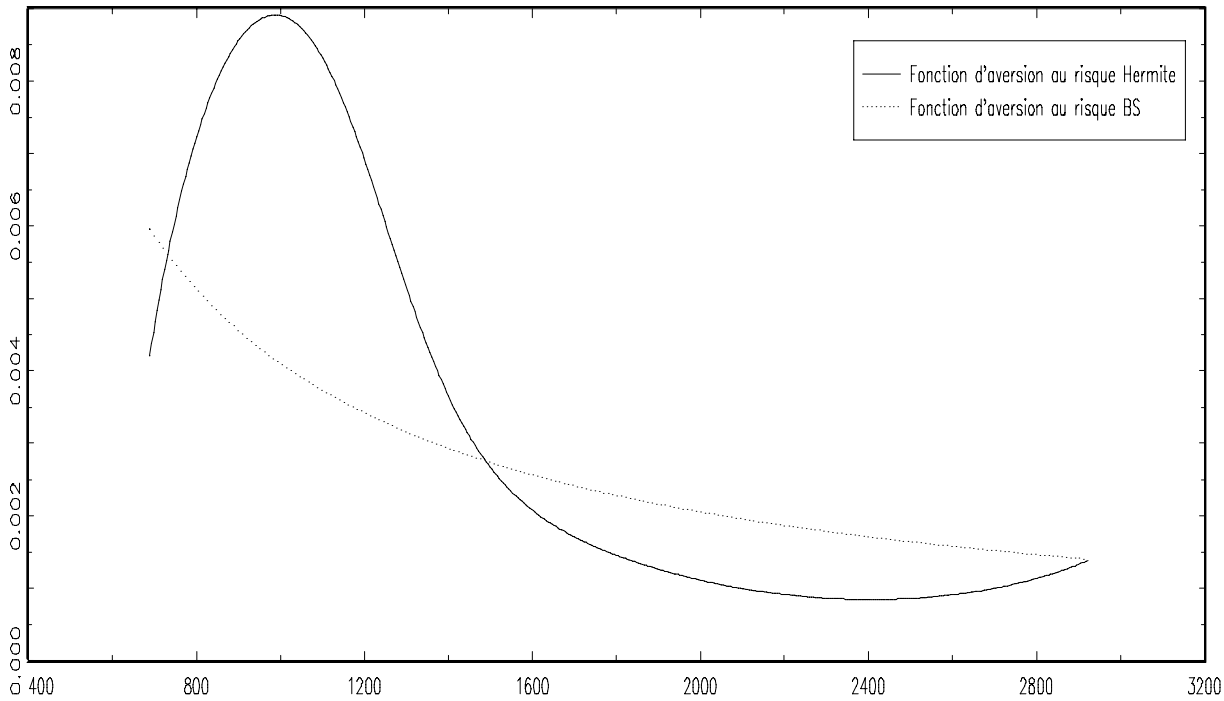
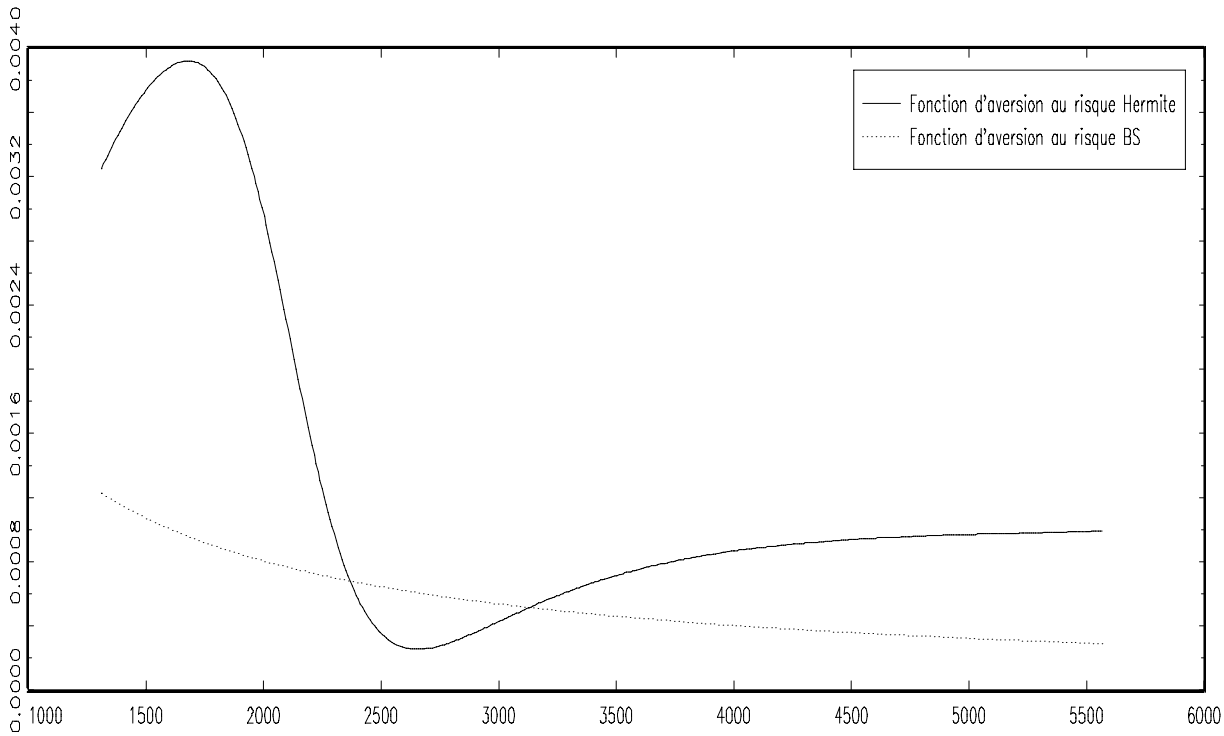


Figure 3.15.b: fonctions d'aversion au risque implicite Hermite et explicite Black-Scholes:
19981015



Annexes de la partie III

Annexe F : test de Dickey et Fuller augmenté

Le test de Dickey et Fuller est un test de non-stationnarité des variables. Les étapes du test sont les suivantes.

On teste la représentation générale avec constante et tendance déterministe :

$$\Delta y_t = \mu_c + \gamma_c t + \varphi_c y_{t-1} + u_t,$$

et l'on teste tout d'abord $H_0 \ : \varphi_c = 0$. Sous H_0, une tendance déterministe est présente mais on ignore si elle est significative ou non. On suppose qu'elle est non significative. Dans ce cas, la statistique de Student suit asymptotiquement une loi tabulée par Dickey et Fuller, notée C_α^{DF4} dans le tableau G. La règle de décision est la suivante :

I) si $t(\varphi_c) > C_\alpha^{\mathrm{DF4}}$ on rejette la non-stationnarité. On teste alors la significativité de la tendance déterministe ($H_0 \ : \gamma_c = 0$). Comme y est stationnaire, il n'y a pas de biais sur la loi des paramètres et $t(\gamma_c)$ suit bien asymptotiquement une loi normale. On arrête le test ici.

II) si $t(\varphi_c) \leq C_\alpha^{\mathrm{DF4}}$ on accepte la non-stationnarité. On peut tester la significativité de la tendance($H_0 \ : \gamma_c = 0$). Comme y est non-stationnaire, la loi de $t(\gamma_c)$ a été tabulée par Dickey et Fuller (notée C_α^{DF9} dans le tableau G). La règle de décision est la suivante :

A) si $t(\gamma_c) > C_\alpha^{\mathrm{DF9}}$ on accepte la présence d'une tendance déterministe. On arrête le test ici.

B) si $t(\gamma_c) \leq C_\alpha^{\mathrm{DF9}}$ on rejette la présence d'une tendance déterministe. On change alors le modèle et on considère le cas d'une constante seule sans

tendance déterministe :

$$\Delta y_t = \mu_b + \varphi_b y_{t-1} + u_t,$$

et l'on teste à nouveau $H_0 : \varphi_b = 0$. Sous H_0, une constante est présente mais on ignore si elle est significative ou non. La statistique de Student $t(\varphi_b)$ suit une loi tabulée par Dickey et Fuller dont les valeurs sont notées $C_\alpha^{\mathrm{DF}2}$ dans le tableau G et la règle de décision est la suivante :

1) si $t(\varphi_b) > C_\alpha^{\mathrm{DF}2}$ on rejette la non-stationnarité. On peut tester la significativité de la constante($H_0 : \mu_b = 0$). Comme y est stationnaire, $t(\mu_b)$ suit une loi normale. Le test s'arrête ici.

2) si $t(\varphi_b) \leq C_\alpha^{\mathrm{DF}2}$ on accepte la non-stationnarité. Dans ce cas, on peut tester la significativité de la constante ($H_0 : \mu_b = 0$). Comme y est non-stationnaire, la loi de $t(\mu_b)$ est tabulée par Dickey et Fuller (notée $C_\alpha^{\mathrm{DF}3}$ dans le tableau G). La règle de décision est :

a) si $t(\mu_b) > C_\alpha^{\mathrm{DF}3}$ on accepte la présence d'une constante déterministe. Le test s'arrête ici.

b) si $t(\mu_b) \leq C_\alpha^{\mathrm{DF}3}$ on rejette la présence d'une constante déterministe. Si c'est le cas on doit changer de modèle et considérer le cas sans constante :

$$\Delta y_t = \varphi_a y_{t-1} + u_t,$$

et l'on teste à nouveau $H_0 : \varphi_a = 0$. Comme il n'y a pas de constante, la statistique de Student ne suit pas un loi normale, mais une loi tabulée par Dickey et Fuller dont les valeurs critiques sont notées $C_\alpha^{\mathrm{DF}1}$. La règle de décision est :

i) si $t(\varphi_a) > C_\alpha^{\mathrm{DF}1}$ on rejette la non-stationnarité et on arrête le test ici.

ii) si $t(\varphi_a) \leq C_\alpha^{\mathrm{DF}1}$ on accepte la non-stationnarité et on arrête le test ici.

Annexe G : calcul des dérivées $p_t^{\mathbf{HER\prime}}(S)$ et $q_t^{\mathbf{HER\prime}}(S)$

$$\begin{aligned} q_t^{\mathrm{HER}\prime}(S) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t^2\tau S}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(S)-m_t^*}{\sigma_t\sqrt{\tau}}\right)^2\right]\widetilde{P}_4(\eta) \\ \widetilde{P}_4(\eta) &= -\frac{P_4(\eta)}{S}-\frac{P_4(\eta)}{S\sigma_t\sqrt{\tau}}\frac{\ln(S)-m_t^*}{\sigma_t\sqrt{\tau}}+\frac{Q_4(\eta)}{S\sigma_t\sqrt{\tau}} \\ m_t^* &= \ln(S_t)+\left(r_t-d_t-\frac{1}{2}\sigma_t^2\right)\tau, \end{aligned}$$

où $P_4(.)$ est donné par (4.15) et

$$Q_4(\eta)=\frac{3b_{3,t}}{\sqrt{6}}\left(-1+\eta^2\right)+\frac{4b_{4,t}}{\sqrt{24}}\left(\eta^3-3\eta\right).$$

Pour obtenir $p_t^{\mathrm{HER}\prime}(S)$on remplace m_t^* par :

$$m_t=\ln(S_t)+\left(\mu_t-\frac{1}{2}\sigma_t^2\right)(T-t).$$

Annexe H : Moments de la distribution t-student décentrée

Soit Y une variable de moyenne a et de variance b^2 qui suit la distribution suivante :

$$f(y;s,\eta) = \begin{cases} c\left[1+\frac{1}{\eta-2}\left(\frac{y}{1-s}\right)^2\right]^{-\frac{\eta+1}{2}}, & y<0 \\ c\left[1+\frac{1}{\eta-2}\left(\frac{y}{1+s}\right)^2\right]^{-\frac{\eta+1}{2}}, & y\geq 0 \end{cases} \tag{4.35}$$

$$c = \frac{\Gamma(\frac{\eta+1}{2})}{\sqrt{\pi(\eta-2)}\Gamma(\frac{\eta}{2})}, \tag{4.36}$$

alors clairement la variable $X = (Y-a)/b$ suit la distribution donnée par l'équation (4.22) et est de moyenne nulle et de variance 1.

Soit m_n la quantité :

$$m_n = c\int_0^{+\infty} x^n \left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dx.$$

Vérifions tout d'abordles valeurs de a et b dans les équations (4.23) et (4.24).

$$\begin{aligned} \text{esp}(Y) &= c\int_{-\infty}^0 y\left[1+\frac{1}{\eta-2}\left(\frac{y}{1-s}\right)^2\right]^{-\frac{\eta+1}{2}} dy + c\int_0^{+\infty} y\left[1+\frac{1}{\eta-2}\left(\frac{y}{1+s}\right)^2\right]^{-\frac{\eta+1}{2}} dy \\ &= c\int_{-\infty}^0 (1-s)^2 x\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dx + c\int_0^{+\infty} (1+s)^2 x\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dx \\ &= \left[-(1-s)^2+(1+s)^2\right] m_1, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} m_1 &= c\int_0^{+\infty} x\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dx \\ &= c\frac{\eta-2}{\eta-1}\left[\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta-1}{2}}\right]_0^{+\infty} \\ &= c\frac{\eta-2}{\eta-1}, \end{aligned}$$

on a bien alors :

$$a = \text{esp}(Y) = 4sc\frac{\eta-2}{\eta-1}.$$

Vérifions maintenant que b est donné par (4.24) :

$$\begin{aligned}
\text{esp}(Y^2) &= c\int_{-\infty}^{0} y^2\left[1+\frac{1}{\eta-2}\left(\frac{y}{1-s}\right)^2\right]^{-\frac{\eta+1}{2}} dy + c\int_{0}^{+\infty} y^2\left[1+\frac{1}{\eta-2}\left(\frac{y}{1+s}\right)^2\right]^{-\frac{\eta+1}{2}} dy \\
&= c\int_{-\infty}^{0} (1-s)^3x^2\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dx + c\int_{0}^{+\infty} (1+s)^3x^2\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dx \\
&= \left[(1-s)^3+(1+s)^3\right] m_2,
\end{aligned}$$

avec

$$m_2 = c\int_{0}^{+\infty} x^2\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dx,$$

qui correspond à la moitié de la variance d'une variable de Student de moyenne nulle et de varianceto 1. Alors $m_2 = 1/2$ et :

$$b^2 = \text{var}(Y) = \text{esp}(Y^2) - \text{esp}(Y)^2 = 1 + 3s^2 - a^2.$$

Tournons-nous maintenant vers le calcul de la skewness et de la kurtosis de X.

$$\begin{aligned}
\text{skew}(X) &= \text{esp}(X^3) = \frac{\text{esp}\left[(Y-a)^3\right]}{b^3} \\
&= \frac{1}{b^3}\left[\text{esp}(Y^3) - 3a\,\text{esp}(Y^2) + 2a^2\right],
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\text{esp}(Y^3) &= c\int_{-\infty}^{0} y^3\left[1+\frac{1}{\eta-2}\left(\frac{y}{1-s}\right)^2\right]^{-\frac{\eta+1}{2}}dy + c\int_{0}^{+\infty} y^3\left[1+\frac{1}{\eta-2}\left(\frac{y}{1+s}\right)^2\right]^{-\frac{\eta+1}{2}}dy \\
&= c\int_{-\infty}^{0}(1-s)^4x^3\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}}dx + c\int_{0}^{+\infty}(1+s)^4x^3\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}}dx \\
&= \left[-(1-s)^4+(1+s)^4\right]m_3,
\end{aligned}$$

avec

$$m_3 = c\int_{0}^{+\infty} x^3\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}}dx.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
m_3 &= 2c\frac{\eta-2}{\eta-1}\int_{0}^{+\infty} x\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta-1}{2}}dx \\
&= 2c\frac{(\eta-2)^2}{(\eta-1)(\eta-3)},
\end{aligned}$$

et donc

$$\text{skew}(X) = 16cs(1+s^2)\frac{(\eta-2)^2}{(\eta-1)(\eta-3)} - 3a(1+3s^2) + 2a^2.$$

La kurtosis de X est donnée par :

$$\begin{aligned}
\text{kurt}(X) &= \text{esp}(X^4) = \frac{\text{esp}\left[(Y-a)^4\right]}{b^4} \\
&= \frac{1}{b^4}\left[\text{esp}(Y^4) - 4a\,\text{esp}(Y^3) + 6a^2\,\text{esp}(Y^2) - 3a^4\right], \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\text{esp}(Y^4) &= c\int_{-\infty}^{0} y^4\left[1+\frac{1}{\eta-2}\left(\frac{y}{1-s}\right)^2\right]^{-\frac{\eta+1}{2}}dy + c\int_{0}^{+\infty} y^4\left[1+\frac{1}{\eta-2}\left(\frac{y}{1+s}\right)^2\right]^{-\frac{\eta+1}{2}}dy \\
&= c\int_{-\infty}^{0}(1-s)^5x^4\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}}dx + c\int_{0}^{+\infty}(1+s)^5x^4\left(1+\frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}}dx \\
&= \left[-(1-s)^5+(1+s)^5\right]m_4,
\end{aligned}$$

avec

$$m_4 = c \int_0^{+\infty} x^4 \left(1 + \frac{x^2}{\eta - 2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dx,$$

qui est clairemen la moitié de la kurtosis d'une variable qui suit une loi de Student de moyenne 0 et de variance 1. On sait que la valeur d'une telle kurtosis est $3(\eta-2)/(\eta-4)$ et donc :

$$\text{esp}(Y^4) = 3(1 + 10s^2 + 5s^4)\frac{(\eta - 2)}{(\eta - 4)},$$

et l'on connait ainsi tous les termes de léquation (4.37).

Annexe I : Distributions de $\left(\xi_{x,t+h}, \xi_{y,t+h}\right)$ et $\left(\sqrt{V_t}dZ_t^1, dZ_t^2\right)$

On va vérifier que $\left(\xi_{x,t+h}, \xi_{y,t+h}\right)$ suit une loi normale bivariée de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance $\begin{pmatrix} V_t & \rho\sqrt{V_t} \\ \rho\sqrt{V_t} & 1 \end{pmatrix}$.

On a supposé que $\xi_{x,t+h}$ était une variable gaussienne de moyenne nulle et de variance V_t.

Calcul de esp $\left(\xi_{y,t+h}\right)$

$$\begin{aligned} & \text{esp}\left(\rho\frac{\xi_{x,t+h}}{\sqrt{V_t}} + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{2}}\left(\frac{\xi_{x,t+h}^2}{V_t} - 1\right)\right) \\ = & \sqrt{\frac{1-\rho^2}{2}}\left(\frac{1}{V_t}\,\text{var}(\xi_{x,t+h}^2) - 1\right) \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

Calcul de cov $\left(\xi_{x,t+h}, \xi_{y,t+h}\right)$

$$\begin{aligned} & \text{cov}\left(\xi_{t+h}, \rho\frac{\xi_{x,t+h}}{\sqrt{V_t}} + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{2}}\left(\frac{\xi_{x,t+h}^2}{V_t} - 1\right)\right) \\ = & \ \rho\frac{1}{\sqrt{V_t}}\,\text{var}\left(\xi_{x,t+h}\right) + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{2}}\frac{1}{V_t}\,\text{esp}\left(\xi_{x,t+h}^3\right) \\ = & \ \rho\sqrt{V_t}. \end{aligned}$$

Calcul de var $\left(\xi_{y,t+h}\right)$

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{var}\left(\rho\frac{\xi_{x,t+h}}{\sqrt{V_t}}+\sqrt{\frac{1-\rho^2}{2}}\left(\frac{\xi^2_{x,t+h}}{V_t}-1\right)\right) \\
= \;& \rho^2\frac{1}{V_t}\operatorname{var}\left(\xi_{x,t+h}\right)+\rho\frac{1}{V_t\sqrt{V_t}}\sqrt{\frac{1-\rho^2}{2}}\operatorname{esp}\left(\xi^3_{t+h}\right)+\frac{1-\rho^2}{2}\frac{1}{V_t^2}\operatorname{var}\left(\xi^2_{t+h}\right) \\
= \;& \rho^2+\frac{1-\rho^2}{2}\frac{1}{V_t^2}\left(3V_t^2-V_t^2\right) \\
= \;& 1.
\end{aligned}
$$

CQFD.

Conclusion générale

Le contenu en information dans les prix d'options est devenu depuis quelques années un enjeu majeur pour les institutions financières et en particulier pour les banques centrales. Ces dernières y voient la possibilité de pouvoir tester les réactions du marché à leur intervention sur les taux d'intérêt. Les traders dans les banques commerciales quant à eux peuvent trouver là un outil pour tester les anticipations de marché sur le comportement futur des cours des actifs et s'en servir dans la gestion de leur portefeuille.

La seconde partie de la thèse présente la comparaison de plusieurs méthodes d'estimation de la densité neutre au risque. Plusieurs remarques sont à préciser sur cette étude.

Premièrement les données utilisées, à savoir les options sur indice CAC 40 et sur contrat à terme Pibor 3 mois sont des produits très rarement utilisés dans les applications d'études financières du fait entre autres de leur manque de liquidité.

Deuxièmement, le nombre de méthodes d'extraction de la densité neutre au risque retenues est nettement supérieur à celui observé dans l'ensemble des applications portant sur le sujet. On a distingué trois grandes familles de distributions qui sont les modèles de diffusion, les modèles non paramétriques et les méthodes structurelles.

L'étude fait ressortir les résultats suivants. Lorsqu'il s'agit d'estimer la densité neutre au risque du prix de l'actif sous-jacent des options, nous déconseillons l'utilisation des modèles non paramétriques. Ces modèles en effet, s'ils peuvent s'avérer très précis et bien adaptés à la réalité du marché, présente le désavantage majeur de nécessiter un grand nombre de prix observés. Ils sont donc très imprécis pour l'estimation d'une densité quotidienne par maturité qui n'intègre qu'un faible nombre de prix d'options. Les modèles de diffusion présentent l'avantage d'être fondés sur des notions intuitives de l'évolution du processus du prix et le modèle à sauts sur les prix donnent des résultats plutôt satisfaisants. En conclusion des résultats de cette seconde partie, nous préconisons dans cette étude d'estimer la densité neutre au risque en appliquant des méthodes structu-

relles et nous retenons en particulier une densité issue d'un développement en polynômes d'Hermite.

Le modèle à sauts et le développement en polynômes d'Hermite sont utilisés dans plusieurs applications de la troisième partie. La première application est l'analyse en termes d'anticipations des intervalles de confiance du Pibor 3 mois et du CAC 40.

Les intervalles de confiance s'avèrent être un outil informationnel efficace pour étudier les réactions du marché à une mesure ou un événement d'ordre politique ou économique. Nous avons choisi l'exemple des élections anticipées en France en 1997. Nous avons montré que les intervenants du marché connaissaient la décision du Chef de l'État sur la dissolution de l'Assemblée plusieurs jours avant son annonce officielle.

La seconde application porte sur le test de la théorie des anticipations sur le taux Pibor 3 mois. L'hypothèse de la théorie des anticipations est revisitée dans un cadre différent du cadre traditionnel. En effet, il s'agit de tester si les moments implicites dans les prix d'options sont aptes à expliquer la prime de risque liant le spread taux court futur moins taux au comptant au spread taux à terme moins taux court. Les résultats de ces test ne se sont pas avérés très convaincants et dans l'ensemble on ne peut pas retenir les moments neutres au risques issus des options pour expliquer la prime de risque. On peut cependant nuancer ce résultat en notant une légère amélioration de l'explication de la prime de risque lorsqu'on utilise le modèle de lissage de smile pour estimer la skewness et la kurtosis neutres au risque à partir des options sur contrat à terme Pibor 3 mois.

Enfin dans une troisième application on s'attache à l'estimation de la fonction d'aversion au risque des agents du marché implicite dans les prix d'options. On cherche à déterminer dans cette partie deux choses. D'une part si l'aversion au risque des agents du marché est variante à travers le temps, d'autre part si elle peut s'avérer utile pour un trader pour se positionner sur le marché.

A partir d'une relation théorique entre la fonction d'aversion au risque, la densité neutre au risque estimée à partir des prix d'options et la densité statistique estimée à partir de séries temporelles des rendements du prix de l'actif sous-jacent, on peut quantifier le degré d'aversion au risque des agents. Cette étude est exécutée de deux façons différentes. D'une façon implicite d'une part en utilisant une densité neutre au risque issue d'un développement en polynômes d'Hermite et une densité statistique issue d'une loi de Student asymétrique. Les résultats en termes d'activité de trading sont convaincants.

Une suite naturelle de ces travaux serait de s'intéresser à la distribution jointe de plu-

sieurs actifs à partir des prix d'options. Une façon de faire est d'estimer les lois marginales de chaque sous-jacent avec l'une des méthodes étudiées dans cette thèse et de récupérer la fonction de dépendance en recherchant le bon copula[3] à partir des données historiques. Une autre méthode consisterait à travailler directement à partir de données d'options sur multi sous-jacents et de calculer le prix de l'option par intégration en estimant le bon copula.

[3] Pour obtenir une revue complète de la méthodologie sur les copulas, on pourra se réferrer à Durrleman, Nikeghbali et Roncalli (2000), Bouyé, Durrleman, Nikeghbali, Riboulet et Roncalli (2000).

Bibliographie

[1] Abadir, K. et M. Rockinger (1997), "Density-Embedding Functions", HEC Working Paper.

[2] Abken, P.A. (1995), "Using Eurodollar Futures Options : Gauging the Market's View of Interest Rate Movements", *Economic Review*, 10-30.

[3] Abken, P., D.B. Madan et S. Ramamurtie (1996), "Estimation of Risk-Neutral and Statistical Densities by Hermite Polynomial Approximation : With an Application to Eurodollar Futures Options", Federal Reserve Bank of Atlanta, Document de travail.

[4] Abramowitz, M. et I.A. Stegun (1972), "Handbook of Mathematical Function", National Bureau of Standards, *Applied Mathematical Series*, 55, Washington, D.C.

[5] Aftalion, F. et P. Poncet (1991), "Les Futures sur Taux d'Intérêt : le Matif", Puf.

[6] Agmon, N., Y. Alhassid et R.D. Levine (1979), "An Algorithm for Finding the Distribution of Maximal Entropy", *Journal of Computational Analysis*, 30, 250-259.

[7] Aït-Sahalia, Y.(1996), "Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities", *Econometrica*, 64, 527-560.

[8] Aït-Sahalia, Y. et A.W. Lo (1998a), "Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices", *The Journal of Finance*, 53, 499-547.

[9] Aït-Sahalia, Y., Y. Wang et F. Yared (1998b), "Do Options Markets Correctly Price the Probabilities of Movement of the Underlying Asset ?", Document de travail.

[10] Aït-Sahalia, Y. et A.W. Lo (2000), "Nonparametric Risk Management and Implied Risk Aversion", *Journal of Econometrics*, 94, 9-51.

[11] Amin, K. I. et V. K. Ng (1997), "Inferring Future Volatility from the Information in Implied Volatility in Eurodollar Options : A New Approach", *The Review of Financial Studies*, 10(2), 333-367.

[12] Andersen, L (1995), "The Equity Option Volatility Smile : An Implicit Finite Difference Approach", Document de Travail, General Re Financial Products Corp.

[13] Andreasen, J. (1996), "Implied Modelling : Stable Implementation, Hedging and Duality", Document de travail.

[14] Avellaneda, M., C. Friedman, R. Holmes and D. Samperi (1997), "Calibrating Volatility Surfaces via Relative-Entropy Minimization", *Applied Mathematical Finance*, 4, 37-64.

[15] Bacchus, D., S. Foresi, K. Li et L. Wu (1997), "Accounting for Biases in Black-Scholes", Document de travail.

[16] Bahra, B., (1996), "Probability Distributions of Futures Asset Prices Implied by Option Prices", Bank of England Quarterly Bulletin, 299-311.

[17] Bakshi, G., C. Cao et Z. Chen (1997), "Empirical Performances of Alternative Option Pricing Models", *The Journal of Finance*, 52(5), 2003-2049.

[18] Balitskaia, E.O. et L.A. Zolotuhina (1988), "On the Representation of a Density by an Edgeworth Series", *Biometrika*, 75(1), 185-187.

[19] Ball, C.A. et W.N. Torous (1983), "A Simplified Jump Process for Common Stock Returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18(1), 53-65.

[20] Ball, C.A. et W.N. Torous (1985), "On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing", *Journal of Finance*, 60(1), 155-173.

[21] Ball, C.A. et W.N. Torous (1986), "Futures Options and the Volatility of Futures Prices", *Journal of Finance*, 41 (4), 857-870.

[22] Ball, C.A. et W.N. Torous (1999), "The Stochastic Volatility of Short-Term Interest Rates : Some International Evidence", *Journal of Finance*, 54(6), 2339-2359.

[23] Barle, S. et N. Cakici (1995), "Growing a Smiling Tree", *RISK*, 8(10), 77-82.

[24] Barone-Adesi, G. et R.E. Whaley (1987), "Efficient Analytic Approximation of American Option Values.", *Journal of Finance*, 62, 301-320.

[25] Bates, D. S. (1991), "The Crash of '87 : Was-it Expected ? The Evidence from Options Markets", *Journal of Finance*, 46(3), 1009-1044.

[26] Bates, D. S. (1996a), "Dollar Jump Fears, 1984-1992, Distributional Abnormalities Implicit in Currency Futures Options", *Journal of International Money and Finance*, 15(1), 65-93.

[27] Bates, D. S. (1996b), "Jumps and Stochastic Volatility : Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options", *Review of Financial Studies*, 9(1), 69-107.

[28] Bates, D. (2000), "Post-'87 Crash Fears in S&P500 Futures Options", *Journal of Econometrics*, 94(1-2), 181-238.

[29] Beckers S. (1981), "Standard Deviations Implied in Option Prices as Predictors of Future Stock Price Variability", *Journal of Banking and Finance*, 5, 363-381.

[30] Belkacem, L. (1996), "Processus Stables et Applications en Finance", Thèse de Doctorat, Université de Paris IX Dauphine.

[31] Berk, J.M. (1999), "Did Markets Expect Italy to Join EMU ? Evidence from Options Markets", *Applied Economics Letters*, 6, 481-484.

[32] Bisière, C (1994), "Théorie de la Structure par Terme des Taux d'Intérêt", Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II.

[33] Black, F. (1976), "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics*, 3, 167-179.

[34] Black, F., E. Derman et W. Toy (1990), "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analyst Journal*, 46, 33-39.

[35] Black, F, et P. Karazinski (1991), "Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal", *Financial Analysis Journal*, 47, 52-59.

[36] Black, F. et M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.

[37] Blair, B., S-H. Poon et S.J. Taylor (1998), "Modelling S&P100 Volatility : The Information Content of Stock Returns", Document de travail.

[38] Bliss, R.R. et N. Panigirtzoglou (1999), "Testing the Stability of Implied Probability Density Functions", Document de travail.

[39] Bodurtha, J. et M. Jermakyan (1996a), "Non Parametric Estimation of an Implied Volatility Surface.", Document de Travail, Université de Georgetown.

[40] Bodurtha, J. et M. Jermakyan (1996b), "Regular Smiles", Document de Travail, Université de Georgetown.

[41] Bollen, N.P.B., S.F. Gray et R. Whaley (2000), "Regime Switching in Foreign Exchange Rates : Evidence from Currency Option prices", *Journal of Econometrics*, 94, 239-276.

[42] Bollerslev, T. (1986), "Generalized AutoregressiveConditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

[43] Bollerslev, T., R.F. Engle et D.B. Nelson (1994), "ARCH Models", Handbook of Econometrics, 4, 2959-3037, Elsevier Science.

[44] Borensztein, E.R. et M.P. Dooley (1988), "Options on Foreign Exchange Rate Expectations", Mimeo.

[45] Borwein, J.M., A.S. Lewis et D. Noll (1996), "Maximum Entropy Reconstruction Using Derivative Information, part 1 : Fisher Information and Convex Duality", *Mathematics of Operation Research*, 21(2), 442-468.

[46] Bouchouev, I. et V. Isakov (1997), "The Inverse Problem of Option Pricing", *Inverse Problem*, 13, 11-17.

[47] Bouyé, E., V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet et T. Roncalli (2000), "Copula for Finance. A Reading Guide and Some Application", Survey, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais.

[48] Brace, A., D. Gatarek et M. Musiela (1997), "The Market Model of Interest Rate Dynamics", *Mathematical Finance*, 7(2), 127-155.

[49] Breeden, D.T., et R.H. Litzenberger (1978), "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices", *Journal of Business*, 51(4), 621-651.

[50] Brennan, M.J. et E.S. Schwartz (1977), "The Valuation of American Put Options.", *Journal of Finance*, 32, 449-462.

[51] Brennan, M.J. et E.S. Schwartz (1982), "An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17(3), 301-330.

[52] Brenner, M., G.R. Courtadon et M. Subrahmanyam (1985), "Options on the Spot and Options on Futures.", *Journal of Finance*, 40, 1303-1317.

[53] Brenner, M. et Y. Eom (1997), "No-Arbitrage Option Pricing : New Evidence on the Validity of the Martingale Property.", Document de Travail, Université de New-York.

[54] Britten-Jones, M. et A. Neuberger (2000), "Option Prices, Implied Price Processes and Stochastic Volatility", *Journal of Finance*, 55(2), 839-866.

[55] Buchen, P.W. et M. Kelly (1996), "The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31(1), 143-159.

[56] Burashi, A. et J. Jackwerth (1999), "Is volatility Risk Priced in the Option Market ?", Document de travail.

[57] Burgayran, E. et S. Darolles (1997), "Nonparametric Estimation of Random Time Observed Diffusion Equations using Scale Transformation", Document de travail.

[58] Butler, C. et H. Davies (1998), "Assessing Markets Views on Monetary Policy : the Use of Implied Risk Neutral Probability Distributions", Bank of England, Document de travail.

[59] Campa, J.M. et P.H.K. Chang (1996), "Arbitrage Based Tests of Target Zone Credibility : Evidence from ERM Cross-Rate Options", *American Economic Review*, 86, 726-740.

[60] Campa, J.M. et P.H.K. Chang (1998), "ERM Realignment Risk and its Economic Determinants as Reflected in Cross-Rate Options", *Economic Journal*, 108(449), 1046-1066.

[61] Campa, J.M., P.H.K. Chang et J.F. Refalo (1999), "An Options-Based Analysis of Emerging Market Exchange Rate Expectations : Brazil's Real Plan, 1994-1997", Document de Travail, NBER n°6929.

[62] Campa, J.M., P.H.K. Chang et R.L. Reider (1997), "ERM Bandwidths for EMU and after : Evidence from Foreign Exchange Options", *Economic Policy*, 24, 55-89.

[63] Campa, J.M., P.H.K. Chang et R.L. Reider (1998), "Implied Exchange Rate Distributions : Evidence from OTC Options Markets", *Journal of International Money and Finance*, 17(1), 117-160.

[64] Canina, L. et S. Figlewski (1993), "The Information Content of Implied Volatility", *Review of Financial Studies*, 6(3), 659-681.

[65] Carr, P. et D. Madan (1998), "Determining Volatility Surfaces and Option Values from an Implied Volatility Smile", Document de Travail, Université du Maryland.

[66] Chan, K., Y.P. Chung et W-M. Fong (1999), "The Informational Role of Stock and Option Volume", Document de travail.

[67] Chan, K.C., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff et A.B. Sanders (1992), "An Empirical Comparaison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", *Journal of Finance*, 47(3), 1209-1227.

[68] Chen, R-R et L. Scott (1993), "Pricing Interest Rate Futures Options with Futures-Style Margining", *Journal of Futures Markets*, 13(1), 15-22.

[69] Chesney, M. et L. Scott (1989), "Pricing European Currency Options : a Comparison of the Modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, 267-284.

[70] Chiarella, C., N. El-Hassan et A. Kucera (1998), "Evaluation of Derivative Security Prices in a Path Integral Framework Using Fourier-Hermite Series Expansions", Document de Travail, Sydney University of Technology.

[71] Chiras, D.P. et S. Manaster (1978), "The Information Content of Options Prices and a test of Market Efficiency", *Journal of Financial Economics*, 6, 213-234.

[72] Christensen, B.J. et N.R. Prabhala (1998), "The Relation Between Implied and Realized Volatility", *Journal of Financial Economics*, 50, 125-150.

[73] Clement, E., C. Gourieroux et A. Monfort (2000), "Econometric Specification of the Risk Neutral Valuation Model", *Journal of Econometrics*, 94, 117-143.

[74] Coleman, T., Y. Li et A. Verma (1998), "Reconstructing the Unknown Volatility Function", Document de Travail, Université de Cornell.

[75] Cont, R. (1997), "Beyond Implied Volatility", *EconoPhysics*, forthcoming.

[76] Corrado, C.J. et T. Su (1996a), "Skewness and Kurtosis in S&P500 Index Returns Implied by Option Prices", *Journal of Financial Research*, 19(2), 175-192.

[77] Corrado, C.J. et T. Su (1996b), "S&P 500 Index Option Tests of Jarrow and Rudd's Approximate Option Valuation Formula", *Journal of Futures Markets*, 16(6), 611-629.

[78] Corrado, C.J. et T. Su (1997), "Implied Volatility Skews and Stock Index Skewness and Kurtosis Implied by S&P500 index Option Prices", *Journal of Derivatives*, 4(4), 8-19.

[79] Coutant, S. (1999), "Implied Risk Aversion Functions Using Hermite Polynomials", Bank of International Settlement issue.

[80] Coutant, S., E. Jondeau et M. Rockinger (2000), "Reading Interest Rate and Bond Future Options' Smiles around the 1997 French Snap Election", *Journal of Banking and Finance*, forthcoming.

[81] Cox, J.C., J.E. Ingersoll et S.A. Ross (1981), "The Relation between Forward Prices and Futures Prices", *Journal of Financial Economics*, 9, 321-346.

[82] Cox, J.C., J.I. Ingersoll et S.A. Ross (1985a), "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53(2), 363-384.

[83] Cox, J.C., J.I. Ingersoll et S.A. Ross (1985b), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53(2), 385-407.

[84] Cox, J., S. Ross et M Rubinstein (1979), "Option Pricing : A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263.

[85] Cuthbertson, K. (1996), "The Expectations Hypothesis of the Term Structure : The UK Interbank Market", *Economic Journal*, 106(436), 578-592.

[86] Dana, R.A. et M. Jeanblanc-Picqué (1994), "Marchés Financiers à Temps Continu", *Economica*.

[87] Das, S. R. et R. K Sundaram (1999), "Of Smiles and Smirks : A Term Structure Perspective", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34(2), 211-239.

[88] Day, T.E. et C.M. Lewis (1992), "Stock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options", *Journal of Econometrics*, 52, 267-287.

[89] Derman, E., et I. Kani (1994), "Riding on a Smile", *RISK*, 7, 32-39.

[90] Diebold, F.X. (1988), Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics, Springer-Verlag, New-York.

[91] Dothan, U.L. (1978), "On the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, 6, 59-69.

[92] Drost, F.C. et T.E. Nijman (1993), "Temporal Aggregation of GARCH Processes", *Econometrica*, 61(4), 909-927.

[93] Dumas, B., J. Fleming et R.E. Whaley (1998), "Implied Volatility Functions : Empirical Tests", *Journal of Finance*, 53(6), 7-22.

[94] Dupire, B. (1994), "Pricing with a Smile", *RISK*, 7, 18-20.

[95] Durrleman, V, A. Nikeghbali et T. Roncalli (2000), "Which Copula is the Right One", Document de travail, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais.

[96] Ederington, L. et W. Guan (1999), "The Information Frown in Option Prices", Document de travail.

[97] El Karoui, N. (1996), "Processus Stochastique et Analyse Financière", Cours de DEA.

[98] El Karoui, N. et H. Geman (1994), "A Probabilistic Approach to the Valuation of General Floating Rate Notes with an Application to Interest Rate Swaps : ", *Advances in Futures and Options Research*, 7, 47-64.

[99] El Karoui, N. et J.C. Rochet (1989), "A Pricing Formula for Options on Coupon Bonds", Document de travail.

[100] Engle, R.F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50, 987-1008.

[101] Engle, R.F. (1990), "Discussion : Stock Market Volatility and the Crash of 87", *Review of Financial Studies*, 3, 103-106.

[102] Engle, R.F. et C. Mustafa (1992), "Implied ARCH Models from Options Prices", *Journal of Econometrics*, 52, 289-311.

[103] Fama (1976), "Forward Rates as Predictors of Futures Spot Rates", *Journal of Financial Economics*, 3, 361-377.

[104] Fama (1984), "The Information in the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 13, 509-528.

[105] Fama, E.F. et R.R. Bliss (1987), "The Information in Long-Maturity Forward Rates", *American Economic Review*, 77(4), 680-692.

[106] Figlewski, S. et T.C. Green (1998), "Market Risk and Model Risk for Financial Institution Writing Options", Forthcoming in *Journal of Finance*.

[107] Frachot, A., J.P. Laurent et O. Pichot (1999), "Distributions Implicites Anormales des Taux de Change", Document de Travail, INSEE

[108] Fritelli, M. (1995), "The Minimal Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets", Mathematical Finance Conference of Montreal, Forthcoming dans *Mathematical Finance*.

[109] Galati, G. et W. Melick (1999), "Perceived Central Bank Intervention and Market Expectations : an Empirical Study of the Yen/Dollar Exchange Rate, 1993-96", Document de travail de la BRI n°77.

[110] Gallant, A.R. et G. Tauchen (1996), "Which Moments to Match ?", *Econometric Theory*, 12(4), 657-681.

[111] Garcia, R. et E. Renault (1998), "Risk Aversion, Intertemporal Substitution, and Option Pricing", Document de travail.

[112] Garman, M, et S. Kohlagen (1983), "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance*, 2, 231-237.

[113] Geman, H (1989), "The Importance of the Forward Neutral Probability in a Stochastic Approach of Interest Rates", Document de Travail, ESSEC (Univ. Paris I, PhD)

[114] Geman, H. et T. Ané (2000), "Order Flow, Transactions Clock and Normality of Asset Returns", *Journal of Finance*, 55 (5), 2259-2284.

[115] Geman, H., N. El Karoui et J.C. Rochet, (1995) "Changes of Numéraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing" *Journal of Applied Probability.*

[116] Geman, H., D.B. Madan et M. Yor (1998), "Asset Prices are Brownian Motion : Only in Business Time", Document de travail.

[117] Gemmill, G. (1992), "Policy Risk and Market Efficiency : Tests based in British Stock and Options markets in the 1987 Election", *Journal of Banking and Finance*, 16(1), 211-231.

[118] Gerlach, S. et F. Smets (1995), "The Term Structure of Euro-Rates : Some Evidence in Support of the Expectations Hypothesis", *Journal of International Money and Finance*, 16(2), 305-321.

[119] Geske, R. (1979), "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics*, 7, 63-81.

[120] Geske, R. et H.E. Johnson (1984), "The American Put Valued Analytically.", *Journal of Finance*, 39, 1511-1524.

[121] Glosten, L.R., R. Jagannathan et D. Runkle (1993), "On the Relationship Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks", *Journal of Finance*, 48(5), 1779-1801.

[122] Gourieroux, C., A. Monfort et E. Renault (1992), "Indirect Inference", *Journal of Applied Econometrics*, 8(0), S85-S118.

[123] Gourlaouen, J.P. (1997), "La Structure par Terme des Taux d'Intérêt", Economica.

[124] Grundy, B.D. (1991), "Options Prices and the Underlying Asset's Return Distribution", *Journal of Finance*, 46(3), 10451069.

[125] Guo, D. (1996), " The Predictive Power of Implied Stochastic Variance from Currency Options", *The Journal of Futures Markets*, 16(8), 915-942.

[126] Guo, D. (1998), "The Risk Premium of Volatility Implicit in Currency Options", *Journal of Business & Economic Statistic*, 16(4), 498-507.

[127] Hamburger, M.J. et E.N. Platt (1975), "The Expectations Hypothesis and the Efficiency of the Treasury Bill Market", *Review of Economic and Statistics*, 57(2), 190-199.

[128] Hamon, J. et B. Jacquillat (1992), "Le Marché Français des Actions", Puf.

[129] Hansen, B.E. (1994), "Autoregressive Conditional Density Estimation", *International Economic Review*, 35(3), 705-730.

[130] Hansen, L. et R. Hodrick (1980), "Forward Exchange Rates as Optimal Predictors of Futures Spot Rates", *Journal of Political Economy*, 88, 829-853.

[131] Hardouvelis, G.A. (1994), "The Term Structure Spread and Future Changes in Long and Short Rates in the G7 Countries", *Journal of Monetary Economics*, 33(2), 255-283.

[132] Harrison, J.M. et D. Kreps (1979), "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*, 20, 381-408.

[133] Harrison, J.M., et S. Pliska (1981), "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and their Applications*, 11, 215-260.

[134] Harvey, C.R. et R.E. Whaley (1991), "S&P100 Index Option Volatility", *The Journal of Finance*, 46(4), 1551-1561.

[135] Harvey, C.R. et A. Siddique (1999), "Autoregressive Conditional Skewness", *Journal of Quantitative Analysis*, 34(4), 465-187.

[136] Harvey, C.R. et R.E. Whaley (1992), "Market Volatility Prediction and the Efficiency of the S&P100 Index Option Market", *Journal of Financial Economics*, 31, 41-73.

[137] Heath, D.C., R.A. Jarrow et A. Morton (1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*, 60, 77-105.

[138] Henker, T. et H.B. Kazemi (1998), "The Impact of Deviations from Random Walk in Security Prices on Option Prices", Document de travail.

[139] Herrmann, R. et A. Narr (1997), "Risk Neutrality", *RISK*, 10, 23-29.

[140] Heston, S.L. (1993), "A Closed-Form Solution for Options on Assets with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.

[141] Hördhal, P. (1999), "Estimating the Implied Distribution of the Future Short Term Interest Rate Using the Longstaff-Schwartz Model", Document de travail.

[142] Huan C. et R. H. Litzenberger (1990), Foundations for Financial Economics, North-Holland.

[143] Hull, J.C., et A.D. White (1987), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, 42(2), 281-300.

[144] Hull, J. et A. White (1990), "Pricing Interest-rate Derivatives Securities", *Review of Financial Studies*, 3, 573-592.

[145] Hurn, A.S., T. Moody et V.A. Muscatelli (1995), "The Term Structure of Interest Rates in the London Interbank Market", *Oxford Economic Papers*, 47(3), 418-136.

[146] Hutchinson, J, A. Lo et T. Poggio (1994), "A Nonparametric Approach to Pricing and Hedging Derivative Securities via Learning Networks", *Journal of Finance*, 49(3), 851-889.

[147] Jackwerth, J.C. (1999a), "Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns", *Review of Financial Studies*, Forthcoming.

[148] Jackwerth, J.C. (1999b), "Option Implied Risk-Neutral Distributions and Implied Binomial Trees : A Litterature Review", Document de travail.

[149] Jackwerth, J.C., et M. Rubinstein (1996), "Recovering Probability Distributions from Option Prices", *Journal of Finance*, 51(5), 1611-1632.

[150] Jamshidian, F. (1989), "An Exact Bond Option Formula", *Journal of Finance*, 44, 205-209.

[151] Jarque, C.M. et A.K. Bera (1980), "Efficient Test of Normality, Homoskedasticity and Serial Independence of Regression Residuals", *Economic Letters*, 6, 255-259.

[152] Jarrow, R. et A. Rudd (1982), "Approximate Valuation for Arbitrary Stochastic Processes ", *Journal of Financial Economics*, 10(3), 349-369.

[153] Jondeau, E. (1998), "La Théorie des Anticipations de la Structure par Terme et la Mesure de la prime de Risque", Thèse de Doctorat, Université de Paris IX Dauphine.

[154] Jondeau, E. et M. Rockinger (1999), "Time Varying Skewness and Kurtosis : Tails and Moments", Document de travail.

[155] Jondeau, E. et M. Rockinger (2000a), "Estimating Gram-Charlier Expansions with Positivity Constraints", Forthcoming dans *Journal of Economic Dynamic and Control*.

[156] Jondeau, E. et M. Rockinger (2000b), "Entropy Densities, with an Application to Autoregressive Conditional Skewness and Kurtosis", Document de travail.

[157] Jondeau, E. et M. Rockinger (2000c), "Reading the Smile : The Message Conveyed by Methods which Infer Risk Neutral Densities.", Forthcoming dans *Journal of International Money and Finance*.

[158] Jorion, P. (1988), "On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets", *Review of Financial Studies*, (1), 431-445.

[159] Jorion, P. (1995), "Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market", *Journal of Finance*, 50(2), 507-528.

[160] Jorion, P., et F.S. Mishkin (1991), "A Multicountry Comparison of Term-Structure Forecasts at Long Horizons", *Journal of Financial Economics*, 29(1), 59-80.

[161] Lagnado, R. et S. Osher (1997), "Reconciling Difference", *RISK*, 10(4), 79-83.

[162] Lamberton, D. et B. Lapeyre (1991), "Introduction au Calcul Stochastique appliqué à la Finance", Mathématiques et Applications, Ed. Ellipses.

[163] Lamoureux, D. et W. Lastrapes (1993), "Forecasting Stock-Return Variance : Towards an Understanding of Stochastic Implied Volatilities", *Review of Financial Studies*, 6, 293-326.

[164] Leahy, M. et C. Thomas (1996), "The Sovereignty Option : The Quebec Referendum and Market Views on the Canadian Dollar", Document de Travail, Federal Reserve Board, Washington.

[165] Lee, S.W. et B.E. Hansen (1994), "Asymptotic Theory for the GARCH(1,1) Quasi-Maximum Likelihood Estimator", *Econometric Theory*, 10(1), 29-52.

[166] Lin, Y-N., N. Strong et X. Xu (1999), "Pricing FTSE Index Options under Stochastic Volatility", Document de travail.

[167] Ljung, G. et G. Box (1978), "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models", Biometrika, 66, 67-72.

[168] Longstaff, F.A. (1989), "A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates",*Journal of Financial Economics*, 23, 195-224.

[169] Longstaff, F.A. et E.S.Schwartz (1992), "Interest Rate Volatility and the Term Structure : A Two-Factor General Equilibrium Model", *Journal of Finance*, 47(4), 12591282.

[170] Lucas, R. (1978), "Asset Prices in Exchange Economy", *Econometrica*, 46, 1429-1446.

[171] Lumsdaine, R.L. (1996), "Consistency and Asymptotic Normality of the Quasi-maximum Likelihood Estimator in IGARCH(1,1) and Covariance Stationary GARCH(1,1) models", *Econometrica*, 64(3), 575-596.

[172] Lyons, R.K. (1988), "Tests of the Foreign Exchange Risk Premium Using the Expected Second Moments Implied by Option Pricing", *Journal of International Money and Finance*, 7, 91-108.

[173] McCauley, R. et W. Melick (1996), "Risk Reversal Risk", *RISK*, 9(11), 54-57.

[174] McCulloch, J.H. (1985), "The Value of European Options with Log-Stable Uncertainty", Document de Travail, Université de l'Ohio.

[175] MacMillan, L.W. (1986), "Analytic Approximation for the American Put Option.", *Advances in Futures and Options Research*, 1, 119-139.

[176] Madan, D.B., et F. Milne (1994), "Contingent Claims Valued and Hedged by Pricing and Investing in a basis", *Mathematical Finance*, 4, 223-245.

[177] Madan, D.B., P. Carr et E.C. Chang (1998), "The Variance Gamma Process and Option Pricing", Forthcoming dans *European Finance Review*.

[178] Malz, A.M., (1996a), "Using Options Prices to Estimate Realignment Probabilities in the European Monetary System", *Journal of International Money and Finance*, 15(5), 717-748.

[179] Malz, A.M. (1996b), "Option-based Estimates of the Probability Distribution of Exchange Rates and Currency Excess Returns", *Federal Reserve Bank of New York*, document de travail.

[180] Malz, A. (1997), "Estimating the Probability Distribution of the Future Exchange Rate from Option Prices", *Journal of Derivatives*, 5(2), 18-36.

[181] Mandelbrot, B. (1963), "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, 36, 394-419.

[182] Marsh, T.A. et E.R. Rosenfield (1983), "Stochastic Processes for Interest Rates and Equilibrium Bond Prices", *Journal of Finance*, 38(2), 635-648.

[183] Melik, W.R. et C.P. Thomas (1997), "Recovering an Asset's Implied PDF from Options Prices : an Application to Crude Oil During the Gulf Crisis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, 91-116.

[184] Melino, A. et S.M. Turnbull (1990), "Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility", *Journal of Econometrics*, 45, 239-265.

[185] Merton, R. (1969), "Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty : the Continuous-Time Case", *Review of Economics and Statistics*, 51, 847-857.

[186] Merton, R. (1971), "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model", *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413.

[187] Merton, R.C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141-183.

[188] Merton, R.C. (1976), "Option Pricing When Underlying Stock Return Are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3, 125-144.

[189] Merton, R.C. (1980), "On Estimating the Expected Return on the Market", *Journal of Financial Economics*, 8, 323-361.

[190] Mishkin, F.S. (1988), "The Information in the Term Structure : some Further Results", *Journal of Applied Econometrics*, 3, 307-314.

[191] Mizrach, B. (1996), "Did Options Prices Predict the ERM Crisis ?", Document de Travail, Université de Rutgers.

[192] Moraux, F., P. Navatte et C. Villa (1998), "Market Volatility Index and Implicit Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models", Document de Travail, Université de Renne.

[193] Müller, S. (1987), "Arbitrage Pricing of Contingent Claims", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems n° 254, Springer Verlag.

[194] Musiela, M. et M. Rutkowski (1998), "Martingale Methods in Financial Modelling", Springer Verlag, New York.

[195] Nakamura, H. et S. Shiratsuka (1999), "Extracting Market Expectations from Option Prices : Case Studies in Japanese Option Markets", Document de travail.

[196] Nelson, D.B. (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A New Approach", *Econometrica*, 59, 347-370.

[197] Nelson, B. et D.P. Foster (1996), "Asymptotic Filtering Theory for Multivariate ARCH Models", *Journal of Econometrics*, 71(1-2), 1-47.

[198] Neuhaus, H. (1995), "The Information Content of Derivatives for Monetary Policy", Deutsche Bundesbank, Document de travail.

[199] Newey, W.K. et K.D. West (1987), "A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix", *Econometrica*, 55(3), 703-708.

[200] Nijman, S. et E. Sentana (1996), "Marginalization and Contemporaneous Aggregation in Multivariate GARCH Processes", *Journal of Econometrics*, 71, 71-87.

[201] Pham, H. et N. Touzi (1996), "Equilibrium State Prices in a Stochastic Volatility Model", *Mathematical Finance*, 6(2), 215-236.

[202] Potters, M., R. Cont et J. Bouchaud (1998), "Financial Markets As Adaptive Systems", *Europhysics Letters*, 41(3), 239-244.

[203] Pratt, J.W. (1964), "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica*, 32, 122-136.

[204] Pritsker, M. (1998), "Nonparametric Density Estimation and Tests of Continuous Time Interest Rate Models", *The Review of Financial Studies*, 11(3), 449-487.

[205] Ramawasmy, K et S.M. Sundaresan (1985), "The Valuation of Options on Futures Contracts.", *Journal of Finance*, 40, 1319-1340.

[206] Richardson, M et T. Smith (1991), "Tests of Financial Models in the Presence of Overlapping Observations", *The Review of Financial Studies*, 4(2), 227-254.

[207] Roll, R. (1977), "An Analytical Valuation Formula for Unprotected American Call options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 5, 251-258.

[208] Roon, F., C. Veld (1995), "A Study on the Efficiency of the Market for Dutch Long Term Call Options", Document de travail.

[209] Rosenberg, J.V. et R.F. Engle (1997), "Option Hedging Using Empirical Pricing Kernel", NBER n°6222.

[210] Rubinstein M.(1985), "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978.", Journal of Finance, 40(2), 455-480.

[211] Rubinstein, M. (1994), "Implied Binomial Trees", *Journal of Finance*, 69, 771-818.

[212] Rubinstein, M. (1998), "Edgeworth Binomial Trees", *Journal of Finance*, 5(3), 20-27.

[213] Ryu, H.K. (1993), "Maximum Entropy Estimation of Density and Regression Functions", *Journal of Econometrics*, 56, 397-440.

[214] Sabbatini, M. et O. Linton (1998), "A GARCH Model of the Implied Volatility of the Swiss Market Index from Option Prices", *International Journal of Forecasting,* 14, 199-213.

[215] Schwartz, E.S. (1977), "The Valuation of Warrants : Implementing a New Approach.", *Journal of Financial Economics*, 4, 79-93.

[216] Scott, L.O. (1992), "The Information Content of Prices in Derivative Security Markets", International Monetary Fund, 39(3), 596-625.

[217] Scott, L.O. (1997), Pricing Stock Options in a Jump-diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates : Applications of Fourier Inversion Methods", *Mathematical Finance*, 7(4), 413426.

[218] Shannon, C.E. (1948), "The Mathematical Theory of Communication", *Bell System Technical Journal*, 27, 379-423.

[219] Sherrick B.J., P. Garcia et V. Tirupattur (1996), "Recovering Probabilistic Information from Option Markets : Tests of Distributional Assumptions", *Journal of Futures Markets*, 16(5), 545-560.

[220] Shiller, R.J., J.Y. Campbell and K.L. Schoenholtz (1983), "Forward Rates and Futures Policy : Interpreting the Term Structure of Interest Rates", *Brookings Papers on Economic Activity*, 1,173-217.

[221] Shimko, D. (1993), "Bounds of Probability", *RISK*, 6, 33-47.

[222] Stein, E.M. et J.C. Stein (1991), "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility : An Analytic Approach", *The Review of Financial Studies*, 4(4), 727-752.

[223] Stoer, J. et R. Bulirsh (1993), "Introduction to Numerical Analysis", Springer-Verlag (Second Edition), New-York.

[224] Silverman, B. W. (1986), Density Estimation for Statistics and Data Analysis, Chapman and Hall : London.

[225] Simon, Y. (1997), "L'Encyclopédie des Marchés Financiers.", Economica.

[226] Söderlind, P. (1998), "Extracting Expectations about 1992 UK Monetary Policy from Option prices", CEPR n°1823.

[227] Söderlind P., et L.E.O. Svensson (1997), "New Techniques to Extract Market Expectations from Financial Instruments", *Journal of Monetary Economics*, 40(2), 383-429.

[228] Stambaugh, R.F. (1988), "The Information in Forward Rates : Implications for Models of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 21(1), 41-70.

[229] Stein, J. (1989), "Overreactions in the Options Market", *Journal of Finance*, 52(4), 1011-1023.

[230] Stutzer, M. (1996), "A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation", *Journal of Finance*, 51(5), 1633-1652.

[231] Taylor, S. (1986), "Modelling Financial Time Series", Wiley, New-York, NY.

[232] Tomkins, R. (1998), "Implied Volatility Surfaces : Uncovering the Regularities for Options on Financial Futures.", Document de Travail, Université de Technologie de Vienne et Université de Warwick.

[233] Vasicek, O. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.

[234] Whaley, R.E. (1981), "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 9, 207-211.

[235] Whaley, R.E (1982), "Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks", *Journal of Financial Economics*, 10, 29-58.

[236] Whaley, R.E. (1986), "Valuation of American Futures Options : Theory and Empirical Tests", *The Journal of Finance*, 41(1), 127-150.

[237] White, H. (1980), "A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and Direct Tests for Heteroskedasticity", *Econometrica*, 48, 817-838.

[238] Xu, X. et S.J. Taylor (1995), "Conditional Volatility and the Informational Efficiency of the PHLX currency market", *Journal of Banking and Finance*, 19, 803-821.

[239] Zakoïan, J.M. (1991), "Threshold Heteroskedasticity Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18(5), 931-955.

Contenu en information dans les prix d'options : estimation de la densité neutre au risque du sous-jacent et applications

L'objectif général de la thèse est l'étude du processus implicite du prix de l'actif sous-jacent et son apport en terme de contenu en information dans les prix d'options. A cette fin, deux outils seront utilisés : les options sur contrat à terme de taux d'intérêt et les options sur indice. Dans une première partie, nous décrivons les marchés sur lesquels nous travaillons ensuite et analysons le problème posé par cet objectif. Dans une seconde partie, nous faisons une étude descriptive et empirique de différents modèles d'estimation de la densité neutre au risque du sous-jacent. Nous comparons la capacité de ces modèles à dégager les sentiments du marché sur un événement économique ou politique particulier et essayons de retenir le ou les meilleurs de ces modèles d'après plusieurs critères bien précis de comparaison. Enfin, dans une troisième partie, nous passons en revue les différentes applications que l'on peut tirer de l'estimation de la densité neutre au risque du sous-jacent. Nous constatons qu'il existe plusieurs applications parmi lesquelles l'étude descriptive temporelle des réactions du marché à un événement, les tests d'efficience du marché des options à travers les volatilités, l'apport de l'information extraite des options dans l'amélioration des tests traditionnels de théorie des anticipations, l'estimation de la fonction d'aversion au risque ou du coefficient d'aversion au risque et enfin la possibilité de stratégies de trading que l'on peut déduire du biais entre les densités statistique et neutre au risque.

Information content in option prices : underlyint asset risk neutral density estimation and applications

The goal of this thesis is to study the option's underlying asset implied process and what its contribution in terms of information content i option prices. In order to achieve this, we use two main tools: interest rates future options and index options. In the first part, we describe capital markets from which data is extracted and clarify the objective puzzle. In a second part, we make a descriptive and empirical study of the different models for estimating the risk neutral density. We compare the ability of all these models to derive markets opinion on a particular economic or political event and try to extract one or more best models according to several criteria. Finally, in the last part, we describe several applications than can be performed with the knowledge of the risk neutral density. We verify that there exist many of them among which the descriptive study of market reactions using confidence intervals, tests for market efficiency using implied volatilities, expectation hypothesis tests, the risk aversion function estimation and the possibility of constructing trading strategies using the bias between the risk neutral and the historical density.

Mots-clés : Densité neutre au risque
Option sur contrat à terme
Smile de volatilités
Fonction d'aversion au risque

Vu : le Président

Vu : les suffrageants

Vu et permis d’imprimer : le Vice-Président du Conseil Scientifique chargé de la Recherche de l’Université de Paris IX Dauphine