



David Kurtz (GRO)



Calcul du delta d'une option barrière multidimensionnelle via le calcul de Malliavin

Résumé :

Le calcul du delta d'une option barrière multidimensionnelle par des méthodes de Monte Carlo est problématique. Dans ce rapport, nous présentons plusieurs algorithmes de calcul et comparons leurs performances sur un exemple multidimensionnel à dates de constatation discrètes. Ces algorithmes sont :

- le calcul par différences finies,
- le calcul à l'aide du poids de Malliavin de Fournié et al. [FLLT],
- le calcul à l'aide du poids de Malliavin de Gobet et al. [G-K], [BGK].

Nos résultats numériques confirment, sur l'exemple traité, la supériorité en terme de réduction de variance de la troisième méthode sur les deux autres.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Position du problème et notations	2
2.1	Modèle	2
2.2	Différences finies	3
2.3	Méthode des poids	3
2.4	Options barrière	3
3	Éléments de calcul de Malliavin	4
3.1	Dérivée de Malliavin	4
3.2	Intégrale de Skorokhod	5
3.3	Dérivée d'une diffusion	6
4	Calcul des poids de Malliavin	6
4.1	Le poids de Fournié et al.	6
4.2	Le poids de Gobet et al.	7
5	Application numérique	8
5.1	Paramètres et <i>payoff</i>	8
5.2	Résultats	9
6	Conclusions	9
	Références	9
	Annexes	11
A	Graphes	12
B	Détails de l'implémentation	14
B.1	Générateur de nombre aléatoires	14
B.2	Simulation du mouvement brownien géométrique	14
B.3	Choix de la fonction localisante	14
B.4	Calcul explicite du poids de Gobet et al.	14
B.5	Calculs d'intégrales	15

1 Introduction

Le calcul du delta d'une option barrière par des méthodes de Monte Carlo est problématique à plus d'un titre :

- la non-régularité du *payoff* de ce type d'option entraîne que la variance de l'estimateur de différences finies est, en général, très grande,
- ces options étant fortement *path dependent* la méthode de Fournié et al. [FLLT] est soit inapplicable lorsque les extremum sont pris sur un ensemble continu d'indices, soit fournit des estimateurs dont la variance est d'autant plus grande que l'écart entre les dates de constatations est petit.

Les récents travaux de Gobet et al. [G-K], [BGK] permettent de résoudre ces deux problèmes : ces auteurs obtiennent via le calcul de Malliavin des estimateurs sans biais et à variance raisonnable du delta d'une option barrière.

Nous nous proposons dans ce travail de comparer les résultats obtenus par ces trois approches dans le cas d'une option multidimensionnelle de type *BLAC Down & Out* (Basket Lock Active Coupon). Après avoir défini notre problématique dans la section 2, nous rappelons en section 3 les principaux résultats du calcul de Malliavin qui sont utilisés dans la suite. Dans la section 4, nous calculons deux poids de Malliavin utilisables dans le cadre des options barrière dont les extremum sont calculés sur un ensemble discret d'indices. Dans la section 5 sont regroupés les résultats des tests numériques effectués au moyen d'une implémentation C++. Ces résultats ont été corroborés par une implémentation GAUSS réalisée indépendamment. Les conclusions de cette étude se trouvent en section 6.

2 Position du problème et notations

2.1 Modèle

Nous considérons un marché dans lequel évolue un actif d -dimensionnel S dont la dynamique sous la probabilité risque neutre est décrite par l'EDS suivante

$$dS_t = \text{diag}(S_t) (r\mathbf{1} dt + \Sigma dW_t), \quad S_0 \in \mathbb{R}^d,$$

où r désigne le taux sans risque, Σ est une matrice de volatilité supposée constante et inversible et W est un mouvement brownien d -dimensionnel. L'information disponible à la date t est modélisée par la tribu $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s; s \leq t)$ convenablement complétée. En vue de références futures, nous introduisons aussi les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Sigma^i &= (\Sigma_{i1}, \dots, \Sigma_{id})^*, \\ \mu^i &= r - \frac{1}{2} \|\Sigma^i\|^2, \end{aligned}$$

et nous désignons par (e^1, \dots, e^d) la base canonique de \mathbb{R}^d .

Dans ce contexte, le prix P d'un actif de maturité T et de *payoff* \mathcal{F}_T -mesurable et de carré intégrable ϕ est donné par la formule suivante :

$$P(S_0) = \mathbb{E} [e^{-rT} \phi].$$

Nous calculons numériquement ce prix en utilisant la méthode de Monte Carlo, autrement dit il est approché par l'estimateur

$$\tilde{P} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{-rT} \phi^k,$$

où les ϕ^k sont des réalisations indépendantes de la v.a. ϕ et N est le nombre de simulation. Un intervalle de confiance à 95% pour P est alors donné par $[\tilde{P} - 1.96\sigma, \tilde{P} + 1.96\sigma]$ où $\sigma = e^{-rT} \sqrt{\text{var}(\phi)/N}$ est l'écart-type de la v.a. \tilde{P} .

Nous nous intéressons dans cet exposé au calcul du delta, noté Δ et défini par

$$\Delta^i = \frac{\partial P}{\partial S_0^i}, \quad (1 \leq i \leq d).$$

Ces nombres jouent un rôle fondamental dans la couverture des produits dérivés (voir par exemple [Hull, chapitre 13]). Il existe essentiellement deux méthodes de calcul par Monte Carlo de ces sensibilités : par différence finies ou par la méthode des poids parfois appelée *likelihood ratios*.

2.2 Différences finies

La première de ces méthodes consiste à approcher le delta par la quantité

$$\Delta_\epsilon^i = \frac{\tilde{P}(S_0 + \epsilon e^i) - \tilde{P}(S_0 - \epsilon e^i)}{2\epsilon}.$$

Notons que pour réduire la variance de cet estimateur il est recommandé (et nous le ferons systématiquement) d'utiliser les mêmes aléas gaussiens pour le calcul des deux prix apparaissant dans la formule précédente.

Les avantages de cette méthode sont

- sa simplicité,
- sa robustesse,
- le fait qu'elle donnent de très bons résultats lorsque le *payoff* est une fonction régulière du sous-jacent.

Elle conduit cependant à des estimateurs biaisés dont la variance est grande pour des fonctions *payoff* irrégulières.

2.3 Méthode des poids

La méthode des poids consiste, quant à elle, à écrire le delta sous la forme

$$\Delta = \mathbb{E}[e^{-rT} \phi H_\Delta],$$

où H_Δ est un poids à déterminer. Pour comprendre le contenu intuitif de cette écriture, considérons l'exemple simple où la loi de $\phi = \phi(S_0)$ admet une densité $p(S_0, \cdot)$ supposée connue et lisse. Le calcul formel

$$\partial_{S_0} P = \partial_{S_0} \int xp(S_0, x) dx = \int x(\partial_{S_0} p)(S_0, x) dx = \mathbb{E}[\phi(\partial_{S_0} \ln p)(S_0, \phi)]$$

nous montre que, dans ce cas, $H_\Delta = (\partial_{S_0} \ln p)(S_0, \phi)$ est un poids admissible.

La grande réussite de l'utilisation du calcul de Malliavin pour le calcul des sensibilités est de permettre l'obtention de tels poids alors même que la densité p est *inconnue*. Cette méthode possède, en outre, les avantages suivant :

- elle fournit des estimateurs sans biais pour les grecques,
- elle permet de calculer prix et sensibilités à partir des mêmes simulations,
- elle fournit des poids réutilisables dans de nombreuses situations,
- elle ne suppose aucune régularité de la fonction *payoff*.

Cependant, elle est relativement difficile à mettre en œuvre car elle fait appel à des mathématiques élaborées ; de plus, les poids obtenus peuvent conduire à des estimateurs dont la variance est grande.

2.4 Options barrière

Soit $I \subset [0, T]$ un ensemble discret ou continu d'indices appelés dates de constatation. Nous introduisons les notations suivantes :

$$\bar{S}_t^i = \max_{u \in I : u \leq t} S_u^i, \quad \underline{S}_t^i = \min_{u \in I : u \leq t} S_u^i, \quad \bar{S} = \bar{S}_T, \quad \underline{S} = \underline{S}_T,$$

et nous appelons *option barrière* de maturité T toute option dont le *payoff* ϕ , supposé de carré intégrable pour la bonne forme, s'écrit

$$\phi = \varphi(\bar{S}^1, \dots, \bar{S}^d, \underline{S}^1, \dots, \underline{S}^d, S_T^1, \dots, S_T^d).$$

Remarquons que lorsque l'ensemble I est discret ($I = \{0 < t_1 < \dots < t_N \leq T\}$), nous pouvons écrire ϕ sous la forme

$$\phi = \tilde{\varphi}(S_{t_1}, \dots, S_{t_N}).$$

3 Éléments de calcul de Malliavin

Dans toute cette section, qui se veut un rapide résumé des principaux résultats du calcul des variations sur l'espace de Wiener ou calcul de Malliavin, et sauf mention expresse du contraire, $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ est un mouvement brownien unidimensionnel défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Suivant Nualart [Nualart] (voir aussi [I-W]), nous définissons la dérivée de Malliavin pour une famille de v.a. régulières avant d'étendre la définition par densité. L'intégrale de Skorokhod est alors simplement l'adjoint de cet opérateur de dérivation. Nous prouvons la formule d'intégration par parties dans le cas des processus simples; nous ne traitons pas le cas général qui s'en déduit par un argument de densité. Nous ne considérons que le cas de la dimension 1 étant entendu que les définitions et les résultats ici présentés se généralisent aisément aux dimensions supérieures.

3.1 Dérivée de Malliavin

Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+)$ et $B(h)$ l'intégrale de Wiener $\int_0^\infty h(t) dB_t$. Rappelons qu'alors la formule d'isométrie suivante est vérifiée

$$\mathbb{E}[B(h)B(k)] = \langle h, k \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Une v.a. F est dite *régulière* si elle est de la forme

$$F = f(B(h_1), \dots, B(h_n)),$$

où les h_i sont des éléments de \mathcal{H} et f une fonction de l'espace de Schwartz. La dérivée de Malliavin d'une telle v.a. régulière est le processus $DF = \{D_t F, 0 \leq t \leq T\}$ de carré intégrable sur $\Omega \times [0, T]$ défini par

$$D_t F = (\nabla f)(B(h_1), \dots, B(h_n)) \cdot h(t),$$

où $h(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t))^*$.

Le caractère gaussien des v.a. de la forme $B(h)$ entraîne le résultat suivant valable pour toute v.a. régulière F et tout $h \in \mathcal{H}$

$$\mathbb{E}[\langle DF, h \rangle_{\mathcal{H}}] = \mathbb{E}[FB(h)].$$

Preuve. On peut supposer que $F = f(B(e_1), \dots, B(e_n))$ où les (e_i) sont orthonormés et $e_1 = h$. On a alors

$$\mathbb{E}[\langle DF, h \rangle_{\mathcal{H}}] = \int (\partial_1 f)(x) e^{-\|x\|^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}^n} = \int x_1 f(x) e^{-\|x\|^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}^n} = \mathbb{E}[FB(h)],$$

ce qui achève la preuve de cette formule. ■

Remarquons que l'on a aussi pour toutes les v.a. régulières F, G et tout $h \in \mathcal{H}$

$$(1) \quad \mathbb{E}[G \langle DF, h \rangle_{\mathcal{H}}] + \mathbb{E}[F \langle DG, h \rangle_{\mathcal{H}}] = \mathbb{E}[FGB(h)],$$

et pour le voir, il suffit d'appliquer la formule précédente au produit FG .

En utilisant cette dernière formule on peut prouver que l'opérateur D de domaine les v.a. régulières est fermable et nous notons $\mathbb{D}^{1,2}$ le domaine de sa fermeture. L'espace $\mathbb{D}^{1,2}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle F, G \rangle_{1,2} = \mathbb{E}[FG] + \mathbb{E}[\langle DF, DG \rangle_{\mathcal{H}}].$$

Dans ce contexte, on peut démontrer une propriété de type *chain rule* : Si φ est une fonction continûment différentiable et à dérivée bornée et si $F = (F_1, \dots, F_n)^*$ est un vecteur à coordonnées dans $\mathbb{D}^{1,2}$, alors $\varphi(F)$ est un élément de $\mathbb{D}^{1,2}$ dont la dérivée est

$$D\varphi(F) = (\nabla\varphi)(F) \cdot DF.$$

Nous terminons cette sous-section par le résultat suivant que nous admettrons : Si F est un élément \mathcal{F}_t -mesurable de $\mathbb{D}^{1,2}$ alors

$$D_s F = 0, \quad \text{pour presque tout } s \geq t.$$

3.2 Intégrale de Skorokhod

L'opérateur D de domaine $\mathbb{D}^{1,2}$ et à valeurs dans $L^2(\Omega \times [0, T])$ est fermé et nous pouvons définir son adjoint $D^* = \delta$. Le domaine de δ est donc l'ensemble des processus de carré intégrable u vérifiant

$$|\mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_{\mathcal{H}}]| \leq C(u) \|F\|_2,$$

où $C(u)$ est une constante qui dépend de u . Pour un tel u , $\delta(u)$ est alors caractérisé par la relation

$$\mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_{\mathcal{H}}], \quad \forall F \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

L'opérateur δ s'appelle l'opérateur de *divergence* et $\delta(u)$, qui est parfois noté $\int_0^T u_t \delta B_t$, l'*intégrale de Skorokhod* du processus u . Remarquons que la formule précédente entraîne que $\mathbb{E}[\delta(u)] = 0$.

Il est immédiat de vérifier en utilisant la formule (1) que l'intégrale de Skorokhod d'un processus de la forme $u(t) = Fh(t)$ où F est une v.a. régulière et h un élément de \mathcal{H} est donnée par la formule suivante

$$\int_0^T u(t) \delta B_t = FB(h) - \langle DF, h \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Nous énonçons maintenant un résultat qui est une formule d'intégration par parties. Elle est centrale dans la théorie et généralise considérablement la formule précédente. Si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et si u est Skorokhod-intégrable alors

$$(2) \quad \delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u \rangle_{\mathcal{H}}$$

en ce sens que Fu est Skorokhod-intégrable et la formule ci dessus est vraie si, et seulement si le membre de droite de l'égalité précédente est de carré intégrable.

Il est important de noter que l'intégrale de Skorokhod est une extension de l'intégrale d'Itô en ce sens que si u est un processus adapté et de carré intégrable sur $\Omega \times [0, T]$ alors il est Skorokhod intégrable et

$$\int_0^T u(t) \delta B_t = \int_0^T u(t) dB_t.$$

Preuve. L'opérateur δ étant fermé, il suffit de prouver ce résultat pour un processus de la forme

$$u = \sum_j F_j \mathbf{1}(t_j, t_{j+1}],$$

où $F_j \in L^2(\mathcal{F}_{t_j}) \cap \mathbb{D}^{1,2}$. Or, pour un tel processus, on peut écrire en utilisant la formule d'intégration par parties que

$$\delta(u) = \sum_j F_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} D_t F dt = \int_0^T u(t) dB_t,$$

puisque $D_t F_j = 0$ pour presque tout $t \geq t_j$. ■

3.3 Dérivée d'une diffusion

Le processus $B = (B^1, \dots, B^m)$ est maintenant un mouvement brownien m -dimensionnel et nous considérons le processus $X^x = \{X_t^x, 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^n solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad X_0 = x,$$

où b et σ sont continûment différentiables et à dérivées bornées. Le processus tangent Y définit par $Y_t = \frac{d}{dx} X_t^x$ est alors solution de l'équation différentielle stochastique

$$dY_t = b'(X_t)Y_t dt + \sum_{i=1}^m \sigma'_i(X_t)Y_t dB_t^i, \quad Y_0 = I_n,$$

où I_n désigne la matrice identité et les σ_i les colonnes de la matrice σ .

Dans ces conditions, la v.a. X_t appartient à $\mathbb{D}^{1,2}$ et on a pour presque tout $s \geq 0$

$$(3) \quad D_s X_t = Y_t Y_s^{-1} \sigma(X_s) \mathbf{1}_{(0,t]}(s).$$

4 Calcul des poids de Malliavin

Nous montrons dans cette section comment l'utilisation du calcul de Malliavin permet de trouver une v.a. H_Δ appelée *poids de Malliavin* telle que

$$\Delta = \mathbb{E}[e^{-rT} \phi H_\Delta].$$

Ces techniques s'appliquent d'ailleurs à toute les sensibilités (gamma, vega, rho, etc...). Nous présentons ici deux méthodes permettant de calculer le delta d'une option barrière : la première s'applique lorsque les dates de constatations sont discrètes, la seconde s'applique aussi bien dans le cas discret que dans le cas continu.

4.1 Le poids de Fournié et al.

Le résultat suivant est un cas particulier de la proposition 3.2 de [FLLT]. Nous supposons que $\phi = \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$ avec $0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$.

Théorème 1. *Pour tout $1 \leq i \leq d$, nous avons*

$$\Delta^i = \mathbb{E}[e^{-rT} \phi H_\Delta^i(1)], \quad \text{où } H_\Delta^i(1) = \frac{\langle \Sigma^{-1} e^i, W_{t_1} \rangle}{S_0^i t_1}.$$

Preuve. Pour simplifier la preuve et les notations, nous nous restreignons au cas $d = 1$ et modulo un argument de densité que nous omettons, nous pouvons supposer ϕ lisse. Avec ces hypothèses, nous pouvons écrire que

$$\Delta = \partial_{S_0} \mathbb{E}[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})] = \mathbb{E}[\partial_{S_0} \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})] = \mathbb{E} \left[\sum_i (\partial_i \phi)(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) R_{t_i} \right]$$

où $R_t = \partial_{S_0} S_t = S_t / S_0$. D'après (3), on a

$$D_t S_{t_i} = R_t R_{t_i}^{-1} \Sigma S_t \mathbf{1}\{t \leq t_i\}$$

de sorte que

$$R_{t_1} = \frac{1}{\Sigma S_0 t_1} \int_0^{t_1} D_t S_{t_1} dt.$$

Par suite et en utilisant la formule d'intégration par parties (2), il vient

$$\Delta = \mathbb{E} \left[\frac{1}{\Sigma S_0 t_1} \int_0^{t_1} D_t \phi dt \right] = \mathbb{E} \left[\phi \frac{\delta(\mathbf{1}(0, t_1])}{\Sigma S_0 t_1} \right] = \mathbb{E} \left[\phi \frac{\Sigma^{-1} W_{t_1}}{S_0 t_1} \right]$$

ce qui achève la preuve de ce théorème. ■

Remarquons que la variance $\text{var}(H_\Delta(1)) = C/t_1 \rightarrow +\infty$ lorsque $t_1 \downarrow 0$ et ceci limite clairement et irrémédiablement le champ d'application de cette formule aux options barrière dont la première date de constatation est loin de l'origine. Les résultats présentés dans la sous-section suivante apportent une solution très satisfaisante à ce problème.

4.2 Le poids de Gobet et al.

Les notations étant celle de la section 2.4, nous supposons désormais que

$$\phi = \varphi(\bar{S}^1, \dots, \bar{S}^d, \underline{S}^1, \dots, \underline{S}^d, S_T^1, \dots, S_T^d)$$

où φ satisfait à la condition technique suivante :

(S) Il existe $a > 0$ tel que $\varphi(M^1, \dots, M^d, m^1, \dots, m^d, s^1, \dots, s^d)$ ne dépend pas de la variable M^i (resp. m^i) si $M^i < S_0^i \exp(a)$ (resp. $m^i > S_0^i \exp(-a)$).

Suivant la définition 2.1 de [BGK], nous appelons *processus de domination* tout processus croissant adapté Y tel que

$$|\mu^i t + \langle \Sigma^i, W_t \rangle| \leq Y_t, \quad \forall t \in I, i \in \{1, \dots, d\},$$

et vérifiant une condition d'intégrabilité que nous ne précisons pas ici. Une fois un tel processus Y choisi, nous lui associons une fonction ψ lisse, à dérivés borné, satisfaisant à l'inégalité $\mathbf{1}(-\infty, a/2] \leq \psi \leq \mathbf{1}(-\infty, a]$ et telle que les v.a. $\psi(Y_t)$ soient dérivables et à dérivés bornés au sens de Malliavin.

Le théorème suivant est extrait de [BGK].

Théorème 2. *Soit Y un processus de domination et ψ une fonction associée. Pour tout $1 \leq i \leq d$, nous avons*

$$\Delta^i = \mathbb{E}[e^{-rT} \phi H_\Delta^i(2)], \quad \text{où } H_\Delta^i(2) = \frac{1}{S_0^i} \int_0^T \frac{\psi(Y_t)}{\int_0^T \psi(Y_s) ds} \langle \Sigma^{-1} e^i, \delta W_t \rangle.$$

Preuve. Pour simplifier notations et preuve, nous nous restreignons au cas $d = 1$. Nous supposons comme précédemment que φ est lisse. On a

$$\begin{aligned} \Delta &= \partial_{S_0} \mathbb{E}[\varphi(\bar{S}, \underline{S}, S_T)] = \mathbb{E}[\partial_{S_0} \varphi(\bar{S}, \underline{S}, S_T)] \\ &= S_0^{-1} \mathbb{E}[\bar{S} \partial_1 \varphi + \underline{S} \partial_2 \varphi + S_T \partial_3 \varphi] \end{aligned}$$

et (voir [N-V], [BGK, lemme 1.1])

$$(4) \quad \Sigma^{-1} D_t \phi = \bar{S} \mathbf{1}\{t \leq \tau_M\} \partial_1 \varphi + \underline{S} \mathbf{1}\{t \leq \tau_m\} \partial_2 \varphi + S_T \partial_3 \varphi,$$

où τ_M et τ_m sont les temps aléatoires définis par les relations

$$S_{\tau_M} = \bar{S}, \quad S_{\tau_m} = \underline{S}.$$

Pour pouvoir appliquer une formule d'intégration par parties, il faut se débarrasser des indicatrices et c'est le rôle du processus localisant $\psi(Y)$: nous avons

$$(5) \quad \mathbf{1}\{t \leq \tau_M\} \psi(Y_t) \partial_1 \varphi = \psi(Y_t) \partial_1 \varphi,$$

$$(6) \quad \mathbf{1}\{t \leq \tau_m\} \psi(Y_t) \partial_2 \varphi = \psi(Y_t) \partial_2 \varphi.$$

Démontrons par exemple la première de ces égalités : Si $\bar{S} < S_0 \exp(a)$, elle se réduit, en vertu de l'hypothèse (S), à 0 = 0. Dans le cas contraire et si $\psi(Y_t) \neq 0$, on a $Y_t < a$. Par suite et en tenant compte de la croissance de Y , on peut écrire que $\bar{S}_t < S_0 \exp(a) \leq \bar{S}$ et donc que $t \leq \tau_M$.

En utilisant les égalités (4), (5) et (6), on vérifie que

$$(\bar{S}\partial_1\varphi + \underline{S}\partial_2\varphi + S_T\partial_3\varphi) = \frac{1}{\Sigma} \int_0^T D_t\phi \frac{\psi(Y_t)}{\int_0^T \psi(Y_s) ds} dt.$$

On peut alors, en utilisant la formule d'intégration par parties (2), écrire que

$$\Delta = \frac{1}{S_0} \mathbb{E} \left[\int_0^T D_t\phi \frac{\psi(Y_t)}{\int_0^T \psi(Y_s) ds} \Sigma^{-1} dt \right] = \frac{1}{S_0} \mathbb{E} \left[\phi \int_0^T \frac{\psi(Y_t)}{\int_0^T \psi(Y_s) ds} \Sigma^{-1} \delta W_t \right],$$

ce calcul étant justifié par le fait que $(\int_0^T \psi(Y_s) ds)^{-p}$ est intégrable pour tout $p \geq 1$, ce qui achève la preuve de ce théorème. ■

Dans les applications numériques, on peut utiliser comme processus de domination pour le calcul des delta le *processus extrême* défini par

$$Y_t = \max_{1 \leq i \leq d} \left\{ \max_{s \in I: s \leq t} (\mu^i s + \langle \Sigma^i, W_s \rangle) - \min_{s \in I: s \leq t} (\mu^i s + \langle \Sigma^i, W_s \rangle) \right\}.$$

Ce processus vérifie la condition d'intégrabilité que nous avons passé sous silence (voir la proposition 2.1 de [BGK]).

5 Application numérique

Nous nous plaçons dans le cadre du modèle de Black & Scholes décrit dans la section 2.

5.1 Paramètres et *payoff*

Nous choisissons un modèle dont les $d = 5$ sous-jacents sont de valeurs initiales identiques notée $S_{initial}$. Les volatilités de ces actifs sont $\|\Sigma^1\| = 35\%$, $\|\Sigma^2\| = 35\%$, $\|\Sigma^3\| = 38\%$, $\|\Sigma^4\| = 35\%$, $\|\Sigma^5\| = 40\%$ et la matrice de corrélation ρ vaut $\lambda \mathbf{1} + (1 - \lambda)I$. Le nombre de date de constatation est noté N (de sorte que $N = 50$ correspondent approximativement à des constatations hebdomadaires). Le *payoff* de l'option *BLAC Down & Out* que nous considérons est de la forme

$$\phi = \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_K \leq d} \mathbf{1}\{\underline{S}^{i_1} \vee \dots \vee \underline{S}^{i_K} > H\},$$

où $K \leq d$ et la barrière H appartient à l'intervalle $(0, S_{initial})$. Autrement dit, à échéance est payé un coupon unité si, durant la vie de l'option, au plus $K - 1$ sous-jacents ont été constatés sous la barrière aux dates de constatation. En écrivant

$$\varphi(m^1, \dots, m^d) = \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_K \leq d} \left(1 - \prod_{k=1}^K \mathbf{1}\{m^{i_k} \leq H\} \right)$$

on s'assure que la condition (S) est vérifiée pour ce *payoff*. Les paramètres choisis pour les applications numériques sont les suivants : $T = 1.0$ an, $S_{initial} = 100$, H dans l'intervalle $[50, 100)$, $r = 0\%$, $K = 2$ et $\lambda = 40\%$. Notre but est le calcul numérique de Δ^1 autrement dit de $\partial_{S_0} \mathbb{E}[\phi]$. Le nombre de simulations est noté N_S . Notons que nous travaillons avec $a = \ln(S_{initial}/H)$.

Cette option ne dépendant que du minimum, on améliore la variance de l'estimateur de Gobet et al. en utilisant comme processus de domination

$$Y_t = \max_{1 \leq i \leq d} \left\{ - \min_{s \in I: s \leq t} (\mu^i s + \langle \Sigma^i, W_s \rangle) \right\}.$$

5.2 Résultats

Nous commençons par comparer nos résultats avec ceux calculés par les auteurs de [BGK]. Ils ont été obtenus dans les deux cas pour $N_S = 200\,000$, $\lambda = 40\%$ et $H = 76$ et sur un coupon de mille unités et nous constatons un écart important. Ces écarts peuvent s'expliquer par des différences d'implémentation (et c'est pourquoi nous précisons en annexe B les détails de la nôtre) ou, plus vraisemblablement, par une description erronée du produit valorisé. Nos résultats sont indexés par 1 contrairement aux résultats de [BGK] indexés par 2. Nous notons I les intervalles de confiance à 95%.

TABLE 1
Delta de l'option BLAC

	Δ_1	Δ_2	EA	EAR	$I_1 \cap I_2$
<i>DF</i>	3.71 ± 0.19	3.15 ± 0.35	0.56	15.01%	\emptyset
Malliavin	3.95 ± 0.61	3.53 ± 0.47	0.42	10.63%	[3.34, 4.00]
Malliavin Local	3.84 ± 0.14	3.37 ± 0.08	0.47	12.24%	\emptyset

Résultats obtenus avec 200 000 simulations

Les graphes sont regroupés en annexe A. La figure 1 montre la convergence comparée des trois méthodes appelés respectivement *DF*, poids de Malliavin et poids de Malliavin local. La figure 2 montre l'impact du nombre N de pas sur la variance des trois estimateurs du delta. Comme nous l'avons déjà remarqué la variance de l'estimateur de Malliavin sans la procédure de localisation augmente lorsque $N \uparrow +\infty$. Les variances des deux autres estimateurs sont insensibles à cette augmentation. Nous constatons que la variance de l'estimateur aux différences finies est légèrement supérieure à celle de l'estimateur de Gobet et al. Sur la figure 3, nous montrons l'impact de la barrière sur la variance des trois estimateurs. Notons que lorsque $H \uparrow S_0$, on a $a \downarrow 0$ et qu'alors (cf. [BGK, proposition 2.3])

$$H_{\Delta}^1(2) \longrightarrow H_{\Delta}^1(1), \quad p.s \text{ et dans } L^p, \quad (p < d).$$

Nos résultats sont en accord avec la théorie puisque nous constatons graphiquement que la distance entre les variances des deux estimateurs de Malliavin tends vers 0 lorsque $H \uparrow S_0$. Ici encore, nous constatons que la variance de l'estimateur aux différences finies est légèrement moins bonne que celui obtenu par la méthode de Gobet et al. La figure 4 représente l'approximation des densités de nos trois estimateurs obtenue par la méthode des noyaux avec 1000 simulations. Plus précisément, nous utilisons le noyau d'Epanechnikov (voir par exemple [Silverman]) avec une bande passante fixée à 0.25. Les traits verticaux représentent la moyenne empirique des estimateurs.

6 Conclusions

Sur l'exemple traité, nous constatons que la méthode de Gobet et al. réalise le meilleur résultat en terme de variance. Il faut cependant pondérer ce résultat par la complexité de l'estimateur en tenant compte de l'allongement des temps de calcul.

Les auteurs de [BGK] annoncent pourtant sur cet exemple une réduction de variance de l'ordre de 4 fois la variance de l'estimateur aux différences finies et justifient l'obtention d'un tel résultat par l'utilisation d'une "bonne" fonction localisante. En raison de clauses de confidentialité, nous n'avons pas pu avoir accès à la description de cette fonction ni vérifier l'affirmation des auteurs. Nous réfutons cependant les chiffres présentés dans l'article précité et nous pensons que le produit décrit n'est pas celui effectivement valorisé.

Il reste que la méthode de Gobet et al. est d'autant meilleure que la fréquence entre les dates de fixing est petite et qu'elle est la seule, à ce jour, permettant d'obtenir des estimateurs non biaisés pour les grecques des options barrière multidimensionnelles dont les extremum sont pris sur un ensemble continu d'indices.

Références

- [BGK] Bernis (G.), Gobet (E.), Kohatsu-Higa (A.). Monte Carlo Evaluation of Greeks for multidimensionnal barrier and lookback options. Proceedings of the "Workshop on the Application of Malliavin calculus in finance", Rocquencourt (2001). À paraître dans *Mathematical Finance*.
- [FLLT] Fournié (E.), Lasry (J.-M.), Lebuchoux (J.), Lions (P.-L.), Touzi (N.). Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. *Fin. and Stoch.* **3**, 391-412 (1999).
- [G-K] Gobet (E.), Kohatsu-Higa (A.). Computations of Greeks for barrier and lookback options using Malliavin calculus. Rapport interne # 464 du CMAP (2001).
- [Hull] Hull (J. C.). *Options, Futures, & other Derivatives (4th Edition)*. Prentice-Hall International (2000).
- [I-W] Ikeda (N.), Watanabe (S.). *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North Holland-Kodansha (1981).
- [M-Z] Marsaglia (G.), Zaman (A.). A new class of random number generators. *Annals of Applied Probability*, **1**, p. 462-480 (1991).
- [Nualart] Nualart (D.). *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer (1995).
- [N-V] Nualart (D.), Vives (J.). Absolute continuity of the law of the maximum of a continuous process. *C. R. Acad. Sci.*, 307 (7), 349-354 (1998).
- [Silverman] Silverman (B. W.). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman & Hall (1986).

Annexes

A Graphes

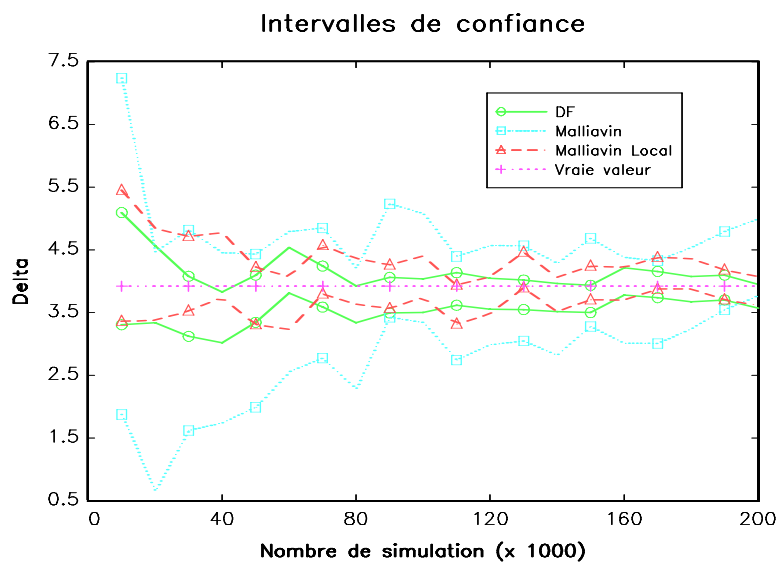


FIG. 1: Intervalles de confiance

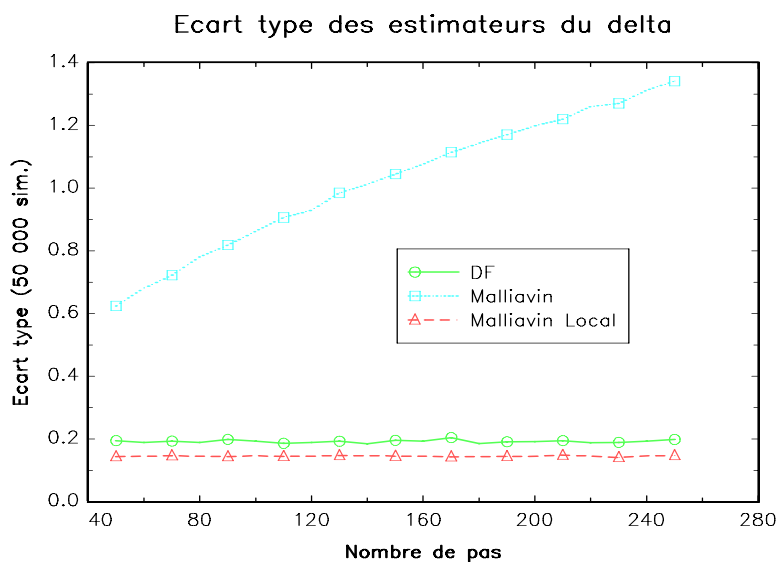


FIG. 2: Écart-type des estimateurs du delta en fonction du nombre de date de constatation

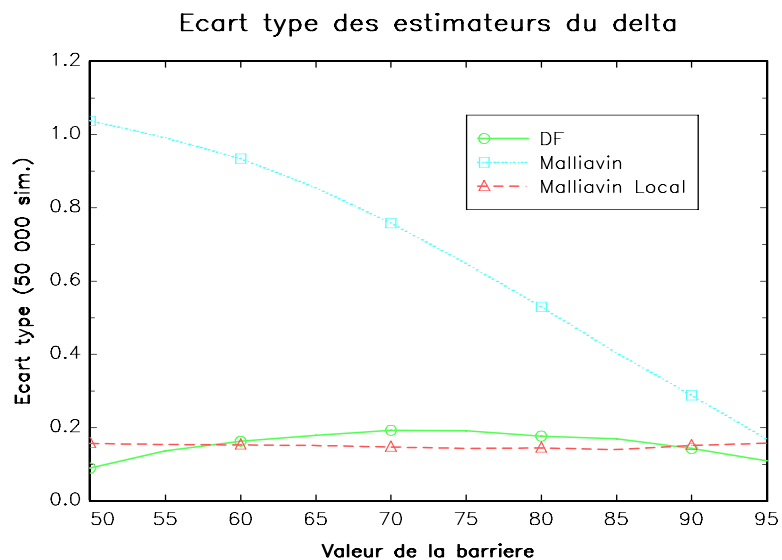


FIG. 3: Écart-type des estimateurs du delta en fonction de la barrière

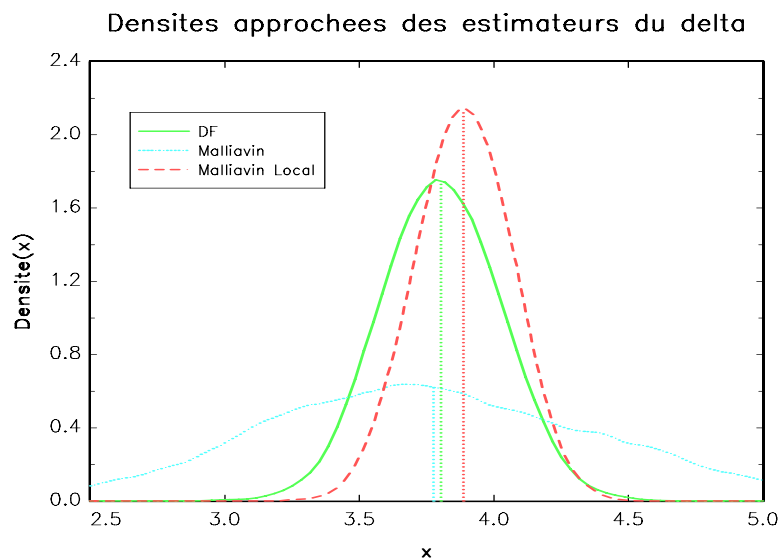


FIG. 4: Approximation des densités des estimateurs du delta

B Détails de l'implémentation

B.1 Générateur de nombre aléatoires

Nous utilisons le générateur de nombre aléatoire ULTRA de Marsaglia & Zaman [M-Z]. Le code C que nous avons utilisé est disponible à l'adresse suivante :

`http://archives.math.utk.edu/software/msdos/miscellaneous/fsultra1/`

B.2 Simulation du mouvement brownien géométrique

Nous décrivons ici la méthode utilisée pour simuler un mouvement brownien géométrique S aux instants de discrétisation. Nous utilisons un schéma exact de sorte que si N est le nombre de pas, T la maturité et $\delta t = T/N$ nous avons

$$S_{(k+1)\delta t}^i = S_{k\delta t}^i \exp \left(\sqrt{\delta t} \|\Sigma^i\| \epsilon^i + \left(r - \frac{\|\Sigma^i\|}{2} \right) \delta t \right), \quad (0 \leq k \leq N-1),$$

où ϵ est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance ρ et indépendant des tirages antérieurs.

B.3 Choix de la fonction localisante

Soit φ la fonction créneau suivante :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \exp\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right), & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Le réel $a > 0$ étant fixé, nous utilisons la fonction ψ défini par

$$\psi(x) = \varphi\left(\frac{a-2x}{a}\right).$$

B.4 Calcul explicite du poids de Gobet et al.

Nous présentons dans cette sous-section le calcul explicite du poids de Malliavin dans le cas où Y est le processus extrême. Les notations sont celles du corps du texte.

Nous posons

$$F = \left(\int_0^T \psi(Y_t) dt \right)^{-1}$$

et $v = \Sigma^{-1}e^1$ de sorte qu'en vertu de la formule d'intégration par parties, nous pouvons écrire que

$$S_0^1 H_{\Delta}^1(2) = F \int_0^T \psi(Y_t) \langle v, dW_t \rangle + F^2 \int_0^T ds \int_0^s dt \psi(Y_t) \psi'(Y_s) \langle v, D_t Y_s \rangle.$$

Il reste à calculer $D_s Y_t$ pour $s \leq t$ et pour ce faire, nous écrivons que $Y_t = G(X_t)$ avec

$$X_t = \max_{s \in I: s \leq t} (\mu s + \langle \Sigma, W_s \rangle) - \min_{s \in I: s \leq t} (\mu s + \langle \Sigma, W_s \rangle)$$

et $G(x^1, \dots, x^n) = x^1 \vee \dots \vee x^n$ puis que

$$\begin{aligned} D_s Y_t &= \sum_i (\partial_i G)(X_t) D_s X_t^i = \sum_i \mathbf{1}\{Y_t = X_t^i\} \Sigma^i (\mathbf{1}\{s \leq \tau_M^i(t)\} - \mathbf{1}\{s \leq \tau_m^i(t)\}) \\ &= \Sigma^{I(t)} \left(\mathbf{1}\{s \leq \tau_M^{I(t)}(t)\} - \mathbf{1}\{s \leq \tau_m^{I(t)}(t)\} \right), \end{aligned}$$

où les temps aléatoires $I(t)$, $\tau_M^i(t)$ et $\tau_m^i(t)$ sont définis par les relations

$$Y_t = X_t^{I(t)}, \quad S_{\tau_M^i(t)}^i = \bar{S}_t^i, \quad S_{\tau_m^i(t)}^i = \underline{S}_t^i.$$

B.5 Calculs d'intégrales

Les intégrales apparaissant dans le poids de Malliavin décrit ci-dessus se calculent exactement via les formules suivantes :

$$\int_0^T \psi(Y_t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \psi(Y_{k\delta t}) \delta t,$$

$$\int_0^T \psi(Y_t) \langle v, dW_t \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \psi(Y_{k\delta t}) \langle v, W_{(k+1)\delta t} - W_{k\delta t} \rangle,$$

$$\int_0^T ds \int_0^s dt \psi(Y_t) \psi'(Y_s) \langle v, D_t Y_s \rangle =$$

$$\sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{k_1} \psi(Y_{k_2\delta t}) \psi'(Y_{k_1\delta t}) \langle v, D_{k_2\delta t} Y_{k_1\delta t} \rangle C(k_1, k_2) \delta t^2,$$

avec $C(k_1, k_2) = 1 - 0.5 \mathbf{1}\{k_1 = k_2\}$.