Les jeux de la Finance et du Hasard

Gilles Pagès

gpa@ccr.jussieu.fr

Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires
UMR-CNRS 7599

Université PARIS 6-Pierre & Marie Curie

Fondation Sciences Mathématiques de Paris

Collège de France

28 septembre 2007

Les jeux de l'amour ...

▷ Il était une fois ... , un vieux roi fatigué qui voulait marier sa fille

(Crédit photo *Zigomatic*)

▷ . . . qui, elle, ne le souhaitait guère

(Crédit photo *Shrek* (Dreamworks))

Le Roi et sa fille conclurent un contrat gré à gré ...

- La Princesse recevrait chaque jour l'un des N prétendants du royaume.

(Crédit photo *Kelblog*)

- Elle aurait une journée pour se faire une opinion par elle-même ...

(Désolé, pas de photos ...)

Quoique ...

(Crédit photo *Prince et Princesse* (Michel Ocelot))

- Puis elle devrait, soit épouser le prétendant, soit le récuser à jamais, ...

(Crédit photo *Gyptis & Protis*)

- Et , le N ème jour, si aucun ne lui convenait ... elle épouserait le dernier.

(Crédit photo *Shrek* (Dreamworks))

▷ La Princesse a fait un Master 2 de

Mathématiques financières

(avec les vestales des marchés : N. El Karoui, L. Élie ou H. Geman ou ...)

▷ Elle y a appris notamment comment

gérer ce contrat de façon optimale

▷ Modèle (simpliste) de prétendants : Les prétendants du royaume sont *a priori* des êtres "*i.i.d.*" (indépendants, identiquement distribués) :

– "indépendants" les uns des autres

– mais "statistiquement analogues".

Elle va les noter au fil des rencontres. Soit

$$X_k \text{ la note entre 0 et 20 du } k \text{ ème prétendant.}$$

▷ Le processus "bonheur espéré" (*expected happiness*) à la date k s'obtient par arbitrage entre le *présent* et *ce que l'on sait du futur*

$$B_k = \max\left(X_k, \underbrace{\text{Approximation de } B_{k+1} \text{ sachant l'histoire jusqu'en } k}_{\mathbb{E}(B_{k+1}\,|\,\text{histoire}_k)}\right)$$

$$B_k = \max\left(X_k, \mathbb{E}\text{spérance}(B_{k+1})\right) \qquad \text{et} \qquad B_N = X_N.$$

▷ Calcul du bonheur moyen attendu : On procède da façon *rétrograde* (*backward*)

$$\mathbb{E}B_{N} = \mathbb{E}X_{N} = 10$$

et

$$\mathbb{E}\,B_k \quad = \quad \mathbb{E}(\max(X_k, \mathbb{E}(B_{k+1}))) = \int_0^{20} \max(x, \mathbb{E}(B_{k+1}))dx$$

et

$$\mathbb{E}\,B_k \quad = \quad 20 \times \rho_{N-k}, \quad \rho_k = \frac{1+\rho_{k+1}^2}{2},\ \rho_0 = \frac{1}{2}.$$

▷La stratégie optimale : Définir une *règle d'arrêt*

$$\theta = \min\{k \,:\, k < N \text{ et } X_k > \mathbb{E}B_{k+1}\} \qquad \text{ou} \qquad \theta = N \text{ (à défaut)}$$

i.e. on s'arrête dès qu'on a trouvé mieux que ce que l'on peut espérer en moyenne demain.

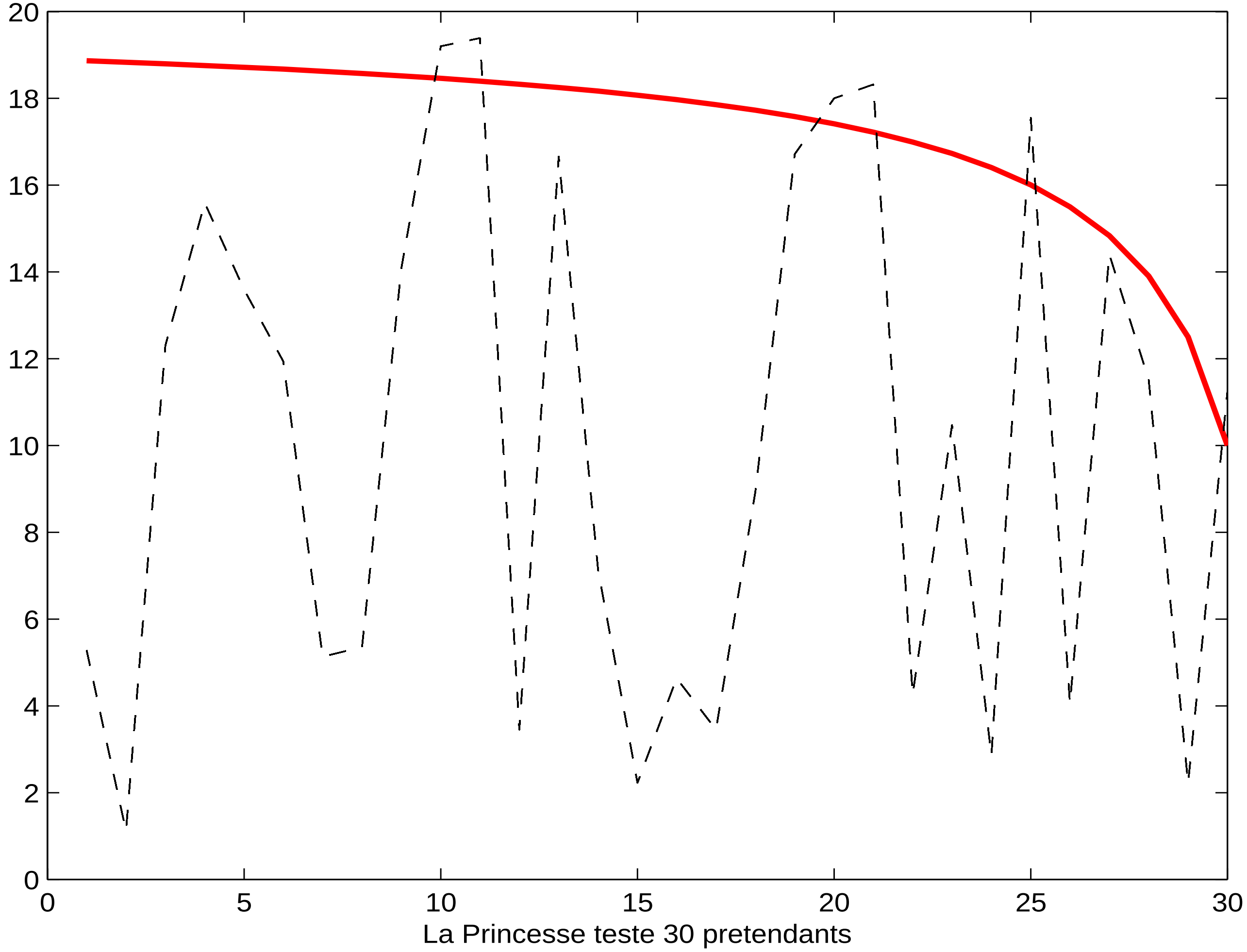

Fig. 1: Le prétendant n^{0}10 a gagné . . .

Fig. 2: Sans surprise ...
(Crédit photo *Petit Prince*)

Au fait

$$\mathbb{E}\text{spérance}\,(\theta) \approx \frac{N}{3}$$

La Princesse se marie, mais bientôt elle s'ennuie . . .

Elle s'intéresse aux marchés d'actions . . .

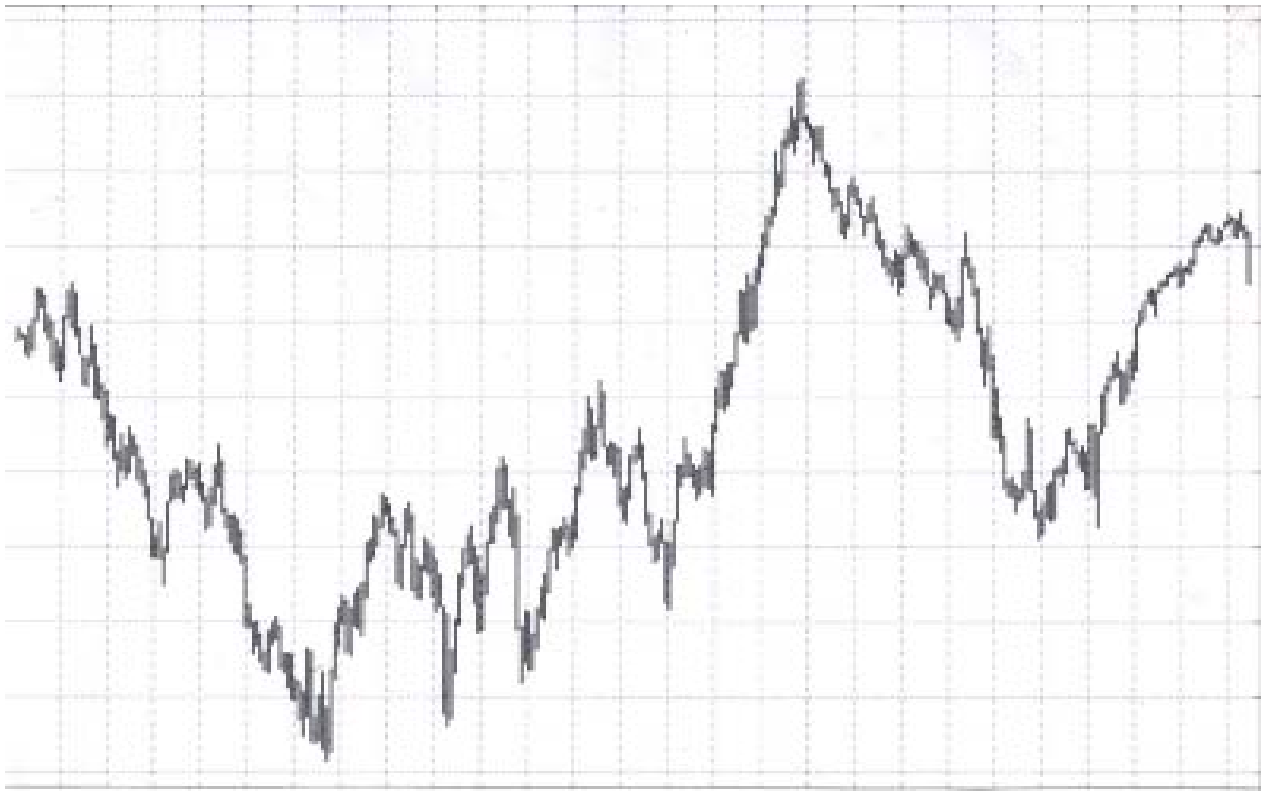

Fig. 3: Cours de l'action *Cogitel Finance*, $k = 0, \ldots, N$

... et à leurs *dérivés*. Anticipant une hausse de cette société elle décide

d'acquérir une option d'achat sur *Cogitel Finance*

Une option américaine ?

Contrat donnant à la Princesse le

Droit d'acheter l'action $S = (S_k)_{0 \le k \le N}$ au prix d'exercice K, une et une seule fois entre les dates 0 et N.

▷ LA VALEUR DU CONTRAT : Par arbitrage entre aujourd'hui et demain

$$V_k = \max\big(S_k - K, \mathbb{E}(V_{k+1}\,|\,\text{histoire jusqu'en } k)\big)\,, \qquad V_N = \max(S_N - K, 0).$$

▷ LA/UNE STRATÉGIE OPTIMALE :

$$\theta := \min\big\{k \;:\; S_k - K \ge \mathbb{E}(V_{k+1}\,|\,\text{histoire jusqu'en } k)\big\} \wedge N$$

Une option européenne ?

▷ Contrat donnant à la Princesse le

Droit d'acheter l'action S au prix d'exercice K, à la date N.

▷ Profit lié à la détention du contrat en N (*payoff*) :

$$\left.\begin{array}{cc} S_N - K & \text{si } S_N > K \\ 0 & \text{si } S_N \leq K \end{array}\right\} = \max(S_N - K, 0).$$

$$V_k = \mathbb{E}\left(V_{k+1} \,|\, \text{histoire jusqu'en } k\right), \qquad V_N = \max(S_N - K, 0).$$

– V_0 est la *prime de l'option* en 0 (prix déterministe payé par la Princesse).

Qui a vendu l'option à la Princesse ?

Son banquier (via les analystes quantitatifs qui travaillent pour lui) !

▷ Comment le banquier a-t-il calculé le prix de cette option ?

En gérant un portefeuille *dupliquant* la prime de l'option sur le marché de l'action sous-jacente :

$$V_k - V_{k-1} = \delta_{k-1}(S_k - S_{k-1}), \qquad k = 1, \ldots, n$$

où δ_{k-1} = quantité d'actions détenue en k au vu du marché juqu'en $k-1$.

$$\max(S_N - K, 0) = V_0 + \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(S_k - S_{k-1}).$$

C'est l'idée de la *gestion (ou "couverture") dynamique* de Black & Scholes.

$\triangleright$ Si $(S_k)_{0\le k\le N}$ est une martingale *i.e.* un modèle de fortune dans un jeu équitable

$$\mathbb{E}(S_k - S_{k-1}\,|\,\text{histoire jusqu'en } k-1) = 0$$

alors

$$\boxed{\delta_{k-1} = \frac{\mathbb{E}((V_k - V_{k-1})(S_k - S_{k-1})\,|\,\text{histoire jusqu'en } k)}{\mathbb{E}((S_k - S_{k-1})^2\,|\,\text{histoire jusqu'en } k)}.}$$

▷Idée de Black & Scholes :

Choisir une "probabilité-martingale" $\mathbb{P}^* \neq$ la "vraie" probabilité historique $\mathbb{P}$.

Un marché où cette probabilité existe et est unique est dit "complet".

Théorème.(Harrisson, Kreps, Pliska) (*a*) *Dans un marché où il n'y a pas d'arbitrage possible, il existe une "probabilité-martingale" (compatible avec le réel).*

(*b*) *Dans un marché* complet *où la "probabilité-martingale" (compatible avec le réel) est unique toutes les options peuvent être dupliquées avec l'actif risqué.*

Et en temps continu . . .

▷ Le mouvement brownien . . . géométrique entre 0 et T

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma dW_t) \quad \overset{(calcul\ stochastique d'Ito)}{\Longleftrightarrow} \quad S_t = s_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T}.$$

▷ Formule de Black & Scholes (1973)

$$\boxed{\mathrm{Prime}_0^{BS} = s_0\,\mathcal{N}\left(\frac{\log(s_0/K) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K\mathcal{N}\left(\frac{\log(s_0/K) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right)}$$

$$\boxed{\text{Couverture en } t : \qquad \delta_t^{BS} = \mathcal{N}\left(\frac{\log(S_t/K) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)}$$

$$\mathcal{N}(x) = \int_{\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \text{fonction de répartition de la loi normale.}$$

Et en temps continu ...

▷ Le mouvement brownien ... géométrique entre 0 et T

$$dS_t = S_t\,\sigma dW_t \qquad \overset{(calcul\ stochastique\ d'Ito)}{\Longleftrightarrow} \qquad S_t = s_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma W_T}.$$

▷ Formule de Black & Scholes (1973)

$$\boxed{\mathrm{Prime}_0^{BS} = s_0\,\mathcal{N}\left(\frac{\log(s_0/K)+\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K\mathcal{N}\left(\frac{\log(s_0/K)-\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right)}$$

$$\boxed{\text{Couverture en } t : \qquad \delta_t^{BS} = \mathcal{N}\left(\frac{\log(S_t/K)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)}$$

$$\mathcal{N}(x) = \int_{\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \text{fonction de répartition de la loi normale.}$$

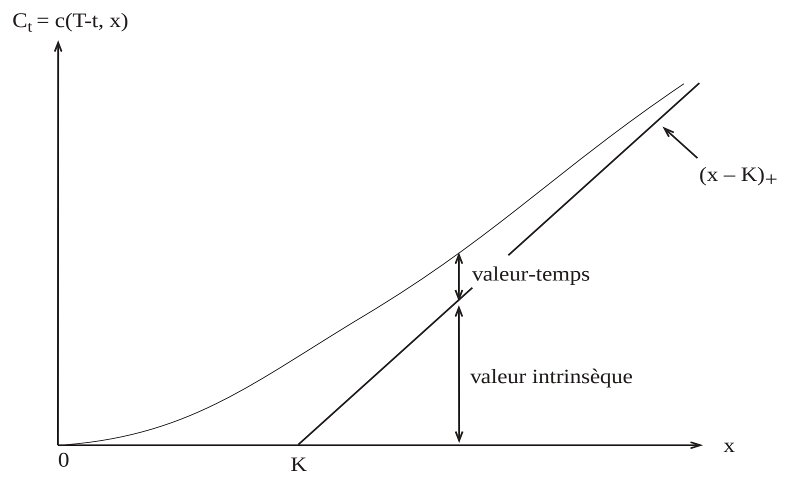

Fig. 4: Prime de l'option d'achat *Cogitel Finance*, $k = 0, \dots, N$

Aux dernières nouvelles, la Princesse . . .

a trouvé un poste de Quant à la City (Londres).

Comme 60% de nos étudiants en Master de Mathématiques financières.

Elle espère ainsi gagner assez d'argent pour renflouer . . .

son vieux pays en état de faillite.

Remerciements

Merci à Julie P., à *Cogitel F.* et aux créateurs de :

– *Gyptis & Protis*,

– *Petit Prince*,

– *Prince et Princesse*,

– *Shrek* (2 fois).

et de

– *Zigomatic*.